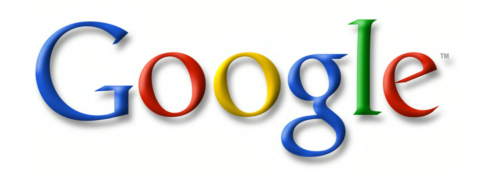






1817
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE
THE GIFT OF
Prof. Louis Karpinski



ELEMENTOS
DE MATEMATICA.

TOMO VIII.

ELEMENTOS
DE MATEMATICA.

POR DON BENITO BAILS,

Director de Matemáticas de la Real Academia de San Fernando, Individuo de las Reales Academias Española, de la Historia y de la de Ciencias naturales y Artes de Barcelona.

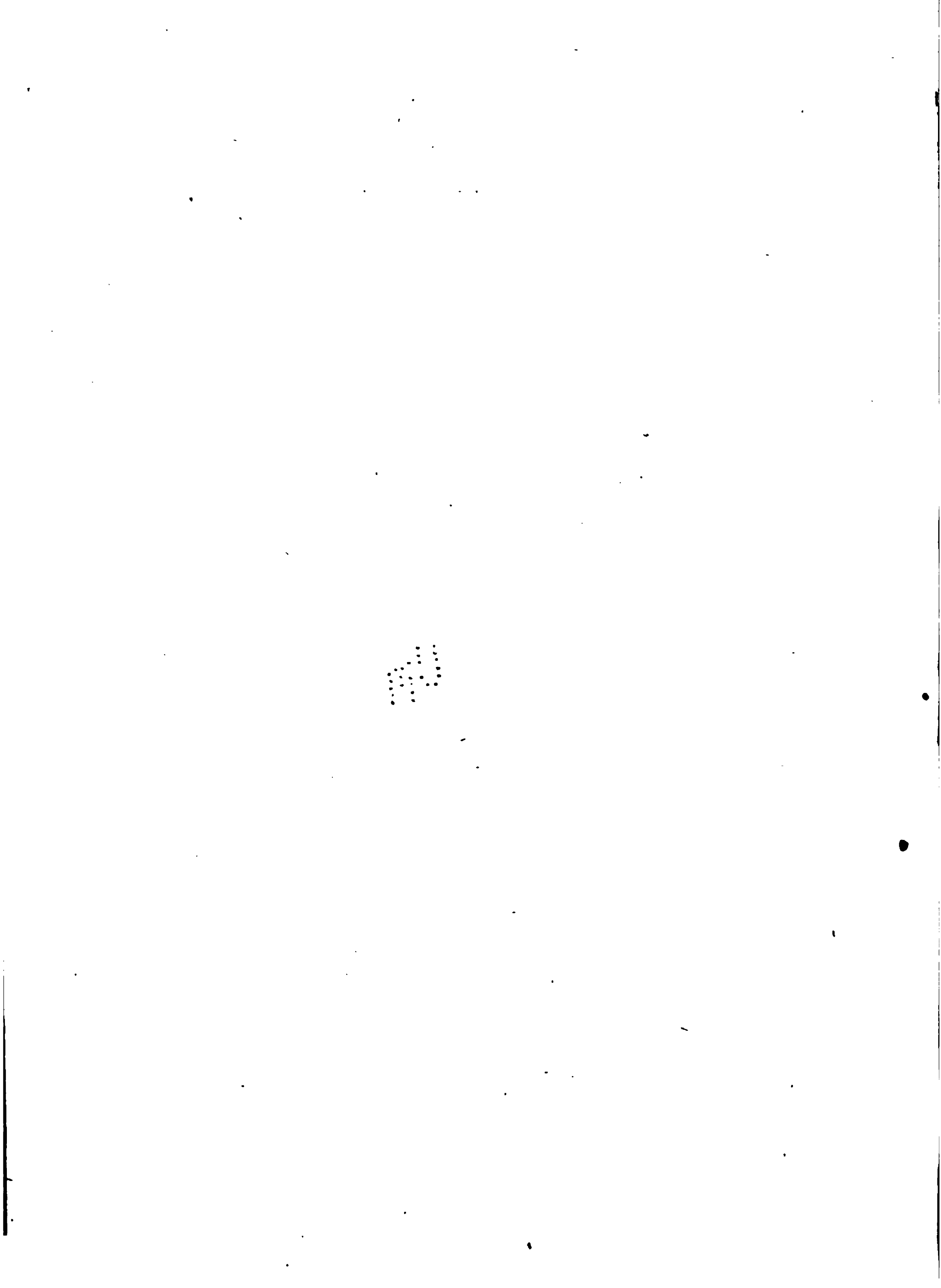
TOMO VIII.



MADRID.

Por D. Joaquin Ibarra, Impresor de Cámara de S. M.

MDCCLXXV.



PRÓLOGO.

Si la Astronomía es la ciencia en que mas resplandece la sagacidad del entendimiento humano, por la naturaleza de los descubrimientos que ha hecho sobre unos cuerpos tan apartados de nuestra habitacion, es tambien la que exîge para su cabal inteligencia conocimientos muy extensos de Dinámica, Óptica, Geometría, y sobre todo de los cálculos diferencial é integral, que tanto exercicio han dado y dan á los Matemáticos de primer orden. El descubrimiento que de ellos hizo el célebre Newton, y la generalidad con que determinó las fuerzas centrales en todas las curvas, le proporcionaron manifestar que las leyes de Kepler eran una conseqüencia de estos cálculos, y de otro principio sumamente fecundo á quien dió el nombre de atraccion, ó gravitacion universal. Por este principio, ó por mejor decir por esta fuerza general y constante que gobierna el universo entero, explicó todos los fenómenos Astronómicos conocidos, y aun anunció algunos que entonces no lo eran, y que se han averiguado despues. Tales son muchas desigualdades del movimiento de la luna, las perturbaciones que se causan Júpiter y Saturno en su con-

juncion , la figura de la tierra , la nutacion de su ege , &c.

No era posible que Newton hiciese de la atraccion todas las aplicaciones que en el dia se conocen. Esto pedia que los cálculos llegasen á un estado de perfeccion que no tenian en su tiempo , y que habia de ser la obra de los Geómetras que le sucediesen. Entre los que se dedicaron á este asunto , se debe hacer particular mencion de los hermanos Juan y Jacobo Bernulli , y de Daniel hijo de este por lo mucho que los adelantaron. Maclaurin y Euler no solo contribuyeron con sus tareas para conseguir este mismo fin , sino que perfeccionaron la teoría de las mareas , ó del fluxo y refluxo del mar , acreditando que este fenómeno en todas sus circunstancias es un efecto de la gravitacion.

Para reconocer tambien de un modo que no quedase duda , si las irregularidades que se observaban en el movimiento de la luna eran originadas de su gravitacion ácia el sol , se necesitaba resolver un problema que tampoco alcanzaba la Geometría en tiempo de Newton , y es el conocido en el dia por los Geómetras con el nombre de la qüestion de los tres cuerpos. Euler , d' Alembert y Clairaut , se empeñaron casi á un tiempo en su resolucion , y consiguieron por fin explicar las desigualdades del movimiento de la luna y las de Júpiter y Saturno. Pero

d'

d' Alembert tiene la gloria de haber sido el primero que ha emprendido la solucion rigurosa del dificil problema de la precesion de los equinoccios, que no es otra cosa que una qüestion de Dinámica que se puede proponer en los términos siguientes: *Determinar el movimiento de todas y cada una de las partes de un cuerpo que ha recibido una impresion qualquiera en uno, ó varios de sus puntos, y cuyas partes gravitan ácia varios centros movibles.*

Todos estos progresos juntos con los que hizo Clairaut sobre la teoría de la luna, y del cometa del año de 1759, han dado tal grado de evidencia al principio de la atraccion universal, que con razon se puede decir que á ellos debe Newton el triunfo de su sistema. Pues aunque él explicó el fenómeno de la precesion de los equinoccios, lo hizo con poca claridad y con unas apróxîmaciones bastante imperfectas, y si habló de la nutacion del ege terrestre fué dudando de que se pudiese observar, contra lo que despues ha reconocido Bradley. En lo demas debió Newton la confirmacion de su principio sobre las mareas y sobre la figura de la tierra, á las observaciones de la Real Academia de París.

El conocimiento, pues, de todas estas cosas, ó por mejor decir de las causas de adonde provienen los fenómenos celestes forma el objeto del primer tratado, que se contiene en este tomo. Des-

pues de manifestar en él la posibilidad, necesidad y exìstencia de la atraccion, y las leyes baxo que obra, se empiezan las investigaciones que son propias de la Astronomía Física, y con las quales da fin el Autor de esta obra á quanto se propuso decir sobre la ciencia de los cuerpos celestes.

La importancia y necesidad de la Astronomía, que unos creen ser una ciencia de mero luxo, quando otros por una vergonzosa ignorancia la confunden con la Astrología, se acreditan por lo mucho que con sus aplicaciones contribuye á la felicidad pública, y por la dependencia que de ella tienen la Cronología, Geografia y Gnomónica, cuyos fundamentos se explican en este libro, bien que no son los únicos ramos dependientes de la Astronomía.

A la Cronología le toca señalar la medida de los dias y años, distribuir el tiempo, fixar las épocas de la historia, y hacer el cálculo de quantos puntos abraza el conocimiento del calendario, todo lo qual estriva en la comparacion de los movimientos del sol con los de la luna. A la Geografia le pertenece, segun la significacion de esta voz, describir la tierra; pero ni aun esta descripcion se puede hacer con la exàctitud que corresponde si se ignoran las relaciones que nuestro planeta tiene con el cielo. Sola la atenta inspeccion de los fenómenos celestes puede convencer sin dexar el menor

nor rezelo que la tierra no es un plano de suma extension interrumpido por montañas, valles, rios, &c. Sin embargo no es esta descripcion el asunto de este tratado: el punto que en él ocupa el primer lugar es la exposicion de los métodos por donde se determina la figura y magnitud de la tierra, dexando para lo último el dar á conocer los principios matemáticos, en que se funda la construccion de las cartas Geográficas. En fin á la Gnomónica le corresponde dar reglas para trazar toda especie de reloxes solares y lunares. Y como todas ellas se fundan en la Astronomía, no hay Astrónomo que no sea Gnomónico sin hacer particular mérito de ello.

No son estos tratados los que solamente se contienen en este tomo. Sabia el difunto Bails la necesidad que tienen de la Perspectiva los Discípulos de la Academia, y era por lo mismo muy puesto en razon que á este ramo le diese algun lugar en su obra. Se lo da con efecto; pero de las tres especies de perspectivas que se conocen; á saber la *Linear*, *Aerea y Especular*, se ciñe casi á manifestar lo que corresponde saber á cerca de la primera, que es la que representa la situacion, figura, magnitud, contornos y degradacion de los objetos por medio de lineas. No obstante el punto de las sombras, que es el primero que debe lle-

var-

varse la atencion en el estudio de la perspectiva aerea, por ser la que presenta los objetos con los colores que les son propios, está tratado con bastante extension, pues lo considero de suma importancia para los Pintores, especialmente quando tienen que pintar objetos alumbrados del sol, ó de alguna luz inmediata. Nada dice de la perspectiva especular; pero el que tenga presente las leyes de Óptica podrá dar razon del modo con que los espejos presentan los objetos.

El último tratado con que se concluye este tomo es de Música especulativa. En él ha procurado su Autor separar todos los conocimientos matemáticos de las proposiciones que son prropias de esta Arte con la mira de facilitar su inteligencia, bien que prueba con el cálculo por via de notas muchos de los puntos que abraza esta investigacion. Pero aunque haya tomado esta precaucion, y se haya tambien esmerado en poner al alcance de todos sus lectores lo mucho que debemos á los mas célebres Matemáticos de este siglo, no faltarán algunos que lo tachen de obscuro en varias partes, ó tal vez de ininteligible, si queriendo adquirir un buen conocimiento de la Astronomía, Geografia, Perspectiva, &c. no han hecho de antemano un buen caudal de la doctrina que se contiene en los tomos anteriores.

ERRATAS.

Pag.	*Linea.*	*Dice.*	*Léase.*
7	16	$a - \frac{a^3}{6}$	y por lo mismo, $a - \text{sen}\, a = \frac{a^3}{6}$
10	5	$-\frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$	$+\frac{x^4 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$
13	14	$-\frac{epady}{bb}\sqrt{\frac{b^4}{ee}+y^2}$	$=\frac{epady}{bb}\sqrt{\frac{b^4}{ee}+y^2}$
16	ult.	atractriz	acceleratriz
19	3	*AM*	*AR*
20	12	menor	mayor
21	6	sea	es
21	9	*AB* ó *BG*	bórrense
24	20	Esto	Esta
31	24	$\frac{a^2}{24}$ sen $3A$ (VII 47)	$\frac{a^3}{24}$ sen $3A$ (VII 49)
32	13	(42)	(43)
70	5	mucho mas	mucho menos
71	21	$\frac{PD}{TR}\left(=\frac{r}{t^2}\right)$	$\frac{PD}{TR}=\frac{r}{t^2}$
86	12	proporcion	proposicion
107	10	Si de este valor restamos el de	Si este valor lo restamos del de
107	10	el de	de
131	4	pueda	puede
140	ult.	terminadas	determinadas
155	8	$\frac{Rn}{Sn}=\frac{Tn}{Tp.NS}$	$\frac{Rn}{SN}=\frac{TN}{Tp.NS.}$

Pag.	*Linea.*	*Dice.*	*Léase.*
155	ult.	$\frac{Fdt^2}{Tp} = \frac{Fdt^2}{du}$	$\frac{Fdt^2}{Tp} = \frac{Fdu^2}{du}$
157	22	$- \frac{3s.cot.t}{f3}$	$- \frac{3s.cos.t}{f3}$
158	10 y en otras partes	Equinoxios	Equinoccios
161	1	Cs^3	CS^3
177	15	*GH*	*GEH*
180	2	$\frac{6}{15}$	$\frac{4}{15}$
183	5	*A*	♈
184	13	$366\frac{1}{4}$	$365\frac{1}{4}$
190	13	18, 6 (VII. 816)	18, 6 (VII. 815)
190	22	$\frac{acx^3}{2}$	$\frac{acx^2}{2}$
191	9	6, 41 (VII. 46)	6, 28 (VII. 45)
214	17	siguentes	siguientes
224	15	28, 29	28, 19
229	25	Pasqua	la Pasqua
231	20	restan	resten
232	11	11	10
243	3	la	las
286	12	57	57°
298	24	$\frac{2}{3}(1 + \frac{3}{5}\delta) - F$	$\frac{2}{3}c(1 + \frac{3}{5}\delta) - F$
317	2	auxîlian	auxîlien
319	16	Malucas	Molucas
325	22	2. *SH*	2. sen *SH*
347	22	retracciones	refracciones

Pag.

Pag.	*Linea.*	*Dice.*	*Léase.*
362	15	*BC*	*BD*
362	18	$= 60°$	$= 60'$
368	17	á la margen	cítese figura 60
378	22	*BR* y *ST*	*BR*, y *ST* en la figura 66
378	23	á la margen 58	66
378	26	$7° 50' = BQ$	bórrese $= BQ$
401	13	*AEDF*	*AEBF*
405	13	*FGM*	*FMG*
442	17	*PCS*	*PSC*
469	13	ef	cf
475	5	solsticio inverno	solsticio de invierno
490	19	S	s
523	9	lina	linea
526	25	paralelas	las paralelas
531	8	*PI*	*PL*
533	18	á la derecha	á la izquierda
552	25	la luz	la sombra
553	16	diámetros	semidámetros
598	pen.	pueda	puede
601	2	diatónicamenne	diatónica
612	23	á no ser que le distrae	sino le distragera
630	9	añádase	Luego, &c.
653	12	$\frac{5}{16}$	$\frac{15}{16}$

IN-

INDICE

De lo que se contiene en este tomo.

Ele-

De

Del

ELE-

ELEMENTOS
DE ASTRONOMÍA FÍSICA.

1 HAsta aquí nos hemos ceñido á la exposicion de los fenómenos celestes, determinando los tiempos en que se nos han de manifestar, sus variaciones y demás circunstancias que los acompañan. Ahora nos empeñamos en un asunto, si no mas vasto, mucho mas dificultoso por lo menos, que abraza investigaciones de suma elevacion; nos proponemos señalar las causas de todas las apariencias celestes. Esta es sin duda alguna la materia mas sublime de toda la Matemática mixta, donde resplandece la portentosa penetracion del inmortal Newton, cuyos descubrimientos en esta materia propondremos por un término que los haga mas asequibles para el comun de los lectores. Lo que digéremos facilitará la inteligencia de lo que han escrito los mayores Matemáticos de este siglo, con el fin de aclarar los puntos mas arduos de la física celeste.

A su egemplo procuraremos averiguar 1.° las masas de los planetas. 2.° cómo se ajusta su movimiento elíptico á las leyes de la fuerza con que unos obran en otros. 3.° qué desigualdades causa en su movimiento esta misma fuerza. 4.° cómo de ella pende el movimiento de los ápsides. 5.° su influjo en el movimiento de los nudos; y 6.° finalmente cómo quadran sus leyes con el fenómeno de la precesion de los equinoccios. Pero antes de todo se nos ha-

Fig. ce preciso probar la existencia, y las leyes de dicha fuerza conocida de todos con el nombre de *Atraccion* ó *Gravitacion general.*

Tambien es indispensable en esta parte una introduccion en la qual declararemos 1.° algunas proposiciones de cálculo. 2.° otras de Dynámica que nos hacen al caso. 3.° Daremos una espresion analytica de la Anomalía y del radio vector.

Proposiciones de Cálculo.

2 La fórmula (II. 99) para elevar á una potencia qualquiera un binomio, sirve para hallar una espresion del lado de un triángulo rectilineo, del qual se conocen los otros dos lados, y el ángulo que forman.

1. Sea el triángulo RST, cuyo lado conocido $ST = r$, el lado $SR = f$, y el ángulo que forman $RST = t$; se pide el valor del lado $RT = s$, y el valor de $\frac{1}{s^3}$. Suponemos desde luego que $RT = s = \sqrt{(f^2 - 2fr . \cos t + r^2)}$ (VII. 27), $s^3 = (f^2 + r^2 - 2fr . \cos t)^{\frac{3}{2}}$; luego $\frac{1}{s^3} = (f^2 + r^2 - 2fr . \cos t)^{-\frac{3}{2}}$, que hemos de resolver en una infinidad de términos donde no haya mas cantidades que $\cos t$, $2t$, $3t$ &c. Declararemos como esto se egecuta, y supondremos f mucho mayor que r.

Para reducir este trinomio á la fórmula general (II. 99) sea $2fr . \cos t - r^2 = a$, de modo que $\frac{1}{s^3} = (f^2 - a)^{-\frac{3}{2}}$, elevando $f^2 - a$ á la potencia $-\frac{3}{2}$, sacaremos por la regla general $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{3a}{2f^5} + \frac{15a^2}{8f^7} + \frac{35a^3}{16f^9} + \frac{315a^4}{128f^{11}}$ &c. En lu-

lugar de a, a^2, a^3 &c. substituirémos sus valores; 1.° en lugar de a su valor $2fr.\cos t - r^2$; 2.° en lugar de a^2 su igual $4f^2r^2.\cos t^2 - 4fr^3.\cos t + r^4$; pero $\cos t^2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t$ (II. 398); luego $a^2 = 2f^2r^2 + 2f^2r^2.\cos 2t - 4fr^3.\cos t + r^4$. Del mismo modo hallarémos $a^3 = 8f^3r^3.\cos t^3 - 12f^2r^4.\cos t^2 + 6fr^5.\cos t - r^6$, pero $\cos t^3 = \frac{3}{4}.\cos t + \frac{1}{4}\cos 3t$ (II. 398); luego $a^3 = 6f^3r^3.\cos t + 2f^3r^3.\cos 3t - 6f^2r^4 - 6f^2r^4.\cos 2t + 6fr^5.\cos t - r^6$. Tambien sacarémos $a^4 = 16f^4r^4.\cos t^4 - 32f^3r^5.\cos t^3 + 24f^2r^6.\cos t^2 - 8fr^7.\cos t + r^8$; pero $\cos t^4 = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}.\cos 2t + \frac{1}{8}.\cos 4t$ (II. 398); substituyendo este valor, igualmente que los de $\cos t^3$ y $\cos t^2$, sacarémos $a^4 = 6f^4r^4 + 8f^4r^4.\cos 2t + 2f^4r^4.\cos 4t - 24f^3r^5.\cos t$. Omitimos los otros cinco términos que son menores, porque los multiplican potencias mayores de r y potencias menores de f, y suponemos f mucho mayor que r. Despues de substituidos estos valores de a, a^2 &c. en la serie $\frac{1}{f^3} + \frac{3a}{2f^5}$ &c. sale $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{9r^2}{4f^5} + \frac{225r^4}{64f^7} + \left(\frac{3r}{f^4} + \frac{45r^3}{8f^6}\right)\cos t + \left(\frac{15r^2}{4f^5} + \frac{105r^4}{16f^7}\right)\cos 2t + \frac{35r^3}{8f^6}\cos 3t + \frac{315}{64}.\frac{r^4}{f^7}.\cos 4t$.

Los coeficientes como $\frac{9}{4}$, $\frac{225}{64}$ &c. se forman de diferentes quebrados, que se suman ó restan, segun sean sus signos; así, entre los términos $\frac{r^4}{f^7}$ se hallarán los quebrados $\frac{15}{8} - \frac{105}{8} + \frac{6.315}{128}$ que componen $\frac{120}{64} - \frac{840}{64} + \frac{945}{64} = \frac{225}{64}\frac{r^4}{f^7}$. Si se sacasen mas términos de los que llevan $\cos t$, saldrian términos divididos por f^9, que son mucho menores, con tal que sea f cinco ó seis veces mayor que r.

 Pro-

Fig. 3 Propongámonos *resolver la equacion* $x = u + a$. sen mu, *ó hallar el valor de* u *en* x, *en el supuesto de ser* a *un quebrado bastante pequeño, como* $\frac{1}{10}$ *ó* 0,1.

Supongamos para una primera aproximacion que u sea igual con x, una vez que discrepan poco una de otra, siendo muy pequeño el término a. sen mu; este supuesto nos dará un valor de u, y substituyendo este valor de u, en el pequeño término a. sen mu, resultará un error todavía menor en el valor de u, pues no será mas que la décima parte del término pequeño a. sen mu. Por consiguiente con hacer $x = u$, sale $x = u + a$. sen mx, ó $u = x - a$. sen mx, $mu = mx - ma$. sen mx; luego $u = x - a$. sen ($mx - ma$. sen mx). Para simplificar todavía mas este segundo término, substituiremos su valor (I. 655) sen mx. cos (ma. sen mx) — cos mx. sen (ma. sen mx); supondremos tambien el coseno del arco pequeño ma. sen mx igual á la unidad, y el seno igual al mismo arco, porque no discrepa de él sino una cantidad que lleva el cubo del quebrado pequeño a (VII. 47), por manera que si $a = \frac{1}{10}$, será $a^3 = \frac{1}{1000}$, y con esto la diferencia entre este arco y su seno es mil veces menor que el arco; podemos, pues, suponer que el seno es igual al arco mismo, y en lugar de sen(ma. sen mx), podemos substituir el arco ma. sen mx; despues de egecutadas estas dos substituciones, tendremos $u = x - a$. sen mx $+ ma^2$. cos mx. sen mx; luego $u = x - a$. sen mx $+ \frac{ma^2}{2}$. sen $2mx$ (II. 379).

4 Este segundo valor de u en x se acerca todavía mas al

al verdadero, porque no hemos omitido siquiera el término a^2 que es diez veces menor que el término donde está a. Si substituyéramos este valor de u, y del seno de mu, en el segundo término de la equacion dada $x = u + a$. sen mu, sacaríamos una tercera aproximacion, en la qual se hallarian los términos que llevan a^3, ó el cubo del quebrado pequeño a. Fig.

Prueba Mr. Clairaut en su Disertacion sobre la teórica de la Luna, que entonces sacaríamos $u = x - a\left(1 - \frac{m^2 a^2}{8}\right)$ sen $mx + \frac{1}{2} a^2 m$. sen $2mx - \frac{3}{8} a^3 m^2$. sen $3mx$. Allí mismo resuelve la equacion mas complicada $x = u + a$. sen $mu + b$. sen $pu + c$. sen qu, que es necesaria para la teórica de la Luna.

5 Hemos manifestado (III. 355) como si x representa un arco, d cos $x = - dx$. sen x; esto nos proporcionará hallar la diferencial de cos mx. La diferencial de x es dx, la de mx es mdx; en lugar de cos x, tendremos cos mx; por consiguiente en lugar de la espresion $-dx$. sen x, tendremos d cos $mx = - mdx$. sen mx. Si buscáramos la diferencial de $+\frac{a}{m}$. cos mx, sacaríamos $- a$. sen $mxdx$. De aquí inferirémos la siguiente regla general:

Para integrar una fórmula, a. sen $mxdx$, que incluye un seno, se mudarán 1.° los signos, 2.° se pondrá coseno en lugar de seno, 3.° se dividirá la fórmula por mdx, siendo m el múltiplo de x que hay en la fórmula, y la integral será $-\frac{a}{m}$. cos mx; concuerda esta regla con lo dicho (III. 547).

6 Tambien demostrarémos con facilidad que la in-

Fig. tegral de a . cos $mxdx$ será $\frac{a}{m}$. sen mx; porque si se diferencia esta espresion, saldrá $\frac{a}{m}$. cos mx . $mdx = a$. cos $mxdx$, que es la misma cantidad propuesta. Por consiguiente quando ocurra integrar una fórmula que lleva un coseno, se substituirá sin mudar los signos, seno en lugar de coseno, y se dividirá la cantidad por mdx (III. 548).

7 La regla general que hemos dado (III. 329) para sacar la diferencial de un quebrado está diciendo que la diferencial de $\frac{s}{\cos u}$ se compone de la diferencial de s multiplicada por $\frac{1}{\cos u}$ menos la diferencial de cos u, que es (III. 355) $-$sen u . du, multiplicada por s, y dividida por cos u^2, esto es por el quadrado del denominador cos u. Luego la diferencial de $\frac{s}{\cos u}$ es $\frac{ds}{\cos u} + \frac{sdu \text{ sen } u}{\cos u^2}$.

8 Hemos manifestado en el Tomo III, como en el cálculo integral se miran como constantes cantidades variables. Por egemplo, la diferencial de $\frac{dr}{dx}$, suponiendo dx constante, será $\frac{ddr}{dx}$; pero importa advertir que si la espresamos de este modo $\frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx}$, yá no suponemos mas que dx

2. sea constante. Supongamos $An = dx$, $Nn = dr$, de modo que $\frac{dr}{dx}$ sea la secante del ángulo AnN; sea $\frac{dr}{dx} = z$, y tomando $MD = z$, construyamos una nueva curva ODB, en la qual $DF = dx$, $BF = dz$, y $\frac{dz}{dx}$ ó $\frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx}$ será la tangente del ángulo finito FDB. Pero este ángulo finito será el mismo, ora sea dx constante, ora varíe la corta cantidad ddx.

Lue-

Fig.

Luego la espresion $\frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx}$ no supone que dx sea constante, y podemos decir que es la diferencial de $\frac{dr}{dx}$, aun en el caso de ser dx variable.

9 Dimos tiempo ha (II.422) el modo de espresar el valor de un arco por su tangente, ahora diremos como se puede sacar el valor del mismo arco por medio de su seno. En el triángulo BFE, llamaremos 3.
AD, x; BD, y, y será $BE = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$, pero $BD^2 = y^2 = 2x - xx$; luego $dx = \frac{ydy}{1-x}$, $dx^2 = \frac{y^2 dy^2}{(1-x)^2}$, $dx^2 + dy^2 = \frac{(1-x)^2 dy^2 + y^2 dy^2}{(1-x)^2} = \frac{dy^2}{1-y^2}$, luego $\sqrt{(dy^2 + dx^2)} = dy(1-y^2)^{-\frac{1}{2}}$, reduciendo el segundo miembro á serie (II.107) é integrando cada término, sacaremos el arco $AB = y + \frac{1}{2.3}y^3 + \frac{1.3}{2.4.5}y^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}y^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}y^9$, &c.

10 De aquí se sigue que si conociéremos un arco a en segundos, se conocerá su seno $a - \frac{a^3}{6}$; luego la diferencia entre un arco pequeño y su seno es igual á $\frac{a^3}{6}$, ó á la sexta parte del cubo del mismo arco. Pero como el cubo de un quebrado de corto valor es un quebrado que vale mucho menos, se percibe que es lícito despreciar la diferencia que va de un arco pequeño á su seno.

11 Si de la espresion del seno verso de un arco de un minuto, espresado en decimales del radio (VII.48), quisiéramos sacar el seno verso del arco que la luna anda en un segundo de tiempo, tomaríamos para mayor exactitud el movimiento diurno; de su logaritmo, restaríamos

Fig. el de 24 horas convertidas en segundos, y sacaríamos que el logaritmo del arco andado en un segundo es 9,7395852; el duplo de este logaritmo menos el duplo del logaritmo de $1'$ ó $60''$ añadido al logaritmo del seno verso de $1'$ que es 2,6264222, dará el logaritmo del seno verso del arco que la Luna anda en un segundo de tiempo 8,5492901; la característica 8 da á conocer por lo comun que hay dos ceros en el número que se busca; pero en el caso actual hay diez mas, porque se han añadido 10 á fin de poder egecutar la sustraccion de los logaritmos. Si se añade este logaritmo al de la distancia de la Luna en pies que es 9,0729303, siendo su paralaxe debajo del equador de $57'\ 13''$, sale el logaritmo de 0,004190062 que viene á valer como $\frac{1}{239}$ de pie.

12 Por el método que seguimos (VII. 49) hallaríamos que el valor del coseno de a. sen A es $1 - \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}$ cos $2A$.

13 Hemos probado (III. 351) que si el radio de un círculo fuere $= 1$, la diferencial de un arco cuyo seno sea $= x$, será $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, y su integral será el valor del mismo arco. A esta cantidad $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ reduciremos otras muchas, como $\sqrt{(1-xx)}\,dx$, que es la espresion de un segmento de círculo, cuya integral se halla por medio de un arco cuyo seno es x. Con efecto, $\sqrt{(1-xx)}\,dx = \frac{\sqrt{(1-xx)}\,dx + \sqrt{(1-xx)}\,dx}{2} = \frac{\sqrt{(1-xx)}}{2}\,dx + \frac{dx}{2\sqrt{(1-xx)}} - \frac{xxdx}{2\sqrt{(1-xx)}}$; pero $\sqrt{(1-xx)}\,dx - \frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}}$ es la diferencial de $x\sqrt{(1-xx)}$ (III. 334), y $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ es la diferencial

cial de un arco cuyo seno es x (III. 351); luego llamando este arco z, la integral de los tres términos antecedentes ó de $\sqrt{(1-xx)}\,dx$ será $\frac{z}{2}+\frac{x}{2}\sqrt{(1-xx)}$. Fig.

14 La integral de $\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}}$ pende igualmente de la rectificacion del círculo, quiero decir que si tuviéramos la integral de $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$, tendríamos la de $\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}}$; el modo de reducir la una á la otra es el siguiente. Se toma una tercera cantidad qual es $x\sqrt{(1-xx)}$, cuya diferencial incluye la diferencial dada, y la de un arco ó segmento de círculo; despues de diferenciada esta nueva cantidad (III. 334) dará $dx\sqrt{(1-xx)}-\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$; reduciendo á un mismo denominador, saldrá $\frac{dx(1-xx)}{\sqrt{(1-xx)}}-\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}}$, que es igual á la diferencial de $x\sqrt{(1-xx)}$; esta cantidad viene á ser tambien la misma que $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}-\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}}-\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}}$ ó $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}-\frac{2xxdx}{\sqrt{(1-xx)}}$; serán, pues, iguales las integrales, y tendremos $S.\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}-2S.\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}}=x\sqrt{(1-xx)}$; luego $S.\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}}=-\frac{x}{2}\sqrt{(1-xx)}+S.\frac{dx}{2\sqrt{(1-xx)}}$; quiero decir, que la integral que se busca consta de dos cantidades la una de las quales $-\frac{x}{2}\sqrt{(1-xx)}$ es una cantidad algebráica finita, la otra $S.\frac{dx}{2\sqrt{(1-xx)}}$, que solo es dada por la quadratura del círculo (III. 351); es la mitad del arco mismo cuyo seno es x, y si llamamos z este arco, será $\frac{z-x\sqrt{(1-xx)}}{2}$ la integral de $\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$.

15 Por un método parecido á este se halla la integral de $xx\sqrt{(aa-xx)}.dx$, suponiendo conocida la de $dx\sqrt{(aa-xx)}$ (III. 576). Se toma una funcion de x cu-

Fig. cuya diferencial incluya las dos diferenciales propuestas; tal es la cantidad $x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$, ó $x(aa-xx)\sqrt{(aa-xx)}$, ó $aax\sqrt{(aa-xx)}-x^3\sqrt{(aa-xx)}$; se toma su diferencial $aadx\sqrt{(aa-xx)}-\frac{aax^2dx}{\sqrt{(aa-xx)}}-3x^2\sqrt{(aa-xx)}dx-\frac{x^4dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$; los tres últimos términos se reducen á la siguiente espresion.........................

$$\frac{-aax^2dx-3x^2(aa-xx)dx+x^4dx}{\sqrt{(aa-xx)}}=\frac{-aax^2dx-3a^2x^2dx+3x^4dx+x^4dx}{\sqrt{(aa-xx)}}$$
$$=\frac{-4a^2x^2dx+4x^4dx}{\sqrt{(aa-xx)}}=\frac{-4x^2(aa-xx)dx}{\sqrt{(aa-xx)}}=-4xx\sqrt{(aa-xx)}$$

dx; luego la diferencial de $x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$ es $aa\sqrt{(aa-xx)}dx-4xx\sqrt{(aa-xx)}dx$, luego $x(aa-xx)^{\frac{3}{2}}=S.aa.\sqrt{(aa-xx)}dx-S.4x^2\sqrt{(aa-xx)}dx$, y por consiguiente la integral que se busca $S.xx\sqrt{(aa-xx)}dx=\frac{1}{4}aaS.\sqrt{(aa-xx)}dx-\frac{x}{4}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$. Si en la integral hacemos $x=a$, y $S.\sqrt{(aa-xx)}dx=A$, que es el valor de un quadrante de círculo, el término $\frac{x}{4}(aa-xx)^{\frac{3}{2}}$ desaparece, y sale $\frac{aaA}{4}$ que es la integral que se busca.

16 Quando enseñamos como se quadran las curvas (III. 566), encontramos la espresion ydx que es la superficie de un rectángulo elemental, y digimos que para integrarla, habíamos de sacar el valor de y en x por medio de la equacion de la curva, y sustituirle en la espresion ydx. Hay sin embargo muchos cálculos en los quales ocurre hallar $S.ydx$, sin que y sea espresado en x, y sin que sea posible reducir la fórmula á una funcion de x y de dx; entonces se hace preciso calcular muchísimas veces arisméticamente el valor de y. En esta operacion se consideran estos valores

res como las ordenadas de una curva, cuya abscisa es x, y la ordenada y; la superficie de esta curva es $S.y\,dx$, y esta superficie calculada de este modo por operaciones arisméticas, dá con poca diferencia la integral que se busca. Fig.

Supongamos que PM, SN, TV representen tres valores de y, cuyos valores espresados con números sean a, b, c; siendo PS, igualmente que ST igual á 1, la superficie $PMVT$ suponiéndola rectilinea, será $\frac{a+b}{2}+\frac{c+b}{2}$, y si hubiese un número crecido de ordenadas d, e, f &c. los espacios siguientes serían $\frac{d+e}{2}+\frac{e+f}{2}$ &c. Esto supone que los arcos MN, NV sean sensiblemente rectilineos; *pero si la linea* MNV que junta tres ordenadas consecutivas, fuere un arco de curva parabólica determinado por las tres ordenadas, el cálculo será mas exacto; la superficie del segmento $PMVT$ se halla entonces del modo siguiente. 4.

17 Si en una curva parabólica, esto es, cuya equacion general es $y=m+nx+px^2+qx^3+$ &c. hay tres ordenadas a, b, c correspondientes á las abscisas 0, 1, 2, la superficie $PMVT$ será $=\frac{1}{3}a+\frac{4}{3}b+\frac{1}{3}c$. Substituyamos en lugar de m, n, p funciones de a, b, c tales que substituyendo cero en lugar de x, conforme debe suceder en el punto P, tengamos $y=a$, que substituyendo 1 en lugar de x, tengamos $y=b$, conforme sucede en S, y que substituyendo 2 en lugar de x, la equacion se transforme en $y=c$, conforme sucede en el punto T; todas estas condiciones se verifican con suponer

y

Fig. $y = a + (b - a) x + (\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}) x (x - 1)$
4. el elemento de la superficie de la curva, ó el trapecio elemental $PMmp$ será $ydx \doteq adx + (b - a) xdx + (\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}) (xxdx - xdx)$, cuya integral $S. ydx = PMVT = ax + \frac{b-a}{2} x^2 + (\frac{a}{2} - b + \frac{c}{2}) (\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2})$. En esta espresion de la area $PMVT$ se substituirá $PT = 2$ en lugar de x, y se sacará la superficie para el caso de las tres ordenadas, $= \frac{1}{3} a + \frac{4}{3} b + \frac{1}{3} c$.

18 Si hubiera una serie de ordenadas a, b, c, d, e, f, g, k en una curva de mayor estension, se sacaría su area con dividirla en muchos arcos de la misma especie, se sacaría el segmento compreendido entre las ordenadas a y c, $= \frac{1}{3} a + \frac{4}{3} b + \frac{1}{3} c$; el segmento compreendido entre las ordenadas c, d, e, sería $\frac{1}{3} c + \frac{4}{3} d + \frac{1}{3} e$; el segmento compreendido entre las ordenadas e, f, g sería $\frac{1}{3} e + \frac{4}{3} f + \frac{1}{3} g$ &c. Por consiguiente la suma sería igual á un tercio de la primera y de la última, mas $\frac{4}{3}$ de la segunda, de la quarta &c; esto es, de todos los términos pares, mas $\frac{2}{3}$ de la tercera, de la quinta &c. esto es, de todos los números impares.

19 Aunque hemos declarado (III. 564 &c. 595 &c. 619 &c.) métodos para hallar la superficie y la solidez de los sólidos, y la quadratura de las curvas, daremos aquí una aplicacion á un caso particular, buscando la solidez de la tierra suponiéndola engendrada por la revolucion de una elipse al rededor de su ege menor.

2. Sea una elipse $PLQO$, que dá la vuelta al rededor del

del ege CP para engendrar un esferoide aplanado; llámemos QM, x; ML, y; CQ, a; CP, b, tendremos por la propiedad de la elipse (III.93) $y^2 = \frac{bb}{aa}(2ax - xx)$, Fig. 2.
$a^2y^2 = 2ab^2x - b^2xx$; diferenciando, $2a^2ydy = 2ab^2dx - 2b^2xdx$; $dx = \frac{2a^2ydy}{2ab^2 - 2b^2x} = \frac{a^2ydy}{b^2(a-x)}$; $dx^2 = \frac{a^4y^2dy^2}{b^4(a-x)^2} = \frac{a^4y^2dy^2}{b^4(aa - \frac{aa}{bb}y^2)}$ (VII.63) $= \frac{a^2y^2dy^2}{b^4 - b^2y^2}$; luego el arco $Ll = \sqrt{(dx^2 + dy^2)}$ (III.585) $=$ .... $\sqrt{\left(\frac{a^2y^2dy^2 + b^4dy^2 - b^2y^2dy^2}{b^4 - b^2y^2}\right)} = \frac{dy}{b}\sqrt{\left(\frac{a^2y^2 + b^4 - b^2y^2}{b^2 - y^2}\right)}$; y si llamamos e la excentricidad, de modo que tengamos $ee = aa - bb$, tendremos $Ll = \frac{dy}{b}\sqrt{\left(\frac{b^4 + eey^2}{b^2 - y^2}\right)}$. Si llamamos p la circunferencia siendo el radio 1, tendremos para el radio $CM = a - x$ ó $\frac{a}{b}\sqrt{(bb - yy)}$ (VII. 63) la circunferencia $\frac{pa}{b}\sqrt{(bb - yy)}$, y multiplicándola por el elemento de la elipse ó por Ll sacaremos la diferencial de la superficie del esferoide, $= \frac{dy}{b}\frac{pa}{b}\sqrt{(b^4 + eey^2)} - \frac{epady}{bb}\sqrt{\left(\frac{b^4}{ee} + y^2\right)}$ que hemos de integrar. Para esto, convertirémos primero en serie el radical, y saldrá $\sqrt{\left(\frac{b^4}{ee} + y^2\right)} = \frac{b^2}{e} + \frac{ey^2}{2b^2} - \frac{e^3y^4}{8b^6} + \frac{e^5y^6}{16.b^{10}} - \frac{5e^7y^8}{128.b^{14}} + \frac{7e^9y^{10}}{256.b^{18}} - \frac{21e^{11}y^{12}}{1024b^{22}}$, &c. multiplicando por dy é integrando cada término, sacamos $\frac{b^2y}{e} + \frac{ey^3}{6b^2} - \frac{e^3y^5}{40b^6} + \frac{e^5y^7}{112b^{10}} - \frac{5e^7y^9}{1152b^{14}} + \frac{7e^9y^{11}}{2816b^{18}} - \frac{21e^{11}y^{13}}{13312b^{22}}$, &c. Haremos $y = b$ para sacar el valor de la mitad del esferoide, duplicaremos todo, y multiplicaremos por $\frac{epa}{bb}$, y sacaremos $\frac{2epa}{bb}\left(\frac{b^3}{e} + \frac{eb}{6} - \frac{e^3}{40b} + \frac{e^5}{112b^3} - \frac{5e^7}{1152b^5} + \frac{7e^9}{2816b^7} - \frac{21e^{11}}{13312b^9}\right.$ &c.) cuyos primeros términos son $2pab + \frac{pae^2}{3b} - \frac{e^4pa}{20b^3} + \frac{e^6pa}{56b^5}$, &c. Esta será la superficie del esferoide.

La

Fig. 2. 20 La solidez ó volumen del esferoide es igual al producto de los dos tercios del ege mayor por la superficie del meridiano. Haciendo $CM = x$ tendremos $\frac{pa}{b}\sqrt{(bb-yy)}$ para la circunferencia trazada por el movimiento del punto M al rededor del centro C, multiplicando por $\frac{a}{2b}\sqrt{(bb-yy)}$ sacaremos la superficie del círculo trazado por $RL = \frac{pa^2}{2bb}(bb-yy)$; multiplicando por dy é integrando, sacaremos $\frac{pa^2y}{2} - \frac{pa^2y^3}{6bb}$, que es el valor del sólido formado por el segmento $CQLR$. Si hacemos $y = b$, sacaremos $\frac{1}{3}pa^2b$, que duplicaremos para sacar el valor de todo el esferoide $\frac{2}{3}pa^2b$, ó lo que es lo propio, $\frac{pba}{2} \cdot \frac{4}{3}a$. Pero la superficie de la elipse es $\frac{pba}{2}$ (VII.74); si llamamos A esta superficie, sacaremos el esferoide $= \frac{4}{3}aA$.

21 La solidez que hemos sacado $\frac{pba}{2} \cdot \frac{4}{3}a$ ó $\frac{2}{3}pba^2$ sería $\frac{2}{3}pb^2a$, en el caso del esferoide prolongado que la elipse engendra dando la vuelta al rededor de su ege mayor, porque el quadrado de b que es entonces el diámetro que gira, ocupa el lugar de a. En el caso de la esfera donde $b = a$, la solidez $= \frac{2}{3}pa^3$.

22 Supongamos ahora una esfera que por el influjo de una causa estraña se transforma en un elipsoide prolongado, quedándose con la misma cantidad de materia; supongamos el radio de la esfera $= b$, la diferencia de los dos semieges del nuevo elipsoide $= \beta$, y busquemos la razon entre estos dos semieges; sea x la diferencia entre el radio de la esfera, que es igual al esferoide y el semiege menor, será $b - x$ el semiege menor del esferoide,

de, y $b + \beta - x$ el semiege mayor, luego la solidez del esferoide será $\frac{2}{3}p\,(b + \beta - x)\,(b - x)^2$, y despreciando los productos donde están las potencias de las cantidades β y x que son muy pequeñas, dicha solidez $= \frac{2}{3}p(b^3 - 3b^2x + b^2\beta)$ que hemos de igualar con $\frac{2}{3}pb^3$ que es la solidez de la esfera, y saldrá $3b^2x = b^2\beta$; luego $x = \frac{1}{3}\beta$. Fig.

Proposiciones de Dynámica.

23 Hemos manifestado (IV. 68) como un cuerpo solicitado ácia direcciones *AB*, *AC*, que forman una con otra un ángulo *BAC*, por dos potencias que sean entre sí como las lineas *AB*, *AC*, andará la diagonal *AD* del paralelogramo *BACD*, en el mismo tiempo que hubiera andado *AB* ó *AC* obedeciendo el impulso de la una de las dos potencias. Por consiguiente la fuerza cuya espresion es la direccion y longitud de la diagonal *AD*, vale por dos fuerzas *AB*, *AC*, que hubiesen obrado á un tiempo. 5.

La misma linea *AD* es tambien la diagonal del paralelogramo *AbDc*, y la fuerza *AD* resultaría igualmente de las dos fuerzas juntas *Ab*, *Ac*; luego sobre una linea dada *AD*, se pueden formar qualesquiera triángulos *ABD*, *AbD*, de estension y forma arbitraria, y es lícito substituir en lugar de la fuerza *AD* dos fuerzas cuyas espresiones sean los lados de uno de dichos triángulos.

Así la fuerza *AD*, que llamaremos *F*, resuelta en

Fig. *AB* y *AC*, dará dos fuerzas proporcionales á estas dos lineas, y porque *AC* es igual á *BD*, de estas dos fuerzas la una será igual á $F \frac{AB}{AD}$, que obrará en la direccion *AB*, la otra será $F \frac{BD}{AD}$, y obrará en la direccion *AC*, ó paralelamente á *BD*. La fuerza en la direccion *AB* será $F \frac{AB}{AD}$, porque como las lineas *AB*, *AC*, *AD* son proporcionales á las fuerzas que representan, la fuerza en la direccion *AB* es á la fuerza en la direccion *AD*, que es *F*, como la linea *AB* es á la linea *AD*; luego la fuerza en la direccion $AB = F \frac{AB}{AD}$.

6. 24 Si el paralelogramo dado fuese rectángulo en *B*; será *BD* el seno del ángulo *BAD*, siendo *AD* el radio ó la unidad; *AB* será su coseno; luego en este caso la fuerza en la direccion $AB = F.\cos BAD$, y la fuerza en la direccion *AC* ó $BD = F.\,\text{sen}\, BAD$. Estas dos fuerzas *AC*, *AB* equivalen á la fuerza dada *AD*, que se habia de resolver.

25 Una vez que por lo probado (IV. 50) las velocidades de los graves son como las raices quadradas de los espacios andados, esto es, de las alturas desde las quales los graves deben caer para adquirir dichas velocidades; tambien se puede decir que las velocidades son como las raices de las alturas duplas, esto es, de los espacios que serían andados uniformemente con las mismas velocidades adquiridas.

26 Esto mismo se puede aplicar á qualquiera fuerza atractriz constante, esto es, á toda fuerza que obra uni-

uniforme y constantemente, y sin interrupcion; entonces Fig.
los espacios andados son forzosamente como los quadrados de los tiempos. Supondremos, pues, en adelante que si f fuere la fuerza, dt el tiempecillo, y de el espacio que le corresponde, siempre será $fdt^2 = de$. Por consiguiente quando se hubiere de comparar la fuerza de un planeta qualquiera con la fuerza con que la tierra obra en los cuerpos graves, suponiendo que sea f la fuerza aceleratriz de otro planeta, qual sería la luna, de modo que f sea $\frac{1}{70}$ de la fuerza de la tierra á la misma distancia, y dt un número de segundos como $4''$, el espacio que dicha fuerza f haria andar en $4''$ será igual á $fdt^2 = \frac{1}{70} \times 16$ ó $\frac{16}{70}$ de los 15 pies que la tierra hace andar á los cuerpos terrestres (IV. 50). Quando la fuerza no fuere constante y uniforme, el aumento de la velocidad será cada instante en razon compuesta de la fuerza y del tiempo durante el qual obrare, comforme supusimos (VII. 252).

27 De la propiedad que gozan las fuerzas aceleratrices constantes de hacer andar espacios que son como los quadrados de los tiempos, hemos inferido (VII. 646) que las equaciónes seculares han de ser como los quadrados de los tiempos; y se prueba del mismo modo, porque si la fuerza obra siempre igualmente, y ninguna resistencia destruye su efecto, este efecto crecerá como los quadrados de los tiempos.

28 La misma ley siguen los movimientos celestes 7.

Fig. un planeta no se mueve en una órbita sino porque le de-
7. tiene sin discontinuar una fuerza central (IV. 267); por esta razon el desvio de la tangente ó la linea AB que representa el efecto de la fuerza central, y quanto está fuerza aparta el planeta del movimiento rectilineo, es como el quadrado de los tiempos espresados por los arcos pequeños andados (VII. 40).

8. 29 *Hallar lo que dura la oscilacion del péndulo* CN, *en un arco* AN *suponiéndole infinitamente pequeño.*

Consideremos el cuerpo que traza el arco NMA, quando está en el punto M de su caída; tiremos las cuerdas AM, AN; por estar estas cuerdas infinitamente próximas una á otra, su diferencia se podrá tomar por el arco MN, del qual solo discreparía un infinitamente pequeño de tercera orden (VII. 47). Sea $AC = a$, $AQ = b$, $AP = x$, y despues de trazado sobre AQ un semicírculo ARQ, sea el arco $AR = z$. De los triángulos semejantes ANB, ANQ sacamos $AB : AN :: AN : AQ$, ó $AN = \sqrt{2ab}$; de los triángulos semejantes AMB, AMP sacamos $AB : AM :: AM : AP$, ó $AM = \sqrt{(2ax)}$, luego la diferencia de estas dos lineas ó el arco $NM = \sqrt{2ab} - \sqrt{2ax}$. Tomemos la diferencial Mm de este arco MN, á fin de que sea uniforme el movimiento durante el tiempo que el cuerpo anduviere Mm; esta diferencial es (III. 334) $\frac{-2adx}{2\sqrt{2ax}}$ ó $\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{2x}}$, esta es la espresion del corto espacio andado, esto es, de Mm. La velocidad que el cuerpo adquiere desde N hasta M es como la raiz de

la

la altura ó $\sqrt{2}\ (b-x)$ (25); luego el tiempo dt gastado en andar Mm, ó el espacio dividido por la velocidad, será $= \frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{2(b-x)}\sqrt{2x}} = \frac{dx\sqrt{a}}{2\sqrt{(bx-xx)}}$. En un arco AM cuyo radio es $\frac{1}{2}b$, y la abscisa $b-x$, la diferencial del arco (III. 353) es á la del coseno ó á la de AP, como el radio es al seno que es $\sqrt{(bx-xx)}$; luego $dz = \frac{-bdx}{2\sqrt{(bx-xx)}}$, $\frac{2dz}{b} = \frac{-dx}{\sqrt{(bx-xx)}}$; luego dt ó $\frac{dx}{\sqrt{(bx-xx)}}.\frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{2dz}{b}.\frac{\sqrt{a}}{2} = \frac{dz\sqrt{a}}{b}$, cuya integral $t = z\frac{\sqrt{a}}{b} = \frac{\text{arco } AR}{AQ}.\sqrt{AC}$. Si hacemos $AR = 180°$, y c igual á la circunferencia cuyo diámetro es 1, tendremos $\frac{c}{2} = \frac{\text{arco } AR}{AQ}$, y $t = \frac{c}{2}\sqrt{AC}$. El tiempo por $AB = 2a$ es $= \sqrt{4a} = 2\sqrt{a}$, y el tiempo de la oscilacion entera $c\sqrt{AC} = c\sqrt{a}$; luego el tiempo por BA es al de la oscilacion total :: $2\sqrt{a} : c\sqrt{a}$ :: $2 : c$ :: $1 : \frac{c}{2}$. Una vez que los espacios son como los quadrados de los tiempos, un espacio quatro veces menor se anda en la mitad del tiempo; luego las oscilaciones enteras son al tiempo por la mitad del péndulo CA, ó la quarta parte del diámetro BA, como la circunferencia es al diámetro. Fig. 8.

30 Si llamamos p la longitud del péndulo, y c la circunferencia, será $\frac{pc^2}{2}$ el espacio andado en 1''. Porque siendo (29) la circunferencia al diámetro como el tiempo de una oscilacion pequeña ó de un segundo es al tiempo correspondiente al descenso perpendicular por la mitad del péndulo, que será como unas 18 pulgadas, tendremos 355 : 113 :: 60''' : 19'''; pero los espacios andados son (IV. 50) como los quadrados de los tiempos, luego $(19''')^2 : (60''')^2$ :: 18 pulg. : 15 pies :: $(113)^2 : (355)^2$ ó $1 : c^2 :: \frac{p}{2} : \frac{pc^2}{2}$.

 So-

Fig. Solo con añadir el log. constante 8,5349074 al del péndulo en un lugar qualquiera, reducido al temple del vacío y á arcos muy pequeños, y espresado en lineas, se hallará el espacio andado en un 1″ espresado en pies.

Si combinamos con esto lo dicho (IV. 259) y lo probado (IV. 260) sacaremos 1.° que la longitud del péndulo que señala los segundos en el equador es de 36 pulg. 7 lin. 21. 2.° que los graves andan debajo del equador 15,0515 pies en un segundo, y 15,117 en el norte. De donde se sigue que por ser entre sí estos espacios como 230 es á 231, la pesantez debajo del círculo polar es $\frac{1}{230}$ menor que debajo del equador.

31. De lo dicho (IV. 268) y (VII. 40) consta que el seno verso del arco infinitamente pequeño que anda un cuerpo que se mueve en una curva, es la espresion de su fuerza central, y que dicho seno verso es como el
7. quadrado del arco *PB*; luego la fuerza central es como el quadrado de la velocidad, pues el arco es el espacio; quiero decir, que para detener un planeta en la misma órbita, si llegára á ser dupla la velocidad, se necesitaría una fuerza quádrupla.

32 La cantidad *BA* espresa tambien el efecto de la fuerza centrífuga, por ser el espacio que el cuerpo andaría apartándose del centro *S* si tuviera libertad para ello. Pero $BA = PC, = \frac{CB^2}{2CS} = \frac{BP^2}{2PS}$ (VII. 40); luego el movimiento circular produce una fuerza centrífuga que es igual al quadrado de la velocidad, dividido por el diá-

me-

metro del círculo, tomando por unidad la fuerza de proyeccion; luego la fuerza centrífuga, igualmente que la fuerza centrípeta, es como el quadrado de la velocidad. Fig. 7.

33 Para espresar la velocidad de un planeta consideramos un arco infinitamente pequeño, porque es el único que sea andado uniformemente, y es indispensable la uniformidad para la medida del movimiento. Pero como un arco infinitamente pequeño no se curva mas que una cantidad infinitamente pequeña de segunda orden (IV. 246) *AB* ó *BG*, la fuerza central no se puede espresar sino con un infinitamente pequeño de segunda orden.

34 Si consideramos las fuerzas centrífugas de las diferentes partes de una esfera que gira al rededor de su ege, echarémos de ver que son proporcionales á los radios de cada paralelo. Porque entonces la velocidad de cada parte es como el radio del círculo que traza, quiero decir, que *PB* es proporcional á *PS*; luego la fuerza centrífuga es proporcional á $\frac{PS^2}{2PS}$, esto es, á *PS*, que llega á ser la ordenada paralela al ege mayor de la elipse del meridiano, en el supuesto de que sea la tierra aplanada.

35 La fuerza centrífuga en el equador de la tierra es $\frac{1}{287}$ de la pesantez que allí se esperimenta; porque esta pesantez hace andar en 1 segundo de tiempo 15,0515 pies (30); la medida de la fuerza centrífuga es el arco pequeño de la tangente el qual respecto de un arco de 15″ es, segun las tablas, = 0,000000002644249; pero se

Fig. debe aumentar en la razon del quadrado de las horas solares medias y de las horas del primer mobil, y multiplicar por el rádio de la tierra convertido en lineas; se sacarán 7 lineas 5 5 8 1 que caben 2 8 6,7 7 veces en los 1 5 pies, y cerca de 2 8 8 veces en el espacio total que los cuerpos graves andarían debajo del equador, si no fuera por su fuerza centrífuga. Para hacer este cálculo se añade (3 0) el logaritmo de la longitud del péndulo en lineas, al duplo del logaritmo de la circunferencia ó de 0,4 9 7 1 5; se añade el logaritmo del seno verso de un arco de 1 5'' que es 1,4 2 2 3 0 al duplo de la diferencia de los logaritmos de 2 4h y de 2 3h 5 6' 4'' 1, y el del radio de la tierra en lineas 9,4 5 3 7 3; se resta la última suma de la primera, y sale por fin el logaritmo de 2 8 6,7 7.

Así, un cuerpo que llegára á estar libre de la fuerza de gravedad, se escaparía al instante por la tangente, y se apartaría siete lineas de la superficie de la tierra en el primer segundo; y esta tendencia para escaparse que proviene de la rotacion de la tierra disminuye $\frac{1}{288}$ la pesantez que se verificaría en el equador. Síguese de aquí que si los cuerpos graves andan en un segundo 1 5,0 5 1 5 pies, si no fuera por el movimiento de rotacion, andarían 1 5,1 0 4.

En otras latitudes esta fuerza centrífuga mengua en la misma razon que mengua el tamaño de los paralelos, esto es, como el coseno de la latitud quando se la considera en el plano de cada paralelo (3 4); pero mengua

gua como el quadrado del coseno de la latitud, quando se la considera en la direccion del centro de la tierra. Sea *TM* el ege de la tierra; *BG*, el efecto de la fuerza centrífuga debajo del paralelo *BC*; esta fuerza *BG* resuelta en la direccion *BT*, es todavia menor en la razon del seno de *BN* al seno total, ó de *BC* á *BT*, luego es á la fuerza que se verifica debajo del equador, como BC^2 es á BT^2. Fig. 9.

Esta fuerza centrífuga disminuye la de la pesantez, y es causa por lo mismo de ser menor la longitud del péndulo de segundos de lo que sería si fuera la tierra inmobil; por egemplo, se debería añadir una linea $\frac{53}{100}$ á la longitud del péndulo de segundos, observada debajo del equador, para que fuese la que se observaría si la tierra se mantuviera inmobil. En una latitud de 60° donde el paralelo es la mitad no mas del equador, la cantidad que se debe añadir al péndulo observado no es mas que la quarta parte de $1^{\text{lin}}53$ ó $0^{\text{lin}}38$, y si se multiplica $1^{\text{lin}}53$ por el quadrado del coseno de la latitud, se sacará la correccion para otra latitud qualquiera.

36 *La velocidad de proyeccion, como* PA, *necesaria para trazar un círculo* PB, *es en razon inversa de la raiz del radio* SP. 7.

Supongamos que dos planetas *P* y *T* tracen al rededor del sol *S* los círculos *PB*, *TV*, y que *SP* sea quadruplo de *ST*; la velocidad *PE* será la mitad de la velocidad *TV*. Con efecto *PC* será quadrupla de *TR*, porque

Fig. 7. las figuras *PBC*, *TVR* son como los radíos; pero siendo la gravedad en *P* 16 veces menor que en *T*, se ha de tomar *PD* 16 veces menor que *TR*, ó 64 veces menor que *PC*, para hallar el espacio *PE* que el planeta *P* podrá andar, estando detenido por la fuerza central del sol; entónces *PE* será una octava parte de *PB*, una vez que los senos versos son (VII.40) como los quadrados de los arcos; luego *PE* será la mitad de *TV*, en un mismo espacio de tiempo; quiero decir que la velocidad de un planeta ha de ser en razon inversa de la raiz de su distancia, á fin de que la fuerza central, que es en razon inversa del quadrado de la distancia, le pueda detener. Esta es la razon por que Júpiter cuya órbita es cinco veces mayor que la de la tierra, gasta 12 veces mas tiempo en andarla, no siendo su velocidad absoluta la mitad de la de la tierra.

37 Si la velocidad de proyeccion que recibió un planeta primitivamente al salir de su afelio, se halla ser menor de lo que es menester para andar un círculo *PB*, la fuerza central siendo sobrado mayor, habrá vencido, y el planeta se acercará al sol. Esto es la causa por que los planetas al salir de su afelio se acercan al sol. Pero muy en breve demonstraremos que despues de andar 180°, el mismo planeta se debe apartar del sol tanto como se le habia arrimado, porque la fuerza centrífuga llega á ser mayor que la fuerza centrípeta, al paso que el planeta se acerca al sol. Se deduce de lo dicho (VII.685) que la velocidad perihelia está con la velocidad afelia en razon in-

inversa de las distancias; síguese que la fuerza centrífuga crece mas que la fuerza centrípeta; vamos á probarlo. Fig. 7.

38 *La fuerza centrífuga crece en razon inversa del cubo de la distancia, quando la velocidad es en razon inversa de las distancias.*

Supongamos *SP* dupla de *ST*; el arco *PB* será duplo del arco *TV*, la linea *PC* dupla de *TR*, y la fuerza centrífuga en *P* dupla de la fuerza centrífuga en *T*. Pero si la velocidad en *P*, en vez de ser dupla de la velocidad en *T*, no es mas que su mitad, esto es, si *PE* es 4 veces menor que *PB*, el seno verso *PD* será 16 veces menor que *PC*; pues es como el quadrado del arco (VII.40). Luego *PD* será 8 veces menor que *TR*, quiero decir que la fuerza centrífuga está en razon inversa de los cubos de las distancias *SP* y *ST*, que segun hemos supuesto están como 1 á 2.

En general, se echa de ver que $PB : TV :: SP : ST$, por razon de los arcos semejantes; luego si $TV : PE :: SP : ST$ (37), sacaremos multiplicando ordenadamente $PB : PE :: SP^2 : ST^2$; pero $PC : PD :: PB^2 : PE^2$; luego $PC : PD :: SP^4 : ST^4$; pero $PC : TR :: SP : ST$; luego dividiendo ordenadamente, $TR : PD :: SP^3 : ST^3$; esto demuestra en general que el efecto de la fuerza centrífuga es en razon inversa del cubo de la distancia, quando la velocidad es en razon inversa de las distancias. Este es el caso en que se halla un planeta quando se le considera en su afelio y en su perihelio; y esta proporcion nos servirá

muy

Fig. 7. muy en breve para esplicar por qué los planetas se apartan del sol despues de habersele arrimado, sin embargo de ser siempre atrahidos ácia el.

39 El número de segundos que gastaría un cuerpo en dar la vuelta en una órbita de un radio r igual al de la tierra, con una fuerza centrípeta igual á la que egerce la tierra en los cuerpos graves puestos en su superficie, es igual á $2\sqrt{\frac{r}{p}}$, suponiendo p igual á la longitud del péndulo de segundos.

Sea ST, el radio de la tierra; TR, el efecto de la fuerza central en un segundo, ó la cantidad que un cuerpo girando en el círculo TV se arrimaría al centro de la tierra en un segundo en virtud de la atraccion que le detiene en su órbita: TR es tambien igual al espacio que los cuerpos andan en un segundo á impulsos de la gravedad natural $= \frac{pc^2}{2}$ (30); pero RV^2, igual al producto de los dos segmentos del diámetro, $= 2r \cdot \frac{pc^2}{2}$; luego RV ó TV, que es igual con él (porque solo discrepa un infinitamente pequeño de segunda orden) será $c\sqrt{rp}$; este es el valor del arco andado en un segundo. Para hallar el tiempo que corresponde á toda la circunferencia $2rc$, se hará esta proporcion TV ó $c\sqrt{rp}$ es á $1''$, como toda la circunferencia $2rc$ es á un número de segundos, que será $\frac{2r}{\sqrt{rp}}$ ó $2''\sqrt{\frac{r}{p}}$, que es lo que dura la revolucion.

40 Si la fuerza de proyeccion que solicita los planetas y les hace andar órbitas, se aniquilára quando están

tán en sus distancias medias al sol, la fuerza central los precipitaría ácia el sol; Mercurio llegaría en 15^d y 13^h; Venus en $39^d\ 17^h$; la Tierra en $64^d\ 10^h$; Marte en 121^d; Júpiter en 290^d; Saturno en 767^d; el cometa mas distante que se ha observado, en 66 mil dias; la Luna caería en la tierra en $4^d\ 20^h$; los Satélites de Júpiter caerían en su planéta en 7^h, 15^h, 30^h, 71^h, y los de Saturno en 8^h, 12^h, 19^h, 68^h, 336^h respectivamente; una piedra llegaría al centro de la tierra si tuviera libre el paso en $21'\ 9''$. La regla que se practica para hacer estos cálculos consiste en decir 2828 es á 1000, esto es, la raiz quadrada del cubo de 2 es á 1, como la mitad del tiempo que dura la revolucion de un planeta, es al tiempo de su caída hasta el centro de la atraccion. Fig.

Espresiones analýticas de la Anomalía verdadera, y del Radio vector.

41 Sea el semiege $CA = 1$, el radio vector $SM = r$, la anomalía verdadera $ASM = u$, la anomalía media $= z$, la excentricidad $CS = c$, el ángulo $MSm = du$; el pequeño sector elíptico MSm será $= \frac{rrdu}{2}$, porque el arco pequeño que mide el ángulo du es rdu (VII. 44). Sea p la circunferencia del radio $CA = 1$, y $\frac{p}{2}$ su superficie, será $\frac{p}{2}\sqrt{(1 - cc)}$ la superficie de la elipse (VII. 74); $\frac{dz}{2}$ es la superficie del sector circular que representa la anomalía media en el círculo (VII. 687), así como $\frac{rrdu}{2}$ es la del 10.

sec-

Fig. sector elíptico. Tendremos, pues, esta proporcion $\frac{rrdu}{2} : \frac{dz}{2} ::$ $\frac{p}{2}\sqrt{(1-cc)} : \frac{p}{2}$, luego $dz = \frac{rrdu}{\sqrt{(1-cc)}}$; este es el elemento de la anomalía media, y la integral dará al instante la anomalía media, por medio de la anomalía verdadera.

42 El radio vector $r = \frac{1-cc}{1-c.\cos u}$ (VII. 85), luego $rrdu = (1-cc)^2 (1-c.\cos u)^{-2} du$, $dz = \frac{rrdu}{\sqrt{(1-cc)}}$ $= (1-cc)^{\frac{3}{2}} (1-c.\cos u)^{-2} du$. Por consiguiente para sacar el valor de la anomalía media z, es preciso sacar primero el de $(1-c.\cos u)^{-2}$ por la fórmula (II. 99), y este será tambien el valor de $\frac{rr}{(1-cc)^2}$; tendremos, pues, $1 + 2c.\cos u + 3c^2.\cos u^2 + 4c^3.\cos u^3 + 5c^4.\cos u^4$, omitiendo las potencias mas altas que c^4. En lugar de $\cos u^2$ substituiremos su valor $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2u$ (II. 398), en lugar de $\cos u^3$ su valor, y en lugar de $\cos u^4$ su valor, y sacaremos el valor de $(1-c.\cos u)^{-2}$ ó de $\frac{rr}{(1-cc)^2}$. Pondremos aquí dicho valor multiplicado por du, esto es, $\frac{rrdu}{(1-cc)^2} = \left(1 + \frac{3}{2}c^2 + \frac{15}{8}c^4\right)du + \left(2c + 3c^3\right)$ $\cos udu + \left(\frac{3}{2}c^2 + \frac{5}{2}c^4\right)\cos 2udu + c^3.\cos 3udu + \frac{5}{8}c^4.$ $\cos 4udu$, cuya integral (6) será el valor de $S.\frac{rrdu}{(1-cc)^2}$ $= \left(1 + \frac{3}{2}c^2 + \frac{15}{8}c^4\right)u + \left(2c + 3c^3\right)\text{sen } u + \left(\frac{3}{4}c^2 + \frac{5}{4}c^4\right)\text{sen } 2u + \frac{1}{3}c^3 \text{ sen } 3u + \frac{5}{32}c^4 \text{ sen } 4u$; pero la anomalía media no es $S.\frac{rrdu}{(1-cc)^2}$, es lo $S.\frac{rrdu}{(1-cc)^{\frac{1}{2}}}$. Luego para sacar el valor de la anomalía media, hemos de multiplicar $S.\frac{rrdu}{(1-cc)^2}$ por $(1-cc)^{\frac{3}{2}}$, ó dividir cada uno de los términos de su valor por $1 + \frac{3}{2}cc + \frac{15}{8}c^4$ &c. $= (1-cc)^{-\frac{3}{2}}$ (II. 110). Con esto quedará u despejada, y tendremos

S.

Fig.

$S. \frac{rrdx}{(1-cc)^{\frac{1}{2}}} = z = u + 2c \,.\, \text{sen}\, u + \left(\frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{8}c^4\right) \text{sen}\, 2u$ $+ \frac{1}{3}c^3\, \text{sen}\, 3u + \frac{5}{32}c^4\, \text{sen}\, 4u$ &c. Al tiempo de dividir cada término hemos despreciado las c^5, por ser de ningun momento. Con esto hemos sacado la espresion de la anomalía media por medio de la anomalía verdadera. Esta serie daría la resolucion de la cuestion que dejamos (VII.692) resuelta; pero hemos buscado esta espresion para sacar la de la anomalía verdadera, ó de la cantidad u.

43 *Dada la anomalía media, hallar la espresion analýtica de la anomalía verdadera.*

Hemos dado poco ha el valor de z espresado en u, si por el método inverso de las series (II.296 &c.) sacamos el valor de u en z, sacaremos la anomalía verdadera. Con la mira de conseguirlo por aproximacion, supondremos un valor indeterminado de u en z, tal que $u = z - 2mc \,.\, \text{sen}\, z + nc^2 \,.\, \text{sen}\, 2z + pc^3 \,.\, \text{sen}\, 3z + qc^4 \,.\, \text{sen}\, 4z$; de cuya cantidad sacaremos los valores de sen u, sen $2u$ &c. para substituirlos en la serie $u + 2c \,.$ sen u &c. y tendremos otra serie para el valor de z, en la qual igualaremos con m todos los términos que multiplicaren $2c \,.$ sen z; y lo propio se practicará con los demás coeficientes indeterminados n, p, q.

Para hacerse cargo de este método de las indeterminadas, se debe considerar que como $z = u + 2c \,.$ sen u, tendremos $u = z - 2c \,.$ sen u; pero si en lugar de sen u quisiésemos que llevára sen z el segundo término, conforme nos hace al caso, necesitaríamos en lugar de $-2c$ de otro coefi-

Fig. ficiente, al qual llamaremos $-2cm$ mientras le determinamos. Para determinar el valor de esta indeterminada m, haremos $u = z - 2cm . \text{sen}\, z$, de donde sacaremos el valor de sen u que substituiremos en la equacion $\mu = z - 2c . \text{sen}\, u$, y sacaremos una equacion, en la qual en lugar de sen u, tendremos sen z con un coeficiente que ocupa el lugar de aquel que llamamos antes $2cm$, y con el qual es igual por lo supuesto; luego con igualarlos uno con otro hallaremos el valor de m en c; lo propio sucederá con los demás coeficientes indeterminados, conforme lo hará patente el cálculo.

44 Como el valor de u se compone de z, y $2mc . \text{sen}\, z + nc^2 . \text{sen}\, 2z$ &c. tendremos sen $u = \text{sen}\, z . \cos(2mc . \text{sen}\, z - nc^2 . \text{sen}^* 2z$ &c.) $- \cos z\, \text{sen}\, (2mc . \text{sen}\, z - nc^2 . \text{sen}\, 2z$ &c.) (I. 655). Hemos de calcular separadamente estas dos partes de sen u.

Para sacar la primera parte sen $z . \cos(2mc . \text{sen}\, z - nc^2 . \text{sen}\, 2z)$, la daremos esta forma (I. 656) sen $z\, [\cos(2mc . \text{sen}\, z) \cos(nc^2\, \text{sen}\, 2z) + \text{sen}\, (2mc . \text{sen}\, z)\, \text{sen}(nc^2 . \text{sen}\, 2z)]$. Pero en las aproximaciones como esta se supone que el coseno de un arco chico como $nc^2 . \text{sen}\, 2z$, es igual al radio ó $= 1$, y que el seno de un arco chico, como $nc^2 . \text{sen}\, 2z$ es igual con el arco mismo; luego la espresion antecedente se convertirá en sen $z\, [\cos(2mc . \text{sen}\, z) + 2mc . \text{sen}\, z . nc^2 . \text{sen}\, 2z]$. Pero $\cos(2mc . \text{sen}\, z) = 1 - m^2c^2 + m^2c^2 . \cos 2z$ (12); esta es una de las dos cantidades que habremos de multiplicar por sen z. La otra cantidad es $2mc . \text{sen}\, z . nc^2 . \text{sen}\, 2z =$ (II. 378) $mnc^3 . \cos z - mnc^3$.

mnc^3. cos $3z$; luego sen z. cos ($2mc$. sen z &c.) $=$ ($1 -$ m^2c^2) sen $z + m^2c^2$. sen z. cos $2z + mnc^3$ sen z. cos $z -$ mnc^3. sen z. cos $3z$. Pero m^2c^2. sen z. cos $2z = \frac{1}{2}m^2c^2$. sen $3z - \frac{1}{2}m^2c^2$. sen z (II. 378); igualmente mnc^3. sen z. cos $z = \frac{1}{2}mnc^3$. sen $2z$; y $- mnc^3$. sen z. cos $3z = -$ $\frac{1}{2}mnc^3$. sen $4z + \frac{1}{2}mnc^3$. sen $2z$. Luego la primera parte del valor de sen u, ó sen z[cos ($2mc$. sen z — &c.)] será ($1 - m^2c^2$) sen $z + \frac{1}{2}m^2c^2$. sen $3z - \frac{1}{2}m^2c^2$. sen z + $\frac{1}{2}mnc^3$. sen $2z - \frac{1}{2}mnc^3$ sen $4z + \frac{1}{2}mnc^3$ sen $2z =$ ($1 - \frac{3}{2}m^2c^2$) sen $z + mnc^3$. sen $2z + \frac{1}{2}m^2c^2$. sen $3z -$ $\frac{1}{2}mnc^3$. sen $4z$.

45 Hemos de hallar ahora el valor de la segunda parte de seno u, esto es, — cos z. sen ($2mc$. sen $z - nc^2$. sen $2z - pc^3$. sen $3z$). Consideremos primero sen ($2mc$. sen $z - nc^2$. sen $2z - pc^3$. sen $3z$), en el supuesto de que el coseno de los dos últimos términos sea igual á la unidad, y que el seno sea igual con los términos mismos, esta espresion (igual al seno de $2mc$. sen z por el coseno de los otros dos términos, menos el coseno de $2mc$. sen z, por el seno de los otros dos) será $=$ sen ($2mc$. sen z) $- nc^2$. sen $2z$ $- pc^3$. sen $3z$; esta es la cantidad que habremos de multiplicar por cos z, y restar despues de la primera parte.

Pero como en general sen (a. sen A) $= (a - \frac{1}{8}a^3)$ sen $A + \frac{a^3}{24}$. sen $3A$ (VII. 47), la cantidad precedente será sen ($2mc - m^3c^3$) sen $z + (\frac{1}{3}m^3c^3 - pc^3)$ sen $3z -$ nc^2. sen $2z$. Multiplicaremos por cos z, y sacaremos la segunda parte de sen $u =$ cos z ($2mc - m^3c^3$) sen $z - nc^2$.

sen

Fig. sen $2z$. cos z + $(\frac{1}{3}m^3c^3 - pc^3)$ sen $3z$. cos z; ó resolviendo estos productos de senos (II. 378 y 379), $-\frac{1}{2}nc^2$. sen z + $(mc - \frac{1}{3}m^3c^3 - \frac{1}{2}pc^3)$ sen $2z - \frac{1}{2}nc^2$. sen $3z$ + $(\frac{1}{6}m^3c^3 - \frac{1}{2}pc^3)$ sen $4z$. Juntando estas dos partes del valor de sen u, de las quales la segunda es negativa, sacaremos sen $u = (1 - \frac{3}{2}m^2c^2 + \frac{1}{2}nc^2)$ sen $z - (mc - \frac{1}{3}m^3c^3 - mnc^3 - \frac{1}{2}pc^3)$ sen $2z + (\frac{1}{2}m^2c^2 + \frac{1}{2}nc^2)$ sen $3z$ $- (\frac{1}{2}mnc^3 + \frac{1}{6}m^3c^3 - \frac{1}{2}pc^3)$ sen $4z$. Multiplicando esta cantidad por $2c$, saldrá el segundo término $2c$. sen u de la serie $z = u + 2c$. sen u &c. (41), que hemos de espresar en z.

46 Vengamos á sen $2u$ que dará el segundo término. Hemos supuesto $u = z - 2mc$. sen z &c. (42); y así $2u = 2z - 4mc$. sen $z + 2nc^2$. sen $2z$; luego sen $2u$ (I. 655) = sen $2z$. cos $(4mc$. sen $z)$ − cos $2z$ $(4mc$. sen $z - 2nc^2$. sen $2z)$; pero cos$(4mc$. sen$z)$ (12) $= 1 - 4m^2c^2 + 4m^2c^2$. cos $2z$; luego sen $2z$. cos $(4mc$. sen $z) = (1 - 4m^2c^2)$ sen $2z + 2m^2c^2$. sen $4z$; esta es la primera parte de sen $2u$.

La segunda parte del valor de sen $2u$ es = cos $2z(4mc$. sen $z - 2nc^2$. sen $2z) = 4mc$. sen z. cos $2z - 2nc^2$. sen $2z$. cos $2z = 2mc$. sen $3z + 2mc$. sen $z - nc^2$. sen $4z$ (II. 378 y 379). Juntando las dos partes de sen $2u$, y mudando los signos de la segunda, se sacará sen $2u = + 2mc$. sen z + $(1 - 4m^2c^2)$ sen $2z - 2mc$. sen $3z + (2m^2c^2 + nc^2)$ sen $4z$. Esta cantidad multiplicada por $\frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{8}c^4$, dará el segundo término de la serie (41). Para sacar el tercer término-

mino de esta serie, esto es, $\frac{1}{3}c^3$. sen $3u$, atenderemos á que el valor indeterminado de u dá $3u = 3z - 6mc$. sen z; luego sen $3u =$ sen$(3z - 6mc$. sen $z) =$ sen $3z - 6mc$. sen z. cos $3z$ (I. 655), tomando $6mc$. sen z por su seno, y suponiendo su coseno $= 1$. Pero $6mc$. sen z. cos $3z =$ $3mc$. sen $4z + 3mc$. sen $2z$ (II. 378); luego sen $3u =$ sen $3z - 3mc$. sen $4z + 3mc$. sen $2z$. Y este valor se multiplicará por $\frac{1}{3}c^3$ para sacar el tercer término de la serie (42). Fig.

47. La anomalía media $z = u + 2c$. sen u &c. (42); luego $u = z - 2c$. sen $u - (\frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{8}c^4)$ sen $2u - \frac{1}{3}c^3$. sen $3u - \frac{5}{32}c^4$. sen $4u$; en lugar de sèn u, sen $2u$ &c. hemos de substituir sus valores hallados poco ha, y con tomar los términos que llevan sen z no mas, tendremos la siguiente equacion $u = z - 2c\,(1 - \frac{3}{2}m^2c^2 + \frac{1}{2}nc^2 + \frac{3}{4}c^2 . 2mc)$ sen z; la suma de todos estos coeficientes ha de ser igual con $2mc$, puesto que $u = z - 2mc$. sen z &c. por lo supuesto. Por consiguiente si igualamos el coeficiente indeterminado $- 2mc$, con el que hemos hallado, tendremos $m = 1 - \frac{3}{2}m^2c^2 + \frac{1}{2}nc^2$; en lugar de m podremos tomar la unidad para substituirla en los términos donde estuviere c^2, porque en los términos siguientes estaría c^4, que despreciamos.

48 Consideremos ahora los términos donde está sen $2z$, para hallar el tercer término de la serie indeterminada que es el valor de u, es á saber, nc^2. sen $2z$. La primera parte viene de sen u, y habremos de multiplicar —

Fig. $(mc - \frac{1}{3}m^3c^3 - mnc^3 - \frac{1}{2}pc^3)$ por $2c$. La segunda parte viene de sen $2u$, y es $(\frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{8}c^4)$ $(1 - 4m^2c^2)$, (c^4 se desprecia). La tercera parte viene de sen $3u$, en el qual se halla $3mc$. sen $2z$, que hemos de multiplicar por $\frac{1}{3}c^3$ (46.).

Juntando, pues, estas tres partes que multiplican sen $2z$, saldrá la cantidad que ha de ser igual con el tercer término nc^2. sen $2z$ (43); luego $n = 2m - \frac{3}{4} - \frac{2}{3}m^3c^2 - 2mnc^2 - pc^2 - \frac{1}{8}c^2 + 3m^2c^2 - mc^2$, y haciendo $m = 1$ en los términos que llevan c^2, saldrá $n = 2m - \frac{3}{4} + (\frac{29}{24} - 2n - p)c^2$.

Juntaremos igualmente en los valores de sen u, sen $2u$, sen $3u$, todos los términos que llevaren sen $3z$; los de sen u los multiplicaremos por $2c$, y así de los demás; como la suma ha de ser igual al quarto término pc^3. sen $3z$ del valor supuesto de u, tendremos $pc^3 = 2c(\frac{1}{2}m^2c^2 + \frac{1}{2}nc^2) - 2mc(\frac{3}{4}c^2 + \frac{1}{8}c^4) + \frac{1}{3}c^3$. De donde se sigue que el valor de p, mudando los signos, porque en la espresion de u todos los términos son negativos (47), y omitiendo $-\frac{1}{4}mc^2$, será $p = -m^2 - n + \frac{3}{2} - \frac{1}{3}$.

Los términos que llevan sen $4z$, tomándolos en los valores de sen u, sen $2u$, sen $3u$, y multiplicados cada uno por su coeficiente, se han de igualar con qc^4, de donde resultará $+qc^4 = +c^4(-mn - \frac{1}{3}m^3 + p + \frac{3}{2}m^2 + \frac{3}{4}n - m)$, y de aquí se sacará facilmente el valor de q. Este es el último de los quatro coeficientes m, n, p, q que hemos de determinar. Declaremos ahora cómo se han de sacar sus

va-

valores por medio de las quatro equaciones en que están Fig.
mezclados estos coeficientes.

49 Por decontado tenemos $m = 1 - \frac{3}{2}m^2c^2 + \frac{1}{2}nc^2$ (47); en lugar de n substituiremos $2m - \frac{3}{4}$, despreciando los términos ulteriores, y 1 en lugar de m, en los términos que llevan c^2, de lo qual sacaremos $m = 1 - \frac{1}{8}c^2$. Despues buscaremos el valor de $p = -m^2 - n + \frac{3}{2}m - \frac{1}{3}$, y haciendo $m = 1$, $n = \frac{5}{4}$, sacaremos $p = -\frac{13}{12}$. Asimismo $n = \frac{5}{4} + \left(\frac{29}{24} - 2n - p\right)c^2 = \frac{5}{4} + \left(-\frac{31}{24} - p\right)c^2$, en cuya espresion se podría poner en lugar de p su valor $-\frac{13}{12}$.

Finalmente, sacaríamos el valor de q, con substituír en su valor hallado antes, $m = 1$, $n = \frac{5}{4}$, y $p = \frac{13}{12}$; pero como solo proseguimos la aproximacion hasta c^3, hemos sacado $u = z - \left(2c - \frac{1}{4}c^3\right)$ sen $z + \left(\frac{5}{4}c^2\right)$ sen $2z - \frac{13}{12}c^3$. sen $3z$. Esto manifiesta que el término principal de la equacion es $2c$. sen z, esto es, el duplo de la excentricidad multiplicado por el seno de la anomalía media. Si en lugar de $2c$ substituyéramos la misma equacion máxima, sacaríamos la equacion en otro punto qualquiera, igual con e. sen z, despreciando por muy pequeños los demás términos. Con efecto, para calcular el valor de $2c$. sen z, sería preciso convertir en segundos el duplo de la excentricidad ó $2c$ (VII. 694), y esta sería con corta diferencia la equacion maxima.

50 Por el mismo camino que hallamos el valor de u (43 y sig.), hallaríamos el del radio vector; nos con-

Fig. tentaremos con poner aquí el que ha sacado Mr. Jeaurat, $r = 1 + \frac{1}{2}c^2 + (c - \frac{3}{8}c^3 + \frac{5}{192}c^5 - \frac{6}{9216}c^7) \cos z + (- \frac{1}{2}c^2 + \frac{1}{3}c^4 - \frac{1}{16}c^6 + \frac{1}{180}c^8) \cos 2z + (\frac{3}{8}c^3 - \frac{45}{128}c^5 + \frac{567}{5120}c^7) \cos 3z + (- \frac{1}{3}c^4 + \frac{2}{5}c^6 - \frac{8}{45}c^8) \cos 4z + (\frac{125}{384}c^5 - \frac{4375}{9216}c^7) \cos 5z + (- \frac{27}{80}c^6 + \frac{81}{140}c^8) \cos 6z + \frac{16807}{46080}c^7 \cos 7z - \frac{128}{315}c^8 \cos 8z.$

DE

Fig.

DE LA ATRACCION
Ó
GRAVITACION GENERAL DE LOS CUERPOS.

51 SI los cuerpos celestes se movieran en un espacio lleno de algun fluido, estaría aniquilado dias ha su movimiento. Es, pues, preciso hagan sus revoluciones en un espacio vacío; y como entonces no se pueden atribuir sus movimientos al impulso de alguna causa ó agente, pues ninguno hay en el vacuo, han acudido los Filósofos modernos á una *Tendencia*, *Atraccion* ó *Gravitacion* general de unos cuerpos ácia otros, cuya atraccion suple por una causa impelente. Pero esta palabra *atraccion* causó mucha novedad en los principios; los mas de los Físicos y Matemáticos creyeron que era una de aquellas calidades ocultas tan sonadas en la Filósofia Escolástica, con las quales hicieron los Peripatéticos mas ininteligibles todavia las operaciones de la naturaleza. Hombres grandes tomaron á su cargo purgar la atraccion de esta sospecha, y hacer patente su maravillosa conformidad con los fenómenos naturales.

52 Graduar la atraccion de calidad oculta es ignorar qué cosa es la atraccion y el destino de las calidades ocultas. Estas eran, segun los Escolásticos, las causas de los efectos en cuya esplicacion se empeñaban; pero la atraccion no se mira como la causa de la pesantez de los

Fig. cuerpos, sino como un hecho, como un fenómeno, que quiza es obra de algun fluido sutilísimo. La consideramos como un hecho primitivo y fundamental para esplicar los demas que tienen de él alguna dependencia. Todo efecto que va acompañado de alguna regularidad, bien que sea desconocida su causa, puede ser asunto de especulaciones Matemáticas, porque todo lo que sufre aumento ó diminucion, sea la que fuere su naturaleza, es del distrito de la Geometría; y las aplicaciones que de dicho efecto se hicieren, serán tan seguras como las que se hicieren de objetos, cuya naturaleza estuviere averiguada. Si solo estos hubieran de servir de egercicio á nuestra meditacion, sería sumamente limitado el número de nuestros conocimientos.

No porque Galileo ignorase la causa de la gravedad de los cuerpos terrestres, ha dejado de darnos acerca de la misma gravedad una Teórica muy fundada, y razon de los fenómenos que son obra suya. Si los cuerpos gravitan unos en otros, tambien podremos indagar los efectos de esta pesantez recíproca, bien que sea para nosotros su origen un misterio. Lo mas que se nos podrá pedir es que nos dediquemos á averiguar si los cuerpos tienen con efecto esta tendencia unos ácia otros; pero si hallamos que la tienen con efecto, se nos deberá consentir que de ella saquemos la esplicacion de los fenómenos naturales, dejando para Filósofos mas afortunados ó mas sublimes la gloria de señalar su verdadera causa.

Es-

Esta licencia nos parece tanto menos estraña quanto tenemos por imposible alcanzar las primeras causas, ni cómo los cuerpos obran unos en otros. Pero como algunos de los que rebaten la atraccion la miran como una monstruosidad, como una ley que es imposible se compadezca con la naturaleza de los cuerpos, empezaremos probando su posibilidad. Fig.

Posibilidad de la Atraccion.

53 Si tuviéramos una idea cabal de los cuerpos, supiéramos qué cosa son en sí, y qué cosa son respecto de ellos sus propiedades, cómo y en qué número los acompañan, podríamos decidir si la atraccion es una propiedad de la materia. Pero no tenemos, ni con mucho, un conocimiento tan cabal de los cuerpos; conocemos algunas de sus propiedades no mas, pero el sugeto en el qual residen no le conocemos.

Echamos de ver algunos agregados diferentes de estas propiedades; y con esto nos basta para formar concepto de estos ó aquellos cuerpos particulares; damos un paso mas, y distinguimos como diferentes gerarquias entre las mismas propiedades. Reparamos que al paso que algunas varían en diferentes cuerpos, otras permanecen en ellos sin la menor alteracion; de donde inferimos que estas son primordiales y como el fundamento de las demas.

54 Por poco que se medite en este punto se echa de ver que la estension es una de las propiedades invariables.

Fig. bles. Hallámosla tan universal en los cuerpos, que nos inclinamos á creer que las demas propiedades no pueden subsistir sin ella, y que esta las sirve de basa.

55 Hallamos tambien que no hay ningun cuerpo que no sea sólido é impenetrable; miramos por lo mismo la impenetrabilidad como una propiedad esencial de la materia. Pero no sabemos si hay entre estas propiedades alguna conexion necesaria; no sabemos si la estension puede subsistir sin la impenetrabilidad; no sabemos, al considerar la estension, qué otras propiedades la deben acompañar.

56 Despues de las mencionadas propiedades de los cuerpos, hallamos otras que, bien que no residan siempre en todos los cuerpos, los acompañan no obstante siempre que están en un estado determinado; por egemplo, los cuerpos en movimiento tienen la propiedad de mover á los demas con quienes tropiezan. Esta propiedad, bien que menos universal que las espresadas antes, pues solo reside en la materia quando se halla en cierto estado, se puede considerar en algun modo como una propiedad general respecto de dicho estado, una vez que reside en todos los cuerpos que están en movimiento. Pero no sabemos si es necesario el agregado de estas propiedades, ó si se reducen á estas no mas todas las propiedades de la materia.

57 Confesamos que sería estraño darles á los cuerpos otras propiedades que las que manifiesta la esperien-

cia;

cia; pero sería igualmente estraña la pretension del que Fig. despues de conocer bien ó mal unas pocas propiedades de la materia decidiese magistralmente que no tiene otras; como si no pudiera residir en los cuerpos mas de lo que cabe en los cortos límites de nuestra compreension.

58 No podemos negarles á los cuerpos sino aquellas propiedades que repugnan con las que en ellos conocemos; una vez que la mobilidad reside en la materia, podemos afirmar que no reside en ella la inmobilidad; una vez que la materia es impenetrable, no es penetrable. Estas son las únicas propiedades que podemos escluir. Pero ¿quién sabe si los cuerpos ademas de las propiedades que en ellos conocemos, tienen tambien la de gravitar unos ácia otros? sola la esperiencia puede resolver esta cuestion, y dentro de poco se lo preguntaremos.

59 No estrañaremos se nos diga que la propiedad de los cuerpos de gravitar unos ácia otros se concibe menos que las mencionadas, que todos conocen. El modo con que las propiedades residen en el sugeto es un misterio para nosotros. El vulgo no se admira de ver que un cuerpo en movimiento le comunique á otros; como está hecho á ver este fenómeno, nada halla en él de particular. Pero un Filósofo prudente jamás se arrojará á decidir *à priori* qué propiedades puede haber en los cuerpos, y quales son las que no les pueden convenir, ni asegurar que la fuerza impulsiva sea mas facil de concebir que la fuerza attractiva ¿Qué cosa es al cabo esa fuerza impulsi-

Fig. siva? ¿Cómo reside en los cuerpos? ¿Quién podia adivinar que la tuviesen los cuerpos antes de verlos chocar unos con otros? La misma dificultad hay para alcanzar cómo residen en la materia las demas propiedades, ó cómo estas y la impenetrabilidad se han unido con la estension.

60 Se nos podrá decir que supuesta la impenetrabilidad de los cuerpos, admitida de los Filósofos, un cuerpo que se mueve ácia otro no puede proseguir su movimiento sin penetrarle; y como los cuerpos son impenetrables, es preciso que Dios ponga una ley que concilie el movimiento del uno con la impenetrabilidad de ambos; resulta de aquí que es indispensable una ley nueva para el caso del choque. Pero estando dos cuerpos distantes uno de otro, no parece indispensable el poner una nueva ley.

Dos respuestas daremos á este argumento, el mas especioso que se ha propuesto hasta ahora contra la posibilidad de la atraccion.

1.° Lo mas que resultará de la impenetrabilidad de los cuerpos será el establecimiento de una nueva ley en el caso del choque, pero no se sigue que fuese forzosa la ley del movimiento comunicado; podía muy bien el cuerpo chocante perder ó comunicar su movimiento al tropezar con un cuerpo en reposo; tampoco era mas necesaria la ley en virtud de la qual un cuerpo debe permanecer en su estado quanto es posible, y esta ley una vez puesta habia de compreender al cuerpo en reposo igualmente

te que al que se mueve. Hay, pues, en el caso del choque dos cosas contrarias que conciliar, pero con disponer que se reflectiese el cuerpo chocante se hubieran conciliado igualmente que con poner la ley de la comunicacion del movimiento. Es, pues, puramente arbitraria la ley del choque, y Dios no tuvo mas motivo para ponerla que los efectos cuya causa ocasional quiso constituirla. Todo esto sentado, se queda la atraccion de igual condicion que la impulsion. Quando Dios hubo criado dos partículas de materia, pudo determinarse á darlas ó no darlas una tendencia mutua de unas ácia otras, segun los efectos que se propuso obrar su omnipotencia. Fig.

61 No es ningun absurdo pensar que prefiriese la atraccion por tener esta mas enlace que la impulsion con la esencia de la materia. Con efecto, supone la estension una multitud de partes contiguas unas á otras, y unidas entre sí; la estension es un todo, un continuo; la proximidad de sus partes no basta sola á formarla; se necesita á mas de esta proximidad una causa de union, una union efectiva: ¿y qué principio de union y unidad puede haber entre partes distintas, mas eficaz y natural que su atraccion recíproca? Luego esta fuerza es uno de los elementos de la materia, y esencial á la estension.

No ignoramos que algunos Filósofos señalan por causa de la continuidad de la estension, la compresion de un fluido ambiente. Pero esta es una peticion de principio, porque preguntaremos qual es la causa de la union

de

Fig. de las partes de dicho fluido que sin duda alguna también será estenso. Parece, pues, natural que Dios las diese á las partes de la estension la tendencia mutua de que vamos hablando, una vez que fue su voluntad formase la estension un todo continuo.

62 2.° Hemos de tener presente (53) que no todas las propiedades de los cuerpos son de una misma clase; las hay, conforme digimos arriba, que pertenecen á la materia en general, porque la acompañan constantemente, tales son la estension, y la impenetrabilidad. Haylas de una clase menos transcendental, que no son mas que estados en los quales la materia puede hallarse ó no hallarse, tales son el reposo y el movimiento. Haylas finalmente mas particulares todavía, con las quales los cuerpos se distinguen unos de otros, tales son la figura, el color &c.

Si acaso hay oposicion entre algunas propiedades de distinta clase, cuya oposicion no puede verificarse entre las propiedades primordiales, la propiedad inferior deberá ceder á la superior que no admite variedad alguna.

Veamos, pues, qué es lo que pasa quando un cuerpo se mueve ácia otro cuya impenetrabilidad se opone al movimiento del primero. La impenetrabilidad subsistirá inalterable, pero el movimiento que es un accidente del cuerpo, y puede variar de una infinidad de modos, se compondrá con la impenetrabilidad; porque un cuerpo se puede mover ó dejar de mover, se puede mover de un

mo-

modo ó de otro, pero siempre se debe quedar impenetrable é impenetrable del mismo modo. Sucederá, pues, en el movimiento del cuerpo algun fenómeno que será efecto de la diferencia de gerarquía entre las dos propiedades. Pero si la gravitacion fuere una propiedad de primera orden, si fuere esencial á la materia é independiente de las demas propiedades, sería escusado ponerla, porque no debería su existencia á la combinacion de otras propiedades anteriores. Fig.

63 En todo lo dicho hasta aquí no hemos llevado otra mira, segun ofrecimos, que la de probar que la atraccion considerada como propiedad inherente á la materia, no es imposible; si repugnára con su esencia, ningun fenómeno de la naturaleza bastaría para hacernosla admitir. Pero si no implica contradiccion, se puede indagar si los fenómenos la manifiestan ó la contradicen. Puesta la cuestion en estos términos, queda reducida á un punto de hecho; se ha de buscar en el sistema del universo si es la atraccion un principio que se verifique realmente en la naturaleza, y hasta qué punto se necesita para esplicar sus fenómenos; ó si se la introduce inutilmente para dar razon de hechos, en los quales no tiene el menor influjo.

Necesidad de la Atraccion.

64 Si es preciso haya un vacuo, y un vacuo casi perfecto, tambien será preciso haya atraccion; porque si

Fig. los espacios celestes no oponen resistencia alguna al movimiento de los cuerpos que en ellos se mueven, conforme se indicia de los fenómenos, serán dichos espacios incapaces de accion, y por consiguiente ningun impulso influirá en el movimiento de los astros. Luego quedará probada la necesidad de la atraccion, si conseguimos demostrar la existencia del vacuo. Antes que lo intentemos sentaremos dos proposiciones que nos vienen al caso.

65 *Las diferencias de las ordenadas á la asýmtota de una hypérbola son como los quadrados de las mismas ordenadas*; quiero decir, que si tomamos AK, KL, LM &c.

11\. iguales é infinitamente pequeñas, las diferencias de las ordenadas AB, KD, LE serán como $(AB)^2$ á $(KD)^2$ &c.

Porque $AB : KD :: CK : CA$ (III. 170) y $AB - KD : KD :: CK - CA : CA$, y $AB - KD : CK - CA = AK :: KD : CA :: AB \times KD : AB \times CA$; pero $AB \times CA$ es (III. 171) una cantidad constante del mismo modo que AK por construccion; luego $AB - KD$ es proporcional á $AB \times KD$, y por consiguiente á $AB \times AB$ ó $(AB)^2$, por causa de la infinita proximidad á que AB está de KD. Del mismo modo probaríamos que $KD - LE$, $LE - MG$ son como $(KD)^2$, $(LE)^2$ &c.

12\. 66 Hemos probado (III. 599) que *el paraboloide que engendra la parábola* AHD *girando al rededor de su ege* AB *es la mitad del cilindro circunscripto engendrado por la revolucion del rectángulo* ABDE *al rededor del lado* AB.

Es-

67 Esto presupuesto, consta (V.645) que la resistencia originada de la inercia del fluido en el qual se mueve el cuerpo es proporcional á un tiempo al quadrado de las velocidades residuas, y á las diferencias ó decrementos de las mismas velocidades, siendo iguales los tiempos; luego en esta resistencia los quadrados de las velocidades son como las diferencias de las simples velocidades, y por lo mismo las velocidades del mobil al principio de cada uno de los tiempos iguales *AK*, *KL*, *LM* &c. se pueden espresar por las ordenadas correspondientes *AB*, *KD*, *LE* &c, y los espacios andados en virtud de estas velocidades en los mismos tiempos *AK*, *KL*, *LM* &c. serán espresados por los trapecios hyperbólicos *AD*, *KE*, *LG* &c. Fig. 11.

68 *En el tiempo que un mobil perdería toda su velocidad, si la primera resistencia que esperimenta fuese constante, no perderá sino la mitad quando la resistencia siguiere la proporcion de los quadrados de las velocidades residuas.*

Si suponemos que sea *AB* la velocidad primitiva del mobil, y constante la resistencia que el mobil esperimenta en aquel instante, estaría evidentemente aniquilada al cabo del tiempo *AN* toda su velocidad; porque la velocidad aniquilada al cabo del tiempo infinitamente pequeño *AK* sería $AB - KD = Be$, la velocidad perdida en el segundo instante *KL* sería $Dg = Be$, la velocidad perdida en el tercer instante sería $fb = Be$, y así prosiguiendo. 13.

Fig. do. Pero *AB* es igual á todas las diferencias *Be*, *Dg*, *fb* &c. continuadas hasta *N*; luego la velocidad primitiva *AB* quedaría totalmente aniquilada al cabo del tiempo *AN*, si la primera resistencia fuese constante.

Pero esto no se verifica quando la resistencia sigue la proporcion de los quadrados de las velocidades residuas; al cabo del tiempo *AN* la velocidad es todavía igual con *NH* (67). Luego si conociéremos la razon entre *NH* y *AB* , conoceremos quanta velocidad pierde el mobil en el tiempo que la hubiera perdido toda entera, si la primera resistencia se hubiese mantenido constante. Pero $NH = \frac{1}{2} AB$, porque (III. 170) $AB : NH :: CN : CA$, y $CA = \frac{1}{2} CN$; (III. 177); luego $BN : NF :: AN : CN$; y por ser $BN = \frac{1}{2} NF$ (III. 177), tambien será $NA = \frac{1}{2} CN$, y por lo mismo $NH = \frac{1}{2} AB$. Esto quiere decir que por causa de la fuerza de inercia del fluido el mobil no pierde mas que la mitad de la velocidad que perdería en el mismo tiempo si se mantuviera sin diminucion la primera resistencia.

69 Despues de lo dicho (sig. y 67) se puede *determinar sin acudir á esperimento ninguno la resistencia originada de la inercia de un medio, y probar que la que sufre un prisma recto moviéndose en una direccion paralela á su base, es igual al peso de una columna de fluido, cuya base fuese la misma que la del prisma, y la altura la misma desde la qual debería caer en el vacuo un cuerpo para adquirir la velocidad actual del prisma.*

Sea

Sea *AB* la superficie contra la qual obra el fluido; Fig.
tómese en la base *TV* del vaso *RSTV* la *CD* = *AB*, y 14.
hágase la altura *CE* del vaso, tal que la presion de la columna *CDFE* en la base *CD* sea igual á la impresion del fluido en la superficie *AB*. Una vez que los efectos son como sus causas, y la presion en *CD* es igual á la accion en *AB*, síguese que si se aniquiláran de repente los obstáculos *CD*, *AB*, la velocidad del fluido que saldría por *CD*, sería igual con la velocidad de la corriente que iba á chocar con *AB*. Pero la velocidad del fluido que sale por *CD*, es la que un cuerpo adquiriría (V. 136) al caer desde la altura *FD*; luego la fuerza que aguantaba la superficie *AB*, y por consiguiente la resistencia que padecerá moviéndose con la misma velocidad en el fluido en reposo, será igual al peso de una columna de dicho fluido cuya base fuese *AB*, y la altura la misma desde la qual debería caer un cuerpo en el vacuo para adquirir la velocidad del prisma ó de la superficie *AB*. Luego

70 1.° *Si un cilindro se moviere en un fluido tan denso como él, y fuere el ege del cilindro igual á la altura* CE *de la columna, la resistencia que dicho cilindro esperimentare al principio de su movimiento, será igual con su peso.*

71 2.° *Y si esta resistencia inicial permaneciera constante, el cilindro perderia toda su velocidad en el tiempo que andaría en el fluido un trecho igual á lo que coge de largo su ege.*

 Por-

Fig. Porque como la resistencia inicial que el mobil esperimenta, es en este caso igual con su peso (70), aniquilará toda la velocidad del mobil en el mismo tiempo que la aniquilaría la causa de la pesantez, si el mobil se moviera ácia arriba en el vacuo. Pero una vez que la velocidad inicial del cilindro es igual á la que adquiriría (70) cayendo en el vacuo desde una altura igual á su ege, es patente que el mismo cilindro perdería toda su velocidad subiendo en el vacuo una altura igual á su ege; luego perdería tambien toda su velocidad en el tiempo que andaría en el fluido un trecho igual á su ege, si la resistencia que esperimenta al principio, se mantuviese constante.

72 3.° Pero como la resistencia que proviene de la inercia no se mantiene constante, pues hemos visto (V. 645) que sigue la proporcion de los quadrados de las velocidades residuas; síguese (68) que el cilindro de que vamos hablando no perderá mas que la mitad de su velocidad en el tiempo que anduviere la longitud de su ege. En todo esto prescindimos de la resistencia que puede causar la adherencia de las partes del fluido, por razon de la qual sería todavia mayor el menoscabo.

73 4.° La demostracion subsistirá aunque supongamos el ege del cilindro menor que la altura de la columna *CE*. Porque siendo su ege menor que el ege del cilindro antecedente, su movimiento, siendo una misma la velocidad, será menor á proporcion; luego se aniquilará tanto

mas

mas pronto si suponemos que los menoscabos absolutos sean iguales por ambas partes en tiempos iguales. Pero la resistencia inicial es una misma en ambos cilindros, una vez que empiezen su movimiento con igual velocidad; luego si esta primera resistencia se mantuviera constante, los menoscabos absolutos serán unos mismos á cada instante, y el cilindro menor perderá toda su velocidad en tanto menos tiempo, quanto menor fuere su ege. De donde se infiere que (68) por variar las resistencias como los quadrados de las velocidades residuas, perderá la mitad de su velocidad, en un tiempo proporcional á su ege, esto es, despues de andar su longitud. Fig.

74 5.° *Luego*, en general, *un cilindro que se mueve en un fluido tan denso como él, perderá la mitad de su velocidad, sea el que fuere su ege, en el tiempo que anduviere su longitud.*

Porque andando un trecho igual á su ege, echará de su lugar un volumen de materia igual al suyo, esto es, una masa igual á la suya, pues son iguales las densidades. Pero hemos probado (IV. 212 y sig.) que un cuerpo no puede mover una masa igual á la suya, sin comunicarle la mitad de su movimiento; luego &c.

75 *En un medio raro compuesto de partículas iguales, puestas á iguales distancias unas de otras, la resistencia de una esfera es, siendo una misma la velocidad, la mitad de la que esperimentaría un cilindro de igual diámetro, ó circunscripto á la esfera.*

Fig. 15. Si $AC = bE$ representa la resistencia del fluido contra la partícula b del cilindro $NOGQ$, y hacemos $BL = AC$, tambien podrá espresar BL la resistencia ó la reaccion del fluido contra el punto b. Pero por razon de la oblicuidad del punto B de la esfera, el movimiento que el punto B comunicare al fluido no será BL como en el cilindro, será (IV.73) $BN = LD$, y el movimiento BD con el qual se queda la esfera despues del choque, cuyo efecto es encaminar el punto B ácia D, se resolverá en virtud de la resistencia del punto R tomado del otro lado á igual distancia de AC, en los dos movimientos BM y MD, de los quales no le quedará al punto B mas que BM, pues á MD le destruye un movimiento igual del punto R. De donde resulta que LM espresará la pérdida que padece el punto B de la esfera, siendo así que LB espresará la de la parte correspondiente del cilindro. Pero (I.521) $LM : LB :: (LD)^2 : (LB)^2$, y por razon de los triángulos semejantes BEC, BDL, tendremos $(LD)^2 : (LB)^2 :: (BE)^2 : (BC)^2$, y por consiguiente $(BE)^2$ espresará la resistencia que padeciere el punto B de la esfera, y $(BC)^2$ la que padeciere el punto b del cilindro.

Ahora bien, si en la $bE = AC$ tomamos bH igual con $\frac{(BE)^2}{BC}$, tendremos $bH = \frac{(BE)^2}{BC} : bE = BC :: (BE)^2 : (BC)^2$, y por lo mismo la resistencia ó reaccion del fluido contra el punto B es á la que opone al punto b del cilindro, como bH es á bE; luego el sólido formado por la revo-

Plane.52

2
P R L l C M m Q A n N F O D B

3
B F E C D A

4
P M p m S N T V

B 6 D C

P A D E C B 7 T V R S

B 8 C Q N P R D M p m A

10
M m S C A

11
B D E G H C A K L M N

3
B D E G H g h i A K L M N

14
R E F S T C D V A B

volucion de la curva *NCO* que termina todas las lineas *bH*, es al sólido formado por la revolucion del rectángulo *NOPK* que forman todas las lineas *bE*, como la suma de las resistencias que esperimentan todos los puntos *B* de la esfera *KAP* es á la resistencia que esperimenta la base total del cilindro *GNOQ*. Pero el primer sólido es un paraboloide, cuyo vértice es *C*, el ege *AC*, y el parámetro *CA*; porque como $bH = \frac{(BE)^2}{BC}$, sacamos $bH \times BC = (BE)^2 = (BC)^2 - (CE)^2 = (KC)^2 - (CE)^2$ por ser $BC = KC$; pero $bH = bE - EH = KC - EH$, luego $bH \times CB$ ó su igual $(KC)^2 - (CE)^2 = KC - EH \times KC = (KC)^2 - KC \times EH$; de donde se sigue que $KC \times EH = (CE)^2$. Pero si por el punto *H* tiramos una ordenada perpendicular á *CA*, será igual con *EC*, y la abscisa igual con *EH*, y por consiguiente el rectángulo cuyos lados fueren esta abscisa y la linea constante *KC* ó *CA* es igual al quadrado de la ordenada, de donde se sigue que la curva *NCO* es una parábola, y el primer sólido un paraboloide. Luego ya que el segundo sólido es un cilindro circunscripto á dicho paraboloide, la resistencia que esperimenta la semiesfera (66) es la mitad de la que padece la base del cilindro circunscripto. Fig. 15.

76 Resulta de aquí que *una esfera que se mueve en un medio cuyas partes están separadas por intervalos iguales, perderá la mitad de su velocidad en el tiempo que anduviere los $\frac{4}{3}$ de su diámetro.*

Porque si el movimiento inicial de la esfera fuese igual con el del cilindro, la esfera que esperimenta una resis-

 ten-

Fig. tencia la mitad menor que la que padece el cilindro, andaría dos veces su diámetro antes de perder la mitad de su velocidad. Pero el movimiento de la esfera, siendo una misma la velocidad, no es mas que los $\frac{2}{3}$ del movimiento del cilindro; faltarán, pues, $\frac{2}{3}$ para que ande dos veces su diámetro antes de perder la mitad de su velocidad; luego la habrá perdido quando hubiere andado un espacio igual á los $\frac{4}{3}$ de su ege.

77 *Pero si el medio fuese continuo, y se moviera la esfera en un pleno perfecto, esperimentará la misma resistencia que un cilindro de igual diámetro, y movido con la misma velocidad.*

Es mucha la diferencia que va de la hypótesi de un medio raro á la hypótesi de un medio continuo; en el primer caso bien que la superficie de la semiesfera es dupla de la base del cilindro, no tropieza con mayor parte del fluido que el cilindro; está entonces el fluido dividido en columnas puestas igualmente, é igualmente distantes unas de otras; no es, pues, mayor el número de las que tocan la superficie de la semiesfera, que el de las que tocan la base del cilindro de igual diámetro; de donde se infiere que las diferentes partes de la superficie esférica moviéndose oblicuamente respecto del fluido, le dan con menos fuerza que el cilindro, y con esto la esfera entera esperimentá una resistencia la mitad menor.

Pero en el caso de un medio continuo y enteramente lleno, la superficie de la semiesfera choca con dos ve-

ces mas partes que la base del cilindro, por cuyo motivo pierde en el fluido dos veces mas fuerza que el cilindro. Luego como pierde la mitad menos por razon de la oblicuidad (75), queda todo igual, y es una misma la resistencia respecto de ambos cuerpos. Fig.

78 Ya que en esta hypótesi la esfera esperimenta la misma resistencia que el cilindro, se viene á los ojos que si con la misma velocidad tuviera tanto movimiento como el cilindro, no perdería la mitad de su velocidad hasta andar la longitud de su ege. Luego ya que con la misma velocidad, tiene una tercera parte menos de movimiento que el cilindro, faltará un tercio para que ande un espacio igual á su diámetro antes de perder la mitad de su velocidad.

79 Síguese de aquí que *el ayre en que vivimos, los espacios donde se mueven los cuerpos celestes, no son ni con mucho un pleno perfecto, conforme lo sostienen los partidarios de la impulsion.*

Porque 1.° si todo está lleno, los cuerpos sólidos se mueven en un medio tan denso como ellos mismos; perdería, pues, un cilindro la mitad de su velocidad en el tiempo que andaría la longitud de su ege, y una bala de artillería no podría andar un espacio duplo de su diámetro sin perder la mitad de su velocidad (74 y 78). Pero mucho falta para que sea tanta su pérdida; una bala de artillería anda un espacio mil veces mayor que su diámetro antes de padecer un menoscabo sensible en su veloci-

Fig. dad; es preciso por lo mismo sea muy raro el medio donde se mueve, y que la densidad del ayre sea sin comparacion mucho menor que la del hierro, que es por sí tan poroso.

Pero si el fluido que nos circunda es tan raro cerca de la tierra ¿quánto mas lo será en los espacios celestes? Como la densidad del ayre es (V. 69) proporcional á la causa que le comprime, se sigue que á la altura de 24, 32 ó 40 millas de Inglaterra, es respectivamente 64, 256 ó 1024 veces mas raro que en la superficie de nuestro globo; y que á la altura de 80, 160, ó 240 millas es como 1000000, 1000000000000, 1000000000000000000 veces mas raro; por consiguiente la Luna y los planetas se mueven en un vacuo casi perfecto. Si no fuera por esta gran rareza de la materia celeste, no sería posible se moviesen los planetas en los espacios donde vemos que hacen sus revoluciones.

2.° La esperiencia confirma las pruebas que acabamos de dar del vacuo; Newton observó constantemente que por mas heterogeneas que fuesen dos esferas movidas con igual velocidad, siempre esperimentaban resistencias en razon duplicada de sus diámetros, cuya observacion confirma la existencia del vacuo. Porque si hubiera un fluido sutil tan denso como le suponen los Filósofos con quien las habemos aquí, resistiría no solo á la superficie esterior de los cuerpos, mas tambien á sus partes internas; por consiguiente la resistencia total no seguiría

ría la razon de los quadrados de los diámetros, particu- Fig.
larmente en los cuerpos heterogeneos y de contextura diferente.

Los esperimentos hechos con la máquina pneumática confirman tambien nuestra proposicion. Así que se saca el ayre de la campana, todos los cuerpos indistintamente caen con la misma velocidad, una paja cae tan aprisa como el cuerpo mas duro y compacto. Si despues que obra la bomba quedára en la máquina una materia tan densa como antes, los cuerpos no se vendrían todos á bajo con la misma velocidad; los que tienen mas volumen esperimentarían como antes mayor resistencia, y bajarían por consiguiente con menos velocidad que los cuerpos mas sólidos.

80 Movidos de la fuerza de estas razones, han apelado los partidarios del pleno perfecto á varios recursos para rebatirlas, pero la variedad de sus respuestas ha hecho mas patente todavia el flaco de su opinion. Unos han acudido al reflujo del fluido por detras del mobil; han dicho que el fluido impelido del mobil debe, por estar todo lleno, pasarse al espacio que el mobil deja detras de sí, y restituirle con esto el movimiento que antes le quitó. Pero este reflujo no se puede hacer sino con la velocidad que el mobil ha comunicado al fluido, cuya velocidad es cabalmente igual con la que le queda al mobil; luego no puede el fluido hacer con ella en el mobil impresion alguna, ni restituirle la velocidad que antes le quitó.

Otros

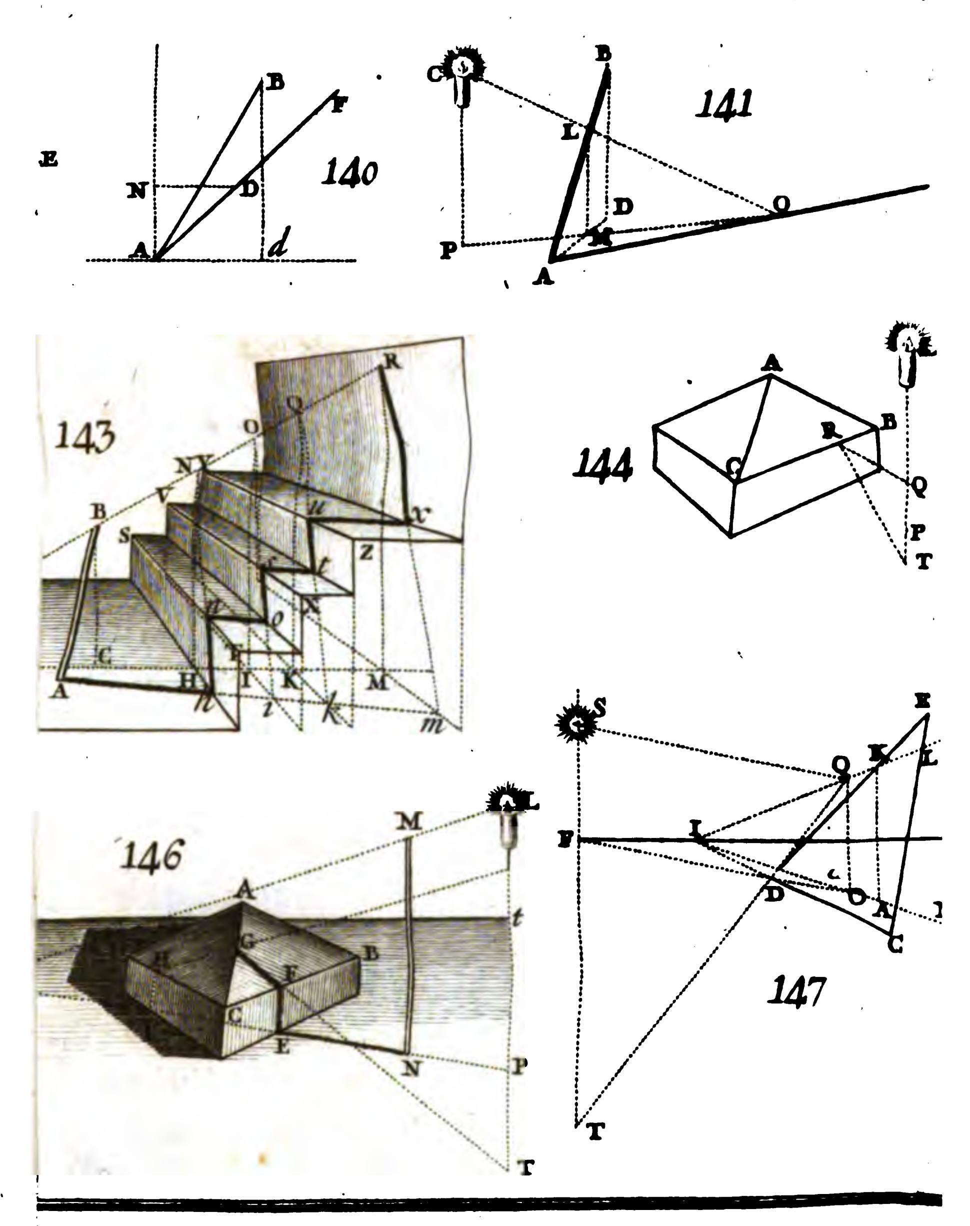
Fig. 81 Otros han supuesto un fluido dividido al infinito, y se han figurado que con dar á sus partes un movimiento ácia qualesquiera direcciones, sería menor su resistencia. Si el medio, decian estos Filósofos, es infinitamente fluido, nada le costará al mobil dividirle, está ya todo dividido; tampoco le costará el moverle, pues está, digamoslo así, todo empapado de movimiento.

Confesamos que con dividir el fluido al infinito se aumentaría su fluidez, pero no se disminuiría su inercia, ni por consiguiente la resistencia que nace de esta fuerza, cuya resistencia no puede menguar á no ser que mengüe la masa ó la densidad del medio. Por otra parte, el movimiento del fluido ácia qualesquiera direcciones, dado caso que fuese posible, tampoco puede minorar su resistencia, antes la ocasionaría mayor; las partes que se moviesen en la misma direccion del mobil, no podrian hacer en él toda la impresion que sería menester para el intento, siendo así que obrarían plenamente en el mobil para contrarrestarle las partes que se moviesen en una direccion contraria á la suya.

82 No se adelantará mas con suponer infinita la porosidad de los cuerpos.

Supongamos, por egemplo, una esfera de materia comun, tan comprimida que no haya poro alguno entre sus partes; es patente que no pudiendo introducirse el fluido en la esfera, esta perderá la mitad de su velocidad en el tiempo que anduviere su diámetro. Supongamos ahora que

la


140
141
143
144
146
147

la esfera vuelva á su primer estado, su diámetro crecerá Fig. mucho, y la superficie que compondrán sus partes sólidas, será la misma que tenia en el estado de perfecta solidez; luego chocará con tantas partes como antes, y perderá en tiempo igual la misma velocidad; quiero decir, que aun sin atender á la oblicuidad de sus poros, con la qual crece su superficie y por lo mismo la resistencia, habrá perdido la mitad de su velocidad despues de andar un espacio igual á los dos tercios del diámetro que tenia en el estado de compresion.

83 Hecho cargo de estas dificultades, buscó Leibnitz por otro camino un modo de sostener el pleno perfecto. Pensó que la mucha resistencia del agua, del mercurio y de los demas fluidos que conocemos, proviene de su pesantez; quanto menos pesados son, menos resisten conforme enseña la esperiencia; un fluido que pesára poco ó nada no opondría resistencia ninguna. Luego, concluía Leibnitz, con suponer destituido de toda pesantez el fluido que es causa de la pesantez, y en el qual se mueven los cuerpos pesados, se quitan todos los inconvenientes que del pleno perfecto podrían resultar.

Pero de aquí se seguirá que un cilindro sin pesantez perdería la mitad de su velocidad si subiese ayre arriba á una altura igual con su ege. Si le damos pesantez, esperimentará una nueva resistencia, y perderá todavia mas presto la mitad de su movimiento. Luego es falso que un mobil pesado no pierde mas que una cantidad infinita-

men-

Fig. mente pequeña de su movimiento, en el tiempo que anda su diámetro en un medio destituido de pesantez. Si los medios que mas pesan son los que mas resisten, es porque en un volumen dado contienen mas materia; luego la resistencia proviene de la densidad y no de la pesantez.

84 Hasta aquí hemos probado que sin el vacuo el movimiento no puede subsistir, ahora probaremos que ni aun principio puede tener en un medio perfectamente lleno. Imaginemos el espacio *ABCD* todo lleno de cubos
16. como *E*, de una estension finita; será imposible que ninguno de ellos se mueva, désele la velocidad y direccion que se quisiere. Porque si se impele al cubo *E* ácia el punto *B* en la direccion de la diagonal *CB*, no se podrá mover sin apartar lateralmente los cubos inmediatos *n*, *p* &c. ¿Y como los podrá apartar, una vez que no pueden caminar ni ácia *A* ni ácia *B*? La misma dificultad subsistirá aun quando se supongan infinitamente pequeños los cubos propuestos.

Pruebas de la Atraccion.

85 *Solo con admitir la atraccion general se puede esplicar la gravedad de los cuerpos.*

Convienen todos los Filósofos en que la pesantez de los cuerpos es proporcional á su masa, ó densidad; porque como la gravedad es una fuerza, es, como todas las demas, igual al producto de la masa por la velocidad (IV. 23); y como los esperimentos hechos en la máquina pneumática manifies-

fiestan que todos los cuerpos tienen una misma velocidad aceleratriz, síguese que la pesantez es como la masa ó densidad. Esto mismo prueba que la gravedad no es efecto del impulso de algun fluido; pues si lo fuera, la gravedad sería como el número y la fuerza de las partículas del fluido que la causarían; pero este número sería proporcional no á la masa del cuerpo pesado, sí á su superficie, y quanto mayor fuese su superficie, siendo la que fuere su figura, tanto mayor sería el número de las partes que obrarían en él. En una palabra, si la pesantez fuera efecto de la impulsion, sería igual á la accion del fluido que la causaría; pero convienen los mismos partidarios de la impulsion en que los fluidos obran en razon de la superficie de los cuerpos con que tropiezan; luego la pesantez, dado caso que proviniese de la impulsion, seguiría la proporcion de las superficies, y una masa determinada ó de oro ó de plomo pesaría mas despues de dividida en partecillas, que antes de su division; cuya consecuencia repugna con lo que se está observando todos los dias. Fig.

86 El fluido al qual se quisiese atribuir la caída de los cuerpos ácia el centro de la tierra, no podría, en instantes iguales, aumentar igualmente su velocidad; porque como en el segundo instante el mobil huye yá, el segundo impulso sería mas debil que el primero, y menguando siempre la velocidad respectiva del fluido, las impresiones de la pesantez irían tambien menguando mas y mas. Esto no se puede componer con la aceleracion uniforme

de

Fig. de los cuerpos pesados, que todos los esperimentos hechos hasta el dia de hoy en el asunto dejan plenamente confirmada.

87 Todavía es mas dificultoso determinar de qué modo obra dicho fluido para causar la pesantez. Descartes supone para esplicar este fenómeno, un torvellino de materia fluida que circula con suma rapidez al rededor de la tierra en la direccion del equador; mediante esta revolucion todas las partes de dicho fluido adquieren una fuerza centrífuga, que se dirige á apartarlas del centro del círculo que trazan, y si tropiezan con algun cuerpo que no tenga fuerza centrífuga, ó tenga menos que ellas, tendrá dicho cuerpo que ceder á su impulso de ellas hasta llegar al centro del torvellino.

88 Pero hay contra esta esplicacion dificultades de mucha gravedad. 1.° si la pesantez fuese efecto de un torvellino que se mueve paralelamente al equador, los cuerpos no se encaminarían al centro de la tierra, y deberían caer perpendicularmente al ege; porque siendo en este sistéma la caida de los graves efecto de la fuerza centrífuga de la materia del torvellino, y obrando esta fuerza para apartar dicha materia del centro de cada círculo que traza, debería echar en cada lugar los cuerpos ácia el centro de dicho círculo.

17. A esto responden los Cartesianos que la fuerza centrífuga de la materia que circula en el círculo cuyo radio es *GB* solo tiene su direccion en el radio *GB* quando

do este círculo está solo y aislado; pero que quando él mismo círculo y la materia que en él circula son parte de un torvellino esférico, el radio *GB* y por consiguiente la fuerza centrífuga del punto *B* es oblicua á la tangente *BR*, y por lo mismo se resuelve en una fuerza central *CB* perpendicular á *BR*, y mediante esta resolucion de la fuerza centrífuga, los cuerpos no son impelidos ácia *G*, sino ácia *C* que es el centro de la tierra ó del torvellino *MAD*. Fig. 17.

Pero si la fuerza centrífuga se resuelve en la fuerza central *CB*, tambien se resuelve en la fuerza tangencial *BR*; y si en virtud de la sola fuerza *CB* los cuerpos graves fuesen impelidos ácia el centro *C* de la esfera, es patente que en virtud de la fuerza tangencial *BR* que obra al mismo tiempo en el mobil, será otra vez impelido ácia *G* como antes de la resolucion. Todo esto tiene apoyo en la esperiencia; porque si *MAD* representa un vaso lleno de un licor pesado, podremos decir como los Cartesianos que la pesantez de la columna *GB* obra en el vaso en la direccion *CB*, de donde resultaría, si valiese su respuesta, que un cuerpo menos pesado que el líquido sería impelido ácia el centro *C* del vaso, y no ácia el punto *G* de la columna en la qual se halla, contra lo que manifiesta la esperiencia diaria.

89 Una vez que la gravedad no es efecto de impulso alguno, es propia de las partes mismas de la materia, y debe ser general y recíproca, pues no hay razon ninguna para que resida en unos cuerpos y no en otros. Si

Fig. Si no fuera recíproca esta gravitacion, una piedra que cae comprimiría la tierra, sin que esta comprimiese la piedra, la tierra cedería á esta impresion, y moviéndose con un movimiento continuamente acelerado, iría á precipitarse en la inmensidad del espacio mas allá de los límites del universo. Luego la tierra comprime tambien la piedra ó la montaña, su emisferio boreal aprieta al emisferio austral, y dos de sus segmentos iguales se comprimen igual y mutuamente por la misma razon, y por consiguiente todas las partes gravitan unas en otras.

La Luna pesa ácia la tierra, al rededor de la qual se mueve, y traza areas iguales (VII. 685) en tiempos iguales; la Tierra y la Luna juntas pesan ácia el Sol, y lo mismo pasa en este particular respecto de la Luna, que respecto de un proyectil que se mueve en el ayre, cuyo proyectil gravita con la Tierra ácia el Sol, verificándose su movimiento ácia la Tierra á influjos de su gravitacion.

Las partes de la Luna gravitan ácia la Luna; á no ser así, dando la Luna vueltas al rededor de su centro en el discurso de un mes (VII. 784), sus partes se disiparían impelidas de sus fuerzas centrífugas; luego dichas partes volverían á caer á la Luna si las separasen de ella; y como no hay razon ninguna para que cese de golpe esta esfera de actividad de la Luna, hemos de presumir que la gravitacion ácia ella alcanza á mucha distancia y alcanza hasta la tierra. Así dos gotas de agua puestas encima de una mesa muy lisa se arriman una á otra con tal

que

que estén cerca, y se advierte el movimiento de ambas. Fig.
Esto es una consecuencia de ser la reaccion igual á la accion (IV. 13).

90 *Solo con admitir la atraccion se pueden esplicar los movimientos de los planetas.*

Suponen los Cartesianos, para esplicar estos movimientos, que los planetas están sumergidos en un fluido, el qual circulando al rededor de la Tierra compone el dilatado torvellino que los mueve en la misma direccion que él, así como el curso de un rio se lleva una embarcacion que nadie gobierna.

Aunque parece sumamente sencilla á primera vista esta esplicacion, no se puede admitir por causa de las gravísimas dificultades que padece. Consta por las observaciones astronómicas que los planetas se mueven al rededor del Sol con algunas circunstancias plenamente averiguadas. 1.° hemos probado (VII. 681) que sus órbitas no son circulares, sino elipses cuyo focus ocupa el Sol. 2.° consta (VII. 685) que los planetas describen al rededor del Sol areas proporcionales á los tiempos; y por esta razon crece su velocidad al acercarse al Sol, porque siendo entonces mas cortas las lineas tiradas desde el Sol al planeta, que con el arco de la curva forman la area respectiva, debe ser mayor el arco andado en un mismo tiempo, para que se verifique la proporcionalidad de las areas con los tiempos. 3.° tambien guardan los planetas en sus revoluciones otra ley (VII. 684), y es que el tiem-

Fig. tiempo de la revolucion de cada planeta al rededor del Sol es proporcional á la raiz quadrada del cubo de su distancia al Sol.

Esto supuesto, ya no se trata de esplicar como los planetas se mueven al rededor del Sol, sino de dar razon por que cumplen con las dos leyes espresadas en el discurso de sus revoluciones; y esto es imposible en la hypótesi de los Cartesianos. Porque una vez que cada planeta traza al rededor del Sol areas proporcionales á los tiempos, se sigue que las velocidades de las camas de la materia *vorticosa* ó del torvellino son recíprocamente proporcionales á las distancias de las mismas camas al centro. Y una vez que los tiempos de las revoluciones de los diferentes planetas son proporcionales á las raices quadradas de los cubos de sus distancias al Sol, se sigue que las velocidades de las camas son recíprocamente proporcionales á las raices quadradas de sus distancias. Luego puesta una de las dos leyes, no puede subsistir la otra en el systema Cartesiano.

91 Fuera de esto, las diferentes camas del torvellino tienen con poca diferencia las mismas densidades que los planetas que en ellos se mueven, pues cada planeta se sostiene en la cama donde está, y dichas camas se mueven con velocidades muy rápidas. No obstante se óbserva que los cometas atraviesan dichas camas sin que su movimiento padezca alteracion alguna sensible. Tampoco se concibe como el torvellino de un cometa, si acaso le tiene,

ne, atraviesa el torvellino de un planeta, sin que resulte Fig.
de aquí la destruccion total del movimiento.

92 Finalmente, hemos probado en el tomo antecedente que los planetas se mueven al rededor del Sol en planos diferentes, formando los planos de sus órbitas ángulos distintos en el centro del Sol. Sería, pues, preciso que las diferentes camas del torvellino solar estuviesen en distintos planos, y si esto fuera así no se concibe como podría subsistir el movimiento del torvellino. Si todas las camas están en un mismo plano, no se les podrá atribuir los movimientos de los planetas que todos se hacen en planos diferentes, á los quales se opondría el mismo torvellino.

Si el torvellino fuese esférico, no podrían moverse los planetas en órbitas elípticas; el mismo torvellino debería alterar la velocidad y la direccion de los planetas despues de empezar estos su revolucion elíptica. Quando se encaminasen al afelio, tendrían que luchar con la gravitacion y la resistencia del fluido, y moviéndose con el exceso de su pesantez respecto de la resistencia del fluido al acercarse al perihelio, no tendrían ni la misma velocidad, ni la misma gravedad efectiva á una misma altura de cada lado de su curva, y no podrían trazar, ni una vez siquiera, dos ramos semejantes de una misma curva. En el afelio tendría el torvellino tanta velocidad, que no podría darles á los planetas la precisa para el movimiento elíptico; en el perihelio, el torvellino tendría muy poca, y en las

Fig. distancias medias careceria de la direccion correspondiente para comunicar á los planetas el movimiento elíptico.

Si el torvellino fuera elíptico, sería preciso que toda la materia del ege mayor pasára á un tiempo por el ege menor; que por angostarse el canal resultase un rozamiento muy grande, que el Sol fuese echado del focus al centro; que el movimiento se aniquilase, ó que el torvellino se volviera esférico. Quando la madre de un rio se angosta, pasa en un mismo tiempo por el parage mas angosto la misma cantidad de agua que por el parage mas ancho (V. 559), y crece la velocidad en vez de menguar, porque llega nueva agua que precipita la primera, la superficie del agua se levanta, las aguas inferiores son mas comprimidas que las superiores, y resulta de todo esto un aumento de velocidad. En el caso de los planetas no hay aumento de profundidad, ni causa alguna de alteracion; queda el fluido luchando con toda la resistencia del rozamiento, y se le sigue de aquí un menoscabo continuo en su velocidad. Si el movimiento hubo de crecer en el perihelio por razon de la resistencia, ¿por qué ha de menguar en el afelio donde es mas ancho el canal, y tiene el movimiento mayor desahogo?

Leyes de la Atraccion.

93 *La atraccion ó la gravitacion de los cuerpos unos ácia otros es recíproca.*

Si se ponen dos gotas de agua al lado una de otra,

se

se echará de ver que se arrimarán hasta confundirse en Fig.
una gota sola, y se percibirá el movimiento de cada una de ellas. Prueba patentemente este fenómeno, aun quando no hubiera otros muchos, que la atraccion de los cuerpos es recíproca, y que es un caso particular de aquella ley general (IV. 13) de la naturaleza, en virtud de la qual la reaccion es igual á la accion.

94 *La fuerza atractriz es proporcional á la masa atrayente.*

Porque una vez que la atraccion es una ley general (89), es evidente que partes iguales de materia atrahen igualmente; luego la cantidad de fuerza atractiva es como la masa ó densidad del cuerpo atrayente. Si una sola partícula de materia es atrahida con una fuerza *f*, cada una de las partículas que se pusieren junto á ella, será atrahida con la misma fuerza *f*; no habrá razon ninguna para que la segunda sea menos atrahida que la primera; y la presencia de la segunda no causa alteracion ninguna en la fuerza que obraba en la primera; luego la fuerza atractriz solo pende de la masa del cuerpo atrayente. Esto mismo lo está manifestando la espériencia; yá que la tierra comprimida de la montaña no se rinde á su presion, no hay duda en que comprime á la montaña con igual fuerza; es, pues, preciso que la tierra sea tanto menos atrahida ácia la montaña, quanto menos matéria tiene esta, y es preciso al contrario que la montaña tenga tanto mayor tendencia ácia la Tierra, quanto esta última es mayor;

Fig. luego sigue la atraccion la razon de las masas.

95 De lo probado (93) se sigue 1.° que no puede un átomo caer ácia la tierra, sin que la tierra se levante ácia el átomo; pero como la tierra es sin comparacion mucho mas atrahida ácia el átomo (94) que el átomo ácia ella, la tierra andará muy corto trecho ácia el átomo.

96 De donde se infiere en general, que dejando dos cuerpos entregados á sus fuerzas atractivas, se arrimarán uno á otro recíprocamente, andando cada uno de ellos espacios que estarán en razon inversa de sus masas; luego se juntarán en su centro comun de gravedad. Por consiguiente como la razon que hay entre la masa del Sol y la masa de la Tierra, es mucho mayor (VII. 756) que la razon que hay entre la distancia de la Tierra al Sol, y el semidiámetro de dicho astro, queda probado que si se les abandonára á sus fuerzas atractivas; la Tierra alcanzaría al Sol antes que este anduviera ácia la Tierra un trecho igual á su semidiámetro.

97 Estas serian las leyes de la atraccion, si su intensidad solo pendiera de la masa de los cuerpos; pero como suelen ser menores los efectos, conforme son mas remotas las causas, es natural nos presumamos que la distancia tiene algun influjo en la intensidad de la atraccion.

18. 98 Para averiguarlo sean PB, TV dos órbitas circulares y concéntricas, en las quales se mueven dos planetas, cuyos tiempos periódicos son t y 1, por egemplo,

plo, Saturno y la Tierra. Supongamos los arcos *PB* y *TV* infinitamente pequeños y semejantes, esto es, comprehendidos entre los radios *STP*, *SVB*; estos arcos *PB* y *TV* serian andados en tiempos iguales, si fueran iguales las revoluciones de los dos planetas, pero como la revolucion del planeta superior *P* es mas lenta que la de la Tierra *T*, no andará mas que un arco *PE*, mientras que la Tierra anduviere el arco *TV*; entonces será *PD* el efecto de la fuerza central con que el Sol obra en dicho planeta, siendo así que *TR* es el efecto de la fuerza central con que obra en la Tierra *T* (31); nos toca, pues, averiguar la razon de *PD* á *TR*. Por lo probado (VII. 40) $PD : PC :: PE^2 : PB^2$; pero el planeta superior hubiera andado *PB*, si el tiempo de su revolucion, que llamaremos *t*, fuera igual á 1, tiempo de la revolucion de la Tierra; luego $PE : PB :: 1 : t$. Por consiguiente $PD : PC :: 1 : t^2$; luego $PD = \frac{PC}{t^2}$. Pero $PC : TR :: PS : TS :: r : 1$, por ser semejantes los arcos *PB* y *TV*, luego $PC = r . TR$, y como $PD = \frac{PC}{t^2}$, tambien es $= \frac{rTR}{t^2}$; luego $\frac{PD}{TR} = \frac{r}{t^2}$. Pero por la regla de Kepler (VII. 684) $t^2 : 1 :: r^3 : 1$, ó $r^3 = t^2$; luego $\frac{PD}{TR}$ $\left(= \frac{r}{t^2}\right)$ será igual con $\frac{r}{r^3}$ ó $\frac{1}{r^2}$. Luego $PD : TR :: 1 : r^2$, y quiere decir, que el *efecto de la fuerza central sigue la razon inversa del quadrado de la distancia.* Fig.

99 Una vez hallada esta ley de la atraccion del Sol en los planetas, fue facil verificarla en la Luna, y probar que la fuerza necesaria para mantener la Luna en su

Fig. su órbita, no se distingue de la gravedad de los cuerpos terrestres, disminuida en razon inversa del quadrado de las distancias. Con efecto, los cuerpos graves andan 15 pies en un segundo de tiempo (30), la Luna anda un arco de su órbita que es de $0'' 5490163$ ó $33'''$ con corta diferencia, cuyo seno verso viene á ser $\frac{1}{240}$ de pie (11); luego la Luna es atrahida ácia la Tierra 3600 veces menos que los cuerpos terrestres; y como está unas 60 veces mas lejos, se sigue que la fuerza que obra en la Luna mengua como el quadrado de la distancia.

100 Despues de probada esta proposicion por otra parte, ha servido para determinar la distancia de la Luna, y su paralaxe, antes que se hubiese observado con exactitud. Sea e el semidiámetro del equador terrestre convertido en pies; x, la razon entre dicho radio y la distancia media de la Luna, igual con 60, de modo que la distancia de la Luna á la Tierra sea ex; f, la fuerza de la Tierra espresada con los 15 pies que hace andar en un segundo, en su superficie; u, el seno verso del arco que anda la Luna en un segundo de tiempo, ó la cantidad que la Luna baja ó se acerca á nosotros en un segundo; este espacio espresado en pies será uex. Por el principio de las fuerzas centrales el mismo espacio tambien es igual á $\frac{f}{x^2}$ (99), luego igualando estas dos cantidades, sacaremos $\frac{1}{x} = \sqrt[3]{\frac{ue}{f}}$, este es el seno de la paralaxe orizontal de la Luna debajo del equador. Para reducirle á números, tomaremos el logaritmo del seno verso del arco que anda la Luna en un segundo de tiem-

tiempo (11), le añadiremos el del radio del equador Fig. convertido en pies, y sacaremos el logaritmo de $ea =$ 5,8434490; de este restaremos el de 15 pies 0515 que es 1,1775796; el tercio de la resta es 8,2219565, seno de 57′ 18″ 3; esta es la paralaxe debajo del equador, que solo excede en 6 ó 7″ la que se halla por medio de las mejores observaciones, y confirma por lo mismo la ley de la atraccion.

101 De las dos leyes probadas (93 y 94) de la atraccion se sigue que si S espresa la masa del Sol, y r la distancia á que está de un planeta, será $\frac{S}{r^2}$ la espresion de la fuerza con que el Sol atrahe al espresado planeta. Por consiguiente quando decimos que $\frac{S}{r^2}$ es la fuerza con que el Sol, cuya masa llamamos S, obra á la distancia r en un planeta qualquiera, entendemos hablar de una fuerza atractriz, y la suponemos igual á una masa S dividida por el quadrado de una distancia. Pero como las fuerzas, las masas y las distancias son cosas muy heterogeneas y de muy diversa naturaleza, no se alcanza como puede haber entre ellas alguna igualdad.

Esto lo entenderá el que tuviere presente lo dicho (VII.41) acerca de la eleccion de las unidades, y echará de ver que está espresion de las fuerzas es una proporcion puesta en equacion. El efecto de una fuerza se calcula comparándola con otra fuerza; así, si tomamos la Tierra por término de comparacion, suponiendo (VII.756) la masa S del Sol 307800 veces mayor que la de la Tierra y su radio r 107 veces mayor que el radio de la Tierra, $\frac{S}{r^2}$ será $\left(\frac{307800}{(107)^2}\right)$ =

Fig. = 27. Esto quiere decir que la atraccion con que el Sol obra en los cuerpos solares puestos en su superficie es 27 veces mayor que la de la Tierra en los cuerpos terrestres, y que en lugar de andar 15 pies en un segundo, andan 408. Porque la masa sola á distancia igual haría andar 4648000 pies, pero á una distancia 107 veces mayor la atraccion obra 11400 veces menos (98). Luego el Sol hará andar cerca de su superficie 408 pies por segundo en lugar de 15, y la fuerza $\frac{S}{r^2}$ vale 27 en el supuesto de que la de la Tierra sea la unidad.

Para determinar las alteraciones que la fuerza del Sol causa en la Luna, se buscará qué razon hay entre la fuerza del Sol para sacar la Luna de su órbita, y la fuerza de la Tierra para mantenerla en ella, ó quanto la fuerza del Sol puede contrarestar la de la Tierra. Al hacer este cotejo de las fuerzas, se toma por unidad la masa de un planeta, y se espresan las demás masas en partes de esta unidad; se toma tambien una distancia por unidad, y se espresan todas las demás distancias en unidades ó quebrados de esta primera distancia; quiero decir, que se compara un quebrado con otro (VII.41). Por egemplo, se puede hacer esta proporcion: *La fuerza con que el Sol obra en la Luna, que llamamos* S, *está con la fuerza con que la Tierra obra en la Luna en su distancia media, en razon compuesta de la masa del Sol á la masa de la Tierra, y del quadrado de la distancia media de la Luna á la Tierra, al quadrado de la distancia media del Sol á la Luna, esto es, como la masa del Sol dividida*

por

por el quadrado de su distancia á la Luna, ó por r^2, *es á la* Fig.
masa de la Tierra dividida por el quadrado de la distancia media á la Luna. Tomemos por unidad de las masas la masa de la Tierra; por unidad de las distancias, la de la Luna á la Tierra; y por unidad de las fuerzas, la fuerza con la qual la Tierra obra en la Luna en sus distancias medias. En estos supuestos la proporcion antecedente dará para la fuerza con que el Sol obra en la Luna la espresion $\frac{S}{r^2}$.

102 Quando se trata de las perturbaciones que un planeta esperimenta por causa de la accion de otro, se usan las mismas espresiones; por egemplo, la masa del Sol que es 1, mantiene la Tierra en su órbita á una distancia que es 1. Júpiter turba esta accion con una masa cerca de 1000 veces menor que la del Sol (107); así, su masa ó su fuerza se puede llamar $\frac{1}{1000}$; y como obra en una distancia 5 veces mayor que el Sol (VII. 682), su accion es 25 veces menor que la del Sol; se debe, pues, hacer 25 veces menor la fuerza $\frac{1}{1000}$, quiero decir, que se debe escribir $F = \frac{1}{25000}$ para espresar la fuerza con que Júpiter obra en la Tierra. Esta fuerza no es mas que una 25 milésima parte de la fuerza con que el Sol obra en la Tierra; es la fuerza cuyo efecto indagaremos mas adelante; quiero decir, que indagaremos quanto el movimiento de la Tierra se ha de alterar por el influjo de una fuerza que es $\frac{1}{25000}$ de la que detiene la Tierra en su órbita.

103 Ya que en toda fuerza aceleratriz los espacios son como los quadrados de los tiempos (IV. 50), si la fuer-

za

Fig. za fuere $\frac{S}{r^2}$, será $\frac{Sdt^2}{r^2} = de$, este es el espacío que dícha fuerza haría andar én un tiempo dado dt infinitamente pequeño.

104 La espresíon $\frac{S}{r^2}$ de la fuerza atractríz, es la què corresponde quando dicha fuerza obra directamente y siempre en la direccion del radio vector. Pero como los planetas se atrahen unos á otros oblicuamente y en qualesquiera direcciones, que á cada paso varían, siendo así que siempre son atrahídos dírectamente ácia el centro de su movimiento; para apreciar el efecto de las perturbaciones y atracciones celestes, se debe resolver su fuerza absoluta (que es la masa dividida por el quadrado de la velocidad), á fin de determinar su efecto en la dirección misma de la fuerza central. Hemos dicho (102), por egemplo, que la accion de Júpiter en la Tierra es $\frac{1}{25000}$ de la del Sol en la Tierra, en virtud de una atraccion directa; pero estas dos fuerzas que obran en la Tierra, se turban mutuamente, y suelen tener direcciones distintas; la fuerza de Júpiter, que en la atraccion directa es $\frac{1}{25000}$ de la del Sol, obrará mucho menos quando obrare oblicuamente; por egemplo será dos veces menor quando el ángulo de su oblicuidad fuere de 60°.

De las Masas de los Planetas.

105 La masa de los planetas, esto es, su cantidad de materia, ó su fuerza atractriz, se infiere del principio de la atraccion, igualmente que su gravedad específica. Este des-

descubrimiento que á primera vista parece muy estraordinario, es una consecuencia natural de la ley de atraccion, porque la fuerza atractriz es un indicio seguro de la cantidad de materia. Tomemos por término de comparacion la masa ó fuerza atractriz de la Tierra, cuyos efectos conocemos, é indaguemos qual es la masa de Júpiter respecto de la de la Tierra. El primer Satélite de Júpiter hace su revolucion á una distancia de Júpiter que es la misma (ó, quando mas, una dozava parte menor) que la de la Luna á la Tierra. Si este Satélite diera tambien su vuelta en el mismo espacio de tiempo que la Luna al rededor de la Tierra, se seguiría que la fuerza con que Júpiter detendría al espresado Satélite en su órbita, sería igual á la fuerza con que la Tierra detiene á la Luna en la suya, y que la cantidad de materia ó la masa de Júpiter, sería la misma que la de la Tierra. En este caso sería preciso que la densidad de la Tierra fuese 1246 veces mayor que la de Júpiter, porque en el volumen de Júpiter cabe 1246 veces el de la Tierra (VII. 756). Y si el peso es uno mismo, la densidad es tanto mayor quanto menor es el volumen. Péro si el Satélite gira 16 veces mas aprisa que la Luna, se necesita para detenerle una fuerza 256 veces mayor, porque $16 \times 16 = 256$, y la fuerza central es como el quadrado de la velocidad (31), una velocidad dupla requiere y supone una fuerza central quádrupla á distancias iguales; y la velocidad del Satélite 16 veces mayor que la de la Luna, bien que en una órbita igual, supone en Júpi-

Fig. piter una fuerza ó una masa 256 veces mayor que la de la Tierra. En virtud de esto se halla un volumen 1200 veces mayor, y una pesantez 256 veces mayor no mas que la de la Tierra, luego el volumen de Júpiter comparado con el de la Tierra es quatro veces mayor que la cantidad de materia real y efectiva, respecto de la de la Tierra; luego la densidad de la Tierra es quatro veces mayor que la de Júpiter.

106 Este viene á ser el rumbo que siguió Newton para calcular las masas y las densidades de los planetas (VII. 753 y sig.); quanto mas un Satélite dista de su planeta, y quanto mas aprisa gira, tanta mas fuerza y materia arguye en el planeta principal que le detiene. Vamos á averiguar este punto por el cálculo, y tomaremos el Sol por término de comparacion, porque esto nos importa para el cálculo de las atracciones celestes.

Sea la distancia de Júpiter al Sol .... $= 1$,
El tiempo que dura la revolucion de Júpiter..... $= 1$,
La fuerza con que el Sol obra en Júpiter........ $= 1$,
La distancia de uno de sus Satélites............... $= r$,
El tiempo que dura la revolucion del mismo Satélite.. $= t$,

La fuerza actual de Júpiter en su Satélite será $= \frac{r}{t^2}$, en comparacion de la fuerza con que el Sol obra en Júpiter (98). Si este Satélite estuviera tan lejos de Júpiter como Júpiter lo está del Sol, sería preciso que fuese entonces la fuerza á la fuerza actual que es $\frac{r}{t^2}$, como $r^2 : 1$,

es-

esto es, en razon inversa del quadrado de la distancia; luego entonces á igual distancia, la fuerza sería $\frac{r^3}{t^2}$. Esta es con efecto la fuerza absoluta de Júpiter, respecto de la del Sol, considerada á la misma distancia, esto es, su masa total ó la cantidad de materia que contiene. Luego en general para averiguar la masa de un planeta, tomando por unidad la del Sol, basta dividir el cubo de la distancia de un Satélite del mismo planeta por el quadrado del tiempo que gasta en hacer su revolucion, con tal que se tome la unidad de las distancias y de los tiempos, en uno de los planetas que dan la vuelta al rededor del Sol. Fig.

107 Por egemplo, la revolucion de Venus al rededor del Sol, que es (VII. 638) de 5393 horas, es 13 veces mas larga que la del quarto Satélite de Júpiter que dura $400\frac{1}{2}$ horas (VII. 905), luego $t = 0{,}0742716$. La distancia del quarto Satélite á Júpiter vista desde el Sol, es de 8′ 16,″ de donde se puede inferir la distancia del Satélite á Júpiter, tomando por unidad la de Venus al Sol, ó el valor de $r = 0{,}017290$ (VII. 907). Si tomamos el cubo de r y el quadrado de t, y dividimos r^3 por t^2, sacaremos $0{,}0009370$, ó $\frac{1}{1067}$, que es la masa de Júpiter, siendo 1 la del Sol.

Si quisiéramos determinar la razon entre las masas del Sol y de la Tierra, tendríamos $r = \frac{9''}{57'\ 3''}$, esta es la razon entre las paralaxes ó las distancias, $t = \frac{27 \text{ dias}}{365} = \frac{129597736''}{1732559381''}$, esta es la razon entre las revoluciones; luego $\frac{r^3}{t^2} = \frac{1}{307831}$, esta es la masa de la Tierra, tomando la del Sol por unidad,

Fig. dad, conforme se vé en la tabla (VII. 756). Discrepa esta masa de la de Newton que es $\frac{1}{169282}$; pero los elementos de que nos hemos valido son mas exactos que los suyos.

108 La masa de Saturno tambien discrepa sensiblemente; porque Newton la supone $= \frac{1}{3021}$ de la del Sol, y Mr. de la Lande la saca como $\frac{1}{3927}$, introduciendo en el cálculo los cinco Satélites de Saturno, que dán resultados bastante diferentes unos de otros, por causa de no poderse observar con toda la precision que corresponde los Satélites de este planeta.

109 Síguese de los cálculos antecedentes que la masa del Sol dividida por el cubo de su distancia á la Tierra, á la qual apelaremos para esplicar las desigualdades de la Luna, es igual á t^2, porque la masa del Sol, tomando por unidad la de la Tierra, es $\frac{t^2}{r^3}$; pero si tomamos por unidad la distancia de la Luna, la del Sol es $\frac{1}{r}$, cuyo cubo es $\frac{1}{r^3}$, y dividiendo la masa $\frac{t^2}{r^3}$ por el cubo de esta cantidad, sale t^2, conforme hemos supuesto.

110 Dividiendo esta fuerza ó masa del planeta por el volumen, espresado tambien en el supuesto de que sea 1 el del Sol, se saca la densidad que se busca del planeta respecto de la del Sol. Por este camino halló Newton que la Tierra venia á ser quatro veces mas densa que el Sol, quatro veces y un quarto mas densa que Júpiter, y seis veces mas densa que Saturno. Estas densidades quales están en la tabla (VII. 756) son mas exactas; las podemos comparar con obgetos conocidos y familiares. Se sabe que el antimo-

nio

nio es quatro veces mas denso que el agua, y seis veces mas denso que el palo de ciruelo; así, suponiendo que las substancias del Sol y Júpiter tengan la densidad del agua, la Tierra tendrá la densidad del antimonio, y Saturno será tan ligero como la madera. Fig.

111 Las densidades de Venus, Mercurio y Marte no se pueden determinar por el método antecedente, porque estos planetas no tienen Satélites que nos puedan manifestar la intensidad de su atraccion. Pero como reparamos en los tres planetas, cuyas densidades conocemos, un aumento de densidad, conforme están mas próximos al Sol, parece natural que este aumento se verifique igualmente en los otros tres planetas. Con indagar si guardan alguna ley estos incrementos, se echa de ver que las densidades casi son proporcionales á las raices de los movimientos medios. Por egemplo, el movimiento de la Tierra viene á ser 11,86, siendo 1 el de Júpiter, la raiz es $3\frac{1}{2}$, y la densidad de la Tierra es con efecto (VII. 756) $3\frac{1}{2}$ veces la de Júpiter con corta diferencia. Podemos, pues, suponer la misma proporcion en los demás planetas, y sobre este supuesto está calculada la tabla (VII. 756), donde se echa de ver que la densidad de Venus es algo mayor que la de la Tierra.

112 Despues de conocida la masa y el diámetro de un planeta, se determinan facilmente los efectos que causa en su superficie la pesantez; quiero decir, la fuerza aceleratriz de los graves en el planeta, porque esta fuerza sigue la razon de la masa y la razon inversa del quadrado del

Fig. radio. Sobre este principio se calculó la tabla que dejamos citada, y espresa la velocidad de los graves en cada planeta en pies y centésimas de pies; no es otra cosa que la velocidad de los cuerpos terrestres debajo del equador 15 pies, 104 (35) multiplicada por la masa de cada planeta, y dividida por el quadrado del radio, tomando por unidades la masa y el radio de la Tierra. Por egemplo, la masa de Júpiter es 288 veces mayor que la de la Tierra (VII. 756), luego esperimentarian los graves en su superficie una atraccion 288 veces mayor que en la superficie de la Tierra, y andarian 288 veces 15 pies, si el radio de Júpiter no fuera como unas 11 veces mayor que el de la Tierra, y el quadrado de la distancia del centro á la superficie 116 veces mayor, de donde resulta que la gravedad es como unas 116 veces menor. Pero 288 dividido por 116 dá un poco mas de $2\frac{1}{2}$, luego la pesantez de los cuerpos puestos en su superficie es como dos veces y media la de los nuestros; en lugar de andar 15 pies por segundo, andarian 37. Segun Newton la pesantez no era mas que dupla en Júpiter, pero esto proviene de que hacía mayor de lo que corresponde la paralaxe del Sol, y el diámetro de Júpiter séptuplo no mas del diámetro de la Tierra, siendo así que por los cálculos de Mr. de la Lande en el diámetro de Júpiter caben $10\frac{3}{4}$ diámetros de la Tierra. Prescindimos en todo esto de la fuerza centrífuga (35) originada de la rotacion de Júpiter y demás planetas.

113 La masa de la Luna, y por consiguiente su den-

densidad son dificiles de determinar con puntualidad, porque nos las manifiestan fenómenos que no podemos valuar con bastante precision, es á saber, la altura del flujo del mar, y la cantidad de la nutacion del ege de la Tierra. Si despues de averiguar que las alturas del flujo son de 7 pies en los sicygies, no son mas que de 3 pies en las quadraturas, en el supuesto de que concurran las mismas circunstancias, quiero decir, si las mareas mas grandes son á las mas pequeñas como $3\frac{1}{2}$ es á $1\frac{1}{2}$, la suma de las fuerzas de la Luna y del Sol ha de ser á su diferencia, como $3\frac{1}{2}$ es á $1\frac{1}{2}$; luego estas fuerzas serán entre sí como 5 es á 2, porque la suma de 5 y de 2 es á su diferencia como $3\frac{1}{2}$ es á $1\frac{1}{2}$.

114 Supongamos, pues, la fuerza del Sol 1, la de la Luna $= 2\frac{1}{2}$; para determinar la masa de la Luna basta saber qual es su fuerza, suponiéndola á la distancia del Sol. La fuerza mengua en razon inversa del cubo de la distancia, quando se la resuelve en una direccion distinta de su direccion primitiva, conforme lo probaremos mas adelante; luego se ha de multiplicar la fuerza actual de la Luna por el cubo de $\frac{9''}{57' 3''}$, y sacaremos la masa de la Luna, tomando por unidad la del Sol. Pero la masa de la Tierra no es mas que $\frac{1}{307831}$ de la del Sol (107); luego la masa hallada se ha de dividir todavía por este quebrado, y sacaremos que la masa de la Luna es $\frac{1}{71}$, tomando por unidad la de la Tierra.

115 La masa de la Tierra (107) es $\left(\frac{9''}{57}\right)^3 \cdot \left(\frac{365}{27}\right)^2$,

 sien-

Fig. siendo la del Sol la unidad; la masa de la Luna es $(\frac{9''}{57})^3 . 2\frac{1}{2}$; son, pues, entre sí como $\frac{2}{5} (\frac{365}{27})^2 : 1$; luego el quadrado de la duracion del año 365 dias, dividido por el quadrado de la duracion del mes 27 dias, y multiplicado por $\frac{2}{5}$ que es la fuerza de la Luna, dará el número 71,49 que espresa quántas veces la Luna cabe en la Tierra; luego la masa de la Luna será 0,013991.

Si dividimos la masa de la Luna $\frac{1}{71}$, ó 0,013991 por su volumen que es (VII.756) $\frac{1}{49}$, ó 0,02036, sacaremos su densidad 0,68718; quiero decir que la densidad de la Luna no es mas que $\frac{7}{10}$ de la de la Tierra, conforme vá apuntado en la tabla citada.

116 La masa del Sol, ó la fuerza atractriz con que obra en la Tierra, se puede comparar con otra fuerza que esperimentan los cuerpos terrestres, esto es, con la fuerza centrífuga de un cuerpo debajo del equador en la superficie de la Tierra, que dá la vuelta con la Tierra en 24 horas (35). Esta fuerza con la qual un cuerpo intenta apartarse de la Tierra, y la fuerza con que el Sol mantiene la Tierra en su órbita, ó por lo menos los efectos de estas fuerzas, son los cortos desvios de las tangentes de la circunferencia de la Tierra y de la órbita terrestre, que corresponden á un mismo intervalo de

18. tiempo (32). Sea *TV* la circunferencia del equador terrestre; *PEB*, un círculo igual á la órbita de la Tierra, y supongamos que el arco *PE* es andado en el mismo tiempo que el arco *TV*. Sea $ST = a$, $SP = r$;

t,

t, el tiempo que dura la rotacion, esto es, 24 horas; T, Fig.
lo que dura la revolucion, esto es, 365 dias, tendremos (98) $TR : PD :: \frac{a}{t^2} : \frac{r}{T^2}$, luego $PD = TR . \frac{rt^2}{aT^2}$; esta es la fuerza central que la Tierra esperimenta por causa de la accion del Sol. Pero si la órbita PB de la Tierra llegara á ser tan pequeña como el círculo TV, la fuerza del Sol llegaría á ser mayor en razon inversa del quadrado de la distancia; luego sería entonces $= TR . \frac{r^3t^2}{a^3T^2}$, esta es la fuerza que se debe comparar con la fuerza centrífuga, para determinar la razon entre la masa del Sol y la fuerza centrífuga. Porque hemos de suponer que ambas obran á la misma distancia, ó en círculos iguales, si queremos comparar los espacios que hacen andar, siendo todo lo demás igual, ó comparar su energía. Así se saca la masa del Sol con multiplicar TR, que es el efecto de la fuerza centrífuga en la Tierra, por $\frac{r^3t^2}{a^3T^2}$; y si llamamos C dicha fuerza centrífuga, podremos llamar $\frac{Cr^3t^2}{a^3T^2}$ la masa del Sol.

117. Tambien entra la masa del Sol en la espresion del tiempo que gasta un planeta en andar un arco qualquiera de su órbita. Supongamos este arco, que llamarémos z, espresado en partes de la circunferencia; el quadrado del tiempo que corresponde á este arco, es tanto mayor quanto mayor es el cubo de la distancia, y menor la fuerza atractriz. Porque si la masa atractriz fuese dupla, sería duplo su efecto PC, y el quadrado de la velocidad PB crecería en la misma proporcion (32);

Fig. luego la masa $S=\frac{1}{t^2}$ ó $t=\frac{1}{\sqrt{S}}$; pero ya que los quadrados de los tiempos son como los cubos de las distancias, $t^2=r^3$ ó $t=r^{\frac{3}{2}}$; luego $t=\frac{r^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{S}}$. Fuera de esto, el tiempo es proporcional al espacio z, siendo todo lo demas igual; luego finalmente el tiempo que corresponde á un arco z es $\frac{r^{\frac{1}{2}}z}{\sqrt{S}}$; hablando con rigor, S debe ser la suma de las masas del Sol y del planeta atrahido.

Del movimiento elíptico de los Planetas.

118 Dejamos probado (IV. 295) que quando la fuerza central es en razon inversa del quadrado de la distancia, el mobil traza una de las secciones cónicas. Tambien podríamos probar la proporcion inversa, es á saber, que quando un mobil traza con su movimiento una seccion cónica, la fuerza central que le detiene en la curva de su revolucion obra en razon inversa del quadrado de la distancia. Nos contentarémos con probarlo en particular respecto de la parábola y de la elipse.

119 *La fuerza central en una parábola es en razon inversa del quadrado de la distancia al focus.*

19. Sea OD un arco de parábola infinitamente pequeño (33), que anda un cometa (VII. 1216); DG, una porcion del diámetro que pasa por el punto D, y es paralelo al ege PR; OG, la ordenada, y DG la abscisa correspondiente al arco OD; OH paralela á SD espresa la cantidad que el cometa

se

se aparta de la tangente DX al trazar el arco DO. Luego Fig. la linea OH es un infinitamente pequeño de segunda orden (33), del mismo modo que DN que es igual y paralela con ella, y DG que tambien es su igual, pues DG y DS forman con la tangente DT ángulos iguales (III.66). El parámetro del diámetro DG es quádruplo de SD; tenemos, pues, $(OG)^2$ ó $(ON)^2$ (que discrepa de él no mas que un infinitamente pequeño de clase inferior) igual á $4SD \cdot DG = 4SD \cdot OH$. Si tiramos las perpendiculares OE y SX, los triángulos ONE, SDX serán semejantes; por otra parte, la perpendicular SX es media proporcional entre SP y SD, luego $ON : OE :: SD : SX :: SX : SP$, luego $ON^2 : OE^2 :: SD : SP :: 4SD : 4SP$; pero $ON^2 = 4SD \cdot OH$, luego $OE^2 = 4SP \cdot OH$. Por consiguiente $OH = \frac{OE^2}{4SP}$ ú $\frac{OE^2}{4SP} \cdot \frac{SD^2}{SD^2}$; pero si suponemos que el tiempo sea uno mismo, ó que la area sea constante, será $OE^2 \cdot SD^2$ constante, luego OH será proporcional á $\frac{1}{SD^2}$, quiero decir que el efecto de la fuerza central es en razon inversa del quadrado de la distancia.

120 *La fuerza central en la elipse tambien es en razon inversa del quadrado de la distancia.*

Sea VL un arco de elipse infinitamente pequeño; VN, 20. la tangente; CI y Fb, paralelas á VN; LQ, perpendicular á VS; la porcion VE del radio vector VS igual con el desvío LN de la tangente, es el efecto de la fuerza central. Los triángulos semejantes VEX, VqC dan $VE : VX :: Vq : VC$; pero $Vq = AC$ (VII.78), luego la abscisa VX

Fig. del diámetro VCn que corresponde á la ordenada LEX es $\frac{VC.LN}{AC}$. Por la propiedad de la elipse (VII. 65) VX. $Xn : XL^2 :: VC^2 : CI^2$ ó $VX . 2VC : LE^2 :: VC^2 : CI^2$, luego $LE^2 = \frac{2VC.VX.CI^2}{VC^2}$, y substituyendo en lugar de VX su valor $\frac{VC.LN}{AC}$, $LE^2 = \frac{2LN.CI^2}{AC}$. Los triángulos semejantes LEQ, VYq dan esta proporcion $LE^2 : LQ^2 :: Vq^2 : VY^2 :: AC^2 : VY^2$ (VII. 78); pero $AC . CG = CI . VY$ (VII. 70) ó $AC^2 : VY^2 :: CI^2 : CG^2$, luego $LE^2 : LQ^2 :: CI^2 : CG^2$ ó $AC . \frac{p}{2}$; $LQ^2 = \frac{LE^2 . AC . p}{2CI^2}$; substituyendo en lugar de LE^2 su valor $\frac{2LN.CI^2}{AC}$, $LQ^2 = p . LN$; pero LN espresa el efecto de la fuerza central, es, pues, proporcional á $\frac{LQ^2}{p}$. El efecto de una fuerza central es tambien en general fdt^2 (26); luego $LN = fdt^2$ ó $f = \frac{LN}{dt^2} = \frac{LN}{SV^2 . LQ^2}$, y substituyendo en lugar de LQ^2 su valor $p . LN$, $f = \frac{1}{p . SV^2}$; quiero decir que la fuerza central es en razon inversa del quadrado de la distancia SV al focus de la elipse.

Luego ya que segun probamos (VII. 681) se mueven los planetas en elipses cuyo focus ocupa el Sol, síguese de lo que acabamos de probar, y de lo dicho (IV. 292) que son impelidos ó atrahidos ácia el Sol con una fuerza que sigue la razon inversa del quadrado de las distancias, y esta es una confirmacion de lo probado antes (98).

121 Ahora nos toca dar á entender con mas claridad este movimiento alternativo de los planetas. A algunos les parece que un planeta atrahido incesantemente ácia el

el Sol, al qual se ha ido acercando cierta cantidad, deberia acercarsele mas y mas, pues el Sol no cesa de atraherle; sin embargo así que los planetas llegan á su perihelio, se apartan del Sol y vuelven á su afelio. Hemos de dar la razon de este fenómeno. Fig.

Un planeta que ha sido arrojado de su afelio con una velocidad sobrado corta para trazar un círculo á tanta distancia (37), ó con una fuerza de proyeccion muy pequeña respecto de la fuerza central, se acerca al Sol; pero al tiempo de acercársele crece su velocidad, pues de otro modo las areas no serían proporcionales á los tiempos. Supongámosle llegado á 180° lejos del punto de donde salió; esto es, á su perihelio; su velocidad es quádrupla de su velocidad afelia, una vez que la velocidad crece en razon inversa de las distancias (IV. 292). Pero la velocidad que se necesitaría en el perihelio para trazar un círculo no es sino dos veces mayor que la velocidad que se necesitaba para trazar un círculo en el afelio, porque solo crece en razon inversa de la raiz de la distancia (36); luego al bajar de *A* á *P* el planeta ha adquirido una velocidad dupla de la que necesitaría para trazar un círculo del radio *SP*; luego se saldrá de este círculo para apartarse del Sol, y subir otra vez ácia el afelio. 21.

122. Tambien daremos otra razon del movimiento alternativo de los planetas. Supongamos como poco ha un planeta arrojado desde *A* con una velocidad que no basta pa-

Fig. para que ande un círculo del radio *SA*, por manera que desde el primer instante le sea preciso bajar á una órbita mas curva acercándose al Sol. Quando hubiere llegado á un punto *P*, á una distancia quatro veces menor, la fuerza central ó la atraccion del Sol será 16 veces mayor (98); pero la fuerza centrífuga será 64 veces mayor (38), porque crece en razon del quadrado de la velocidad y en razon de la diminucion de la distancia; luego la fuerza centrífuga es entonces mucho mayor que la fuerza central; no és, pues, de estrañar que el planeta empiece á apartarse del Sol.

123 Parece que el planeta debería dejar de acercarse al Sol así que la fuerza centrífuga llega á ser igual con la fuerza centrípeta. Pero se debe considerar que en el mismo instante, esto es, quando el planeta está en su distancia media respecto del Sol, la direccion *MN* de su movimiento está muy inclinada al radio vector *MS*, y forma un ángulo *NMS*, muy pequeño para que este ángulo pueda ser de repente un ángulo recto; es preciso que el planeta bage mas y mas, y que la curvatura de su órbita se redondee bastante para que el radio vector *SP* sea perpendicular al movimiento del planeta; entonces todo el exceso que lleva la fuerza centrífuga á la fuerza central, se gastará en apartar el planeta del Sol, y esto solo sucede en el punto *P* diametralmente opuesto al punto *A*. Al salir del punto *P* el planeta gastará en perder el exceso de su fuerza centrífuga, tanto tiempo como estuvo en ad-

adquirirle; esta es la razon porque la segunda parte *POA* Fig. de la elipse será igual á la parte descendiente *AMNP*, y trazada en el mismo tiempo.

124 La teórica de la atraccion sería facil de aplicar á la Astronomía, si cada planeta, dando vueltas al rededor de un centro, no esperimentase mas atraccion que la de la fuerza central; pero las demás atracciones que se agregan á esta hacen muy varios los efectos; ahora nos empeñaremos en estas investigaciones que son las mas importantes y dificultosas de toda la Astronomía especulativa.

De las desigualdades que ocasionan las Atracciones mutuas de los cuerpos celestes.

125 Si cada planeta, girando al rededor de un centro, no esperimentára mas fuerza que la que la encamina á dicho centro, trazaría un círculo ó una elipse cuyas areas serían proporcionales á los tiempos (VII.685); pero como cada planeta es atrahido por todos los demas, ácia direcciones diferentes, y con fuerzas que varían sin cesar, resultan de aquí desigualdades y perturbaciones continuas. La teórica de las perturbaciones celestes es hoy dia un ramo esencial de la Astronomía, al qual se dedican á porfia los Astrónomos y Geómetras de estos tiempos.

126 Si dos planetas que giran el uno al rededor del otro, fuesen igualmente atrahidos de otro planeta, y ácia direcciones paralelas, esta nueva atraccion nada alteraría su systema, su movimiento, su situacion respectiva;

Fig. va; sería lo mismo que si el espacio mismo, ó el plano en el qual se hace el movimiento hubiese mudado de posicion; lo que se verificaba en el espacio ó plano que se traslada, prosigue verificándose como antes, y el planeta visto desde el centro de su movimiento, parece siempre que traza una elipse.

127 Esta es la razon por que dos atracciones iguales y paralelas no causan novedad alguna en un systema de cuerpos; solo la diferencia de las atracciones causa una desigualdad ó diferencia en el movimiento; la Luna esperimenta turbado su movimiento al rededor de la tierra, porque es atrahida del Sol, un poco mas ó un poco menos que de la tierra; si la mar se levanta dos veces al dia por la atraccion de la Luna, es porque la Luna atrahe las aguas mas de lo que atrahe la tierra, quando está encima de las aguas, y porque 12 horas despues atrahe las mismas aguas menos que la tierra.

128 Quando se quieren calcular las turbaciones que una atraccion estraña causa en el movimiento de un planeta en su órbita al rededor del Sol, es preciso saber quánto obra en el Sol y en el planeta; la fuerza perturbatriz es igual á la diferencia de las dos atracciones; y los efectos de esta diferencia son lo que se debe calcular. Porque si el Sol y el planeta que gira al rededor del Sol, fuesen atrahidos igualmente, y en direcciones paralelas, no dejaría el planeta de trazar la misma elipse al rededor del Sol; sus longitudes heliocéntricas y sus radios vectores

res serían los mismos, y en la práctica de la Astronomía Fig.
no tendríamos que llevar en cuenta ninguna alteracion.

129 El que se hiciere cargo de esta consideracion, alcanzará por que la pesantez de la Luna ácia la tierra, esto es, la fuerza central que detiene á la Luna en su órbita mengua en los sycigies, ora esté la Luna en oposicion, ora esté en conjuncion. Esta variacion jamas la han entendido los enemigos de la atraccion, y es sin embargo muy esencial para dar razon de los fenómenos. Lo mismo le sucede á la Luna que á las aguas de la mar, que dos veces al dia se levantan ácia nuestro cenit, una vez quando la Luna está encima de las aguas ó en el cenit, y una vez quando está en el nadir; las observaciones manifiestan que la Luna tiene tendencia para apartarse de la tierra igualmente, ó muy poco falta, en ambos sicygies, y para acercársele en ambas quadraturas, lo demostraremos por cálculo, pero tambien se prueba del modo siguiente.

Quando la Luna está en conjuncion, está mas cerca del Sol que la tierra $\frac{1}{380}$; luego es mas atrahida que la tierra $\frac{1}{190}$ de la fuerza con que el Sol obra en la tierra, (porque la diferencia de los quadrados es dupla de la de las raices quando esta es muy corta *); luego su pesantez ácia

* Si en $1+\alpha$ y $1+\beta$ fuesen α y β cantidades muy pequeñas, el quadrado de cada una de ellas se reducirá á $1+2\alpha$, $1+2\beta$, porque podremos despreciar α^2 y β^2 por muy pequeñas. Luego $1+2\alpha-(1+2\beta)=2\alpha-2\beta$ dupla de $\alpha-\beta$ diferencia de las raices $1+\alpha$, $1+\beta$.

Fig. ácia la tierra es $\frac{1}{190}$ menor. Verdad es que quando la Luna está llena ó en oposicion es atrahida ácia el mismo lado por el Sol y la tierra; pero no se sigue de aquí que su pesantez crezca; con efecto, si en este caso la Luna y la tierra fuesen atrahidas por el Sol, cabalmente con una misma fuerza, no se seguiría de aquí alteracion ninguna en la gravedad de la Luna ácia la tierra, ni en su movimiento al rededor de la tierra, bien que la Luna fuese atrahida ácia un mismo lado por dicha suma de las dos fuerzas; pero la tierra es atrahida $\frac{1}{190}$ mas que la Luna, luego la tierra procura huir de la Luna, tanto como la Luna procuraba apartarse de la tierra quando era nueva; su enlace, su union mutua, su tendencia recíproca, su sympatía, su atraccion padecen el mismo decremento quando el Sol aparta la tierra de la Luna, que quando aparta la Luna de la tierra. Luego así en oposicion como en conjuncion, la pesantez mengua, y la Luna procura apartarse de la tierra; por la misma razon las aguas de la mar se levantan ácia el cenit, aunque la Luna esté en el nadir.

130 La fuerza del Sol en un planeta que gira al rededor de él, cuya fuerza llamamos $\frac{S}{r^2}$ (101) no es la única á la qual sea menester atender quando se quiere determinar el movimiento de un planeta al rededor del Sol, ó el movimiento qual le vería un observador puesto
22. en el centro del Sol. El planeta *T* tambien atrahe al Sol en direccion contraria, con una fuerza $\frac{T}{r^2}$, y si se supone

ne el Sol fijo, se le debe atribuir al planeta un movimiento mas ácia el Sol, igual al del Sol ácia el planeta, ó lo que es lo propio, se debe suponer que el Sol atrahe al planeta con una fuerza $\frac{S+T}{r^2}$, esto es, con la suma de las masas del Sol y del planeta. Fig. 22.

131 El efecto de esta atraccion del planeta *T* en el Sol *S*, es hacer que el Sol ande una elipse chica al rededor del centro comun de gravedad del Sol y del planeta; por lo menos en el supuesto de que se le haya dado al Sol un impulso al rededor del mismo centro. Esta atraccion ocasiona parte de las cortas desigualdades del movimiento aparente del Sol, que se calculan con tomar la diferencia de las atracciones con que cada planeta obra en el Sol y en la tierra. Segun Newton las atracciones planetarias deben mudar algun tanto al Sol de su lugar; pero la forma de cálculo que se estila en la Astronomía, pide que se suponga el Sol siempre fijo, y se le dé á cada planeta el movimiento que ocasiona en el Sol, de modo que sea siempre la misma la situacion del planeta respecto del Sol.

132 Por medio de la resolucion (IV.75) de las fuerzas atractivas, se pueden determinar las fuerzas perturbatrices que obran en un planeta, refiriéndolas á la misma direccion de su movimiento. Daremos un egemplo de esta determinacion respecto de la tierra que es atrahida de Júpiter, é indagaremos la desigualdad que esta atraccion causa en el movimiento de la tierra.

Sea

Fig. 22. Sea AT la órbita de la tierra, que es el planeta turbado; BR, la de Júpiter que es el planeta perturbador; y para que nos salgan menos complicados los cálculos, supongamos las dos órbitas en un mismo plano. Sea M la masa del planeta perturbador; t, el ángulo RST, ó el ángulo de comutacion (VII.629); Júpiter puesto en R atrahe la tierra T con una fuerza $\frac{M}{RT^2}$ (101); no tomamos aquí la suma de las masas de Júpiter y de la tierra, porque no llevaremos en cuenta las turbaciones de Júpiter.

La fuerza $\frac{M}{RT^2}$ se debe resolver en otras dos, tales que la una obre de T á G, ó de S á R; á fin de poder restar de ella la fuerza de Júpiter en el Sol (129), y la otra de T á S; la primera que es $M.\frac{RS}{RT^3}$, obra para apartar al planeta del Sol en la direccion TG ó SR que la es paralela, y por esta razon la damos el signo negativo; la segunda fuerza que es $\frac{M.TS}{RT^3}$, obra para arrimar la tierra al Sol, y por esta razon la daremos el signo $+$. La segunda de estas dos fuerzas está en la direccion del radio vector TS, al qual llevamos ánimo de referir el movimiento de la tierra, y por lo mismo no pide ninguna nueva resolucion.

133 La fuerza $\frac{M.RS}{RT^3}$ ó $\frac{M.TG}{RT^3}$ que no está en la direccion del radio vector, ni en la direccion del movimiento de la tierra, se debe referir á dicha direccion; pero primero se debe restar de ella la fuerza del Sol, porque la fuerza TG no turba el movimiento de la tierra, sino en razon de lo que es mayor ó menor que la que

obra

obra al mismo tiempo en el Sol desde *S* ácia *R*. Pero es- Fig.
ta fuerza en el Sol es $\frac{M}{SR^2}$ (130); se debe, pues, res- 22.
tar de la fuerza *TG* que es $\frac{M.SR}{RT^3}$; y será $\frac{M.SR}{RT^3} - \frac{M}{SR^2}$ la fuerza perturbatriz, en la direccion *SR* ó *TG*; se la debe resolver en las dos *TE* y *TB*, multiplicándola por el coseno y el seno del ángulo *GTE* ó *RST* (IV.81), esto es, del ángulo *t*. La fuerza en la direccion *TE* obrará en la direccion *STE* del radio vector de la tierra, pero en una direccion contraria á la fuerza central del Sol; por cuyo motivo tambien será negativa; suponiendo positiva la fuerza central del Sol, porque siempre es la mayor; la otra fuerza obrará de *T* ácia *B*, y su accion se encaminará á disminuir la velocidad de la tierra, que se supone que va de *A* á *T*, por cuyo motivo tambien será negativa. Es, pues, la primera $-\left(\frac{M.SR}{RT^3} - \frac{M}{SR^2}\right)\cos t$ (IV.81), esta fuerza se dirige ácia el Sol, y la otra $-\left(\frac{M.SR}{RT^3} - \frac{M}{SR^2}\right)$. sen *t*, esta es la fuerza que obra perpendicularmente al radio vector, y la llamaremos Π. El signo $-$ se transformaría en $+$, si buscáramos las desigualdades del planeta *R*, porque el punto *R* está menos adelantado en el orden de los signos que el punto *T*, y los planetas mas distantes caminan siempre mas despacio.

134 Por lo que mira á la fuerza dirigida ácia el Sol, recordaremos que, segun hemos hallado, una de sus partes es $+\frac{M.TS}{RT^3}$ (132); á la qual hemos de añadir la que acabamos de hallar, porque tiene la misma direccion, y tendremos por fin la fuerza perturbatriz dirigida al cen-

 tro

Fig. 22. tro del Sol $\Phi = + \frac{M.TS}{RT^3} - \left(\frac{M.SR}{RT^3} - \frac{M}{SR^2}\right) \cos t$. Para hacer uso de las fuerzas Φ y Π, es preciso conocer el valor de M, esto es, la masa de Júpiter comparada con la del Sol; hallamos antes que es $= \frac{1}{1067}$ (107).

135 Estas fuerzas Φ y Π están espresadas en partes de la fuerza central del Sol S en la tierra T; porque quando decimos que la fuerza de Júpiter es $\frac{M}{RT^2}$, suponemos que la masa M está espresada en partes de la masa del Sol (106), y la distancia RT en partes de la distancia media ST del Sol á la tierra; por manera que llamamos 1 la fuerza con que el Sol obra en la tierra, atrayéndola, quando está á su distancia media. Supongamos que $M = \frac{1}{1000}$, y $RT = 5$, será $\frac{M}{RT^2} = \frac{1}{25000}$ (102); esto quiere decir que la fuerza de Júpiter en la tierra es $\frac{1}{25000}$ de la fuerza central con que el Sol obra en la tierra. Por medio de la razon que hay entre estas dos fuerzas de Júpiter y del Sol, se sacará la razon entre los espacios que hacen andar, y por consiguiente la turbacion que padece el movimiento de la tierra en su órbita.

136 El valor $\frac{M.TS}{RT^3}$ nos está diciendo que la fuerza perturbatriz que obra en la direccion TS del radio vector, y modifica la fuerza central del planeta, mengua en razon inversa del cubo de las distancias, conforme supusimos (114). Veremos dentro de poco que el segundo término de la fuerza Φ combinado con el primero, dá una fuerza total en la direccion ST que tambien es en razon inversa del cubo de la distancia. Es-

tá

ta es la razon porque hemos supuesto que la fuerza de la Fig.
Luna para levantar las aguas del mar, sería menor si estuviera tan lejos como el Sol, en la razon que el cubo de la distancia del Sol es mayor que el cubo de la distancia de la Luna, porque la fuerza que levanta las aguas de la mar es una fuerza resuelta en la direccion *TS* del radio de la tierra.

137 Despues de resuelta y espresada así de un modo general la fuerza de un planeta en otro, vamos á indagar el efecto que obrará en el movimiento del planeta turbado. No basta saber que para un momento dado la fuerza con que Júpiter altera el movimiento de la tierra es $\frac{1}{25000}$ de la del Sol que detiene la tierra en su órbita; es preciso saber qué efecto habrá causado en el movimiento de la tierra esta fuerza quando hubiere obrado una infinidad de momentos, esto es, al cabo de un tiempo finito; quanto habrá aumentado ó disminuido la velocidad de la tierra en su órbita, quanto habrá mudado el plano de la misma órbita, espresando todos estos efectos en minutos y segundos, conforme se estila en las tablas Astronómicas. En esto consiste la dificultad de la *cuestion de los tres cuerpos* que consiste en *determinar los movimientos de tres cuerpos M, M' M'' que se atraben mutuamente en razon directa de sus masas, y en la razon inversa de una potencia* n *de las distancias*; la fuerza perturbatriz para cada instante es conocida, pero es preciso determinar 1.° su efecto en el mismo instante para alterar la órbita 2.° la suma

Fig. ma de estos efectos repetidos una infinidad de veces; para esto es indispensable el cálculo integral. Conocemos el efecto de un momento, y hemos de determinar el efecto de tres meses, de un año, de una revolucion, ó de un espacio qualquiera de tiempo, durante el qual dicho efecto no es uniforme ni proporcional al tiempo.

23. 138 Empezaremos reduciendo á equaciones la cuestion de los tres cuerpos. Sea P un planeta que se mueve al rededor del Sol S; PA, el arco elemental de su órbita que ha andado en un instante infinitamente pequeño, y suponemos igual á una linea recta infinitamente pequeña; AB, una linea recta igual á AP, que el planeta andaría en el instante siguiente, si estuviera libre (IV. 11 y 12); hemos de determinar qual sería el radio SB y el ángulo ASB en este caso; comparando entonces el ángulo ASB con el que el planeta anda verdaderamente, hallarémos el efecto de las fuerzas que obran en él para aumentar ó disminuir el ángulo de su movimiento. Comparando igualmente la distancia SB que se verificaría en el caso del movimiento libre y uniforme, con la que corresponde al movimiento actual del planeta, conocerémos el efecto de las fuerzas que obran para aumentar ó disminuir la distancia ó el radio vector.

Sea $SP = r$, el ángulo $PSA = du$; despues de tirar PE perpendicular á SA, será AE la diferencia entre SP y SA, porque suponemos que el arco PE trazado desde el centro S se confunda con la perpendicular á SA, de

la

la qual no discrepa sino un infinitamente pequeño de Fig.
quarta orden (VII.49). Por consiguiente $AE = dr$, 23.
$SA = r + dr$; el arco PE tambien será $= rdu$ (VII.44), esta cantidad es un quebrado de la distancia r, suponiendo siempre que el ángulo du es un quebrado de los 57° que componen el valor del arco igual al radio; tiraremos BH paralela á AS, AH perpendicular á BH, y tendremos $AH = PE$ y $AE = BH$, porque los triángulos ABH y PAE son de todo punto iguales; hemos de buscar el valor de GH, restarle de AH para sacar AG, de donde inferiremos el ángulo ASG ó ASB que buscamos.

Primero probaremos que el ángulo ASB no discrepa del ángulo ASP sino un infinitamente pequeño de segunda orden. Despues de prolongada SP hasta M, bajaremos la perpendicular BM á PM, y la AO perpendicular á MB; en los triángulos semejantes BAO, BPM, $BA = AP$, luego $BO = OM$; pero la linea SAD forma con la verdadera perpendicular AO un ángulo $OAD = PSA$, infinitamente pequeño de primera orden; luego OD es un infinitamente pequeño de segunda orden (VII.34); luego BD no discrepa de DM sino un infinitamente pequeño de segunda orden. Lo mismo decimos de los ángulos PSA, ASB, cuya medida son los arcos BD y MD.

Los triángulos EPS, BGH son semejantes, porque ambos son rectángulos, y el ángulo $GBH = ASB$ no discrepa del ángulo ASP sino un infinitamente pequeño de segunda orden, lo que solo causaría en el valor de GH

Fig. un error de tercera orden (VII. 34); tendremos, pues,
23. esta proporcion $SP : PE :: BH$ ó $AE : GH$, esto es, $r : rdu :: dr : GH$; luego $GH = drdu$, cuya cantidad tambien es un quebrado del radio r; luego $AG = AH - GH = rdu - drdu$; el ángulo ASB ó ASG es igual al arco AG dividido por el radio AS (VII. 44) $= \frac{AG}{AS} = \frac{rdu - drdu}{r + dr}$; se hará la division, desechando las cantidades de tercera orden; saldrá el cociente ó el valor del ángulo ASB, $du - \frac{2drdu}{r}$; este es el ángulo que el planeta P hubiera andado, siguiendo con libertad la linea recta PAB.

139 Para determinar igualmente el radio vector SB, buscaremos tambien el valor de FG, diciendo $SP : PE :: AF$ ó $PE : FG$, esto es, $r : rdu :: rdu : FG$; luego $FG = rdu^2$. Por consiguiente la distancia $SB = SP + EA + GF + GB$ ó su igual BH, $= r + dr + rdu^2 + dr = r + 2dr + rdu^2$. Este es, pues, el valor de la distancia SB del planeta al Sol, la que se verificaría si hubiese andado $AB = PA$, libremente y en el mismo intervalo de tiempo que habia andado PA; tendríamos $SB = r + 2dr + rdu^2$ y el ángulo $ASB = du - \frac{2drdu}{r}$. Veamos que diferencia ocasionará en estas cantidades el efecto de las fuerzas que hemos de considerar.

140 Como el movimiento del planeta es de suyo desigual, y á mas de esto le alteran atracciones estrañas, el planeta en vez de llegar á B, se hallará en un punto K; la espresion del ángulo ASK que andará realmente es

en

en general $du + ddu$, porque no tenemos por ahora, nin- Fig. 1 gun modo para espresar la desigualdad de un ángulo va- 23. riable du, ó su incremento, esto es, la diferencial de du, sino llamándola ddu (III.423 y sig.). Si del valor del ángulo $ASK = du + ddu$, restamos el ángulo $ASB = du - \frac{2drdu}{r}$, sacaremos $ddu + \frac{2drdu}{r}$, que será el valor del ángulo BSK; pero el arco LK es igual al ángulo multiplicado por el radio (VII.44), esto es, por $SL = r$; luego $LK = rddu + 2drdu$, este es el espacio andado perpendicularmente al radio vector, á influjos de la fuerza perturbatriz Π que obra en el planeta (133). Este espacio es un quebrado del radio r, por ser r multiplicada por una corta fraccion de r, y por otros quebraditos du ó ddu, que en la multiplicacion no dan sino quebrados del radio.

141 La espresion de la verdadera distancia SK del planeta al Sol ha de ser en general $r + 2dr + ddr$ (porque el incremento del radio PS en llegando á ser SA será dr, y en llegando á ser SK será $dr + ddr$); se restará este verdadero radio vector SK ó SL, del radio SB que se verificaría si el planeta hubiese caminado uniformemente por PAB; y tendremos $BL = rdu^2 - ddr$ que tambien es un corto quebrado de r. Este es el efecto de la fuerza perturbatriz Φ que obra de B ácia S, junta con la fuerza central del Sol, igual á $\frac{S}{r^2}$ (siendo S la masa del Sol); porque el total de la fuerza dirigida ácia S, es lo que produce la cantidad BL que el planeta se acerca al

 cen-

Fig. centro. Para mayor puntualidad, S debe ser la suma de
23. las masas del Sol y de la tierra.

142 Siempre que una fuerza atractriz obra sin discontinuar un instante dt, los espacios que hace andar siempre son como los quadrados de los tiempos (28); luego la fuerza Π multiplicada por el quadrado del tiempo dt que obra, es igual al espacio LK que hace andar perpendicularmente al radio vector; luego $\Pi dt^2 = rddu + 2drdu$; esta es la primera equacion de la cuestion de los tres cuerpos.

Lo mismo diremos de la fuerza dirigida al centro S, la qual hace andar BL en el mismo tiempo dt, tendremos $\left(\frac{S}{r^2} + \Phi\right) dt^2 = rdu^2 - ddr$; esta es la segunda equacion diferencio-diferencial de la cuestion de los tres cuerpos. Por medio de estas dos equaciones generales hemos de hallar el radio vector de la órbita turbada, y el ángulo u de la anomalía verdadera, para un tiempo qualquiera. En lugar de dt^2 nos valdremos del movimiento medio dx que es proporcional al tiempo: esto viene á ser lo mismo; porque dt es un quebrado del tiempo de la revolucion (VII. 42) y dx es un quebrado semejante de 360° que forman una revolucion entera.

143 De la segunda equacion se puede sacar una espresion de la fuerza centrífuga, que se verifica en un círculo andado uniformemente; porque si r es constante, el término ddr desaparecerá enteramente, y substituyendo F en lugar de $\frac{M}{r^2} + \Phi$, sacaremos $Fdt^2 = rdu^2$; luego F

=

$=\frac{rdu^2}{dt^2}$, ó $\frac{rrdu^2}{rdt^2}$; pero $\frac{rrdu^2}{dt^2}$ es el quadrado de $\frac{rdu}{dt}$, ó del arco elemental dividido por el tiempo; luego es el quadrado de la velocidad del planeta que el arco PB representa; luego $F=\frac{PB^2}{r}$; esta es la espresion de la fuerza central, ó de la fuerza centrífuga, porque son iguales en el movimiento circular. Esta espresion es dupla de la que dá la propiedad del círculo (32), porque en el cálculo diferencial acabamos de suponer que PA es una linea recta, siendo así que en el método syntético la supusimos circular, con lo que el desvío de la tangente es la mitad menor. De esta diferencia se han originado muchas equivocaciones. Fig. 18.

144 Pasemos á resolver las dos equaciones; la primera es $\Pi dx^2 = rddu + 2drdu$ (142), de la qual sacamos $\frac{rrddu+2rdrdu}{dx} = \Pi rdx$, é integrando (III. 490) $\frac{rrdu}{dx} = f + S.\Pi rdx$, donde se supone dx constante, y f la constante que se añade para completar la integral (III. 500 y sig.); multiplicando por Πrdx, sale $\Pi r^3 du = f\Pi rdx + \Pi rdx$ $S.\Pi rdx$, é integrando $S.\Pi r^3 du = f\,S.\Pi rdx + \frac{1}{2}$ $(S.\Pi rdx)^2$, considerando que $\Pi rdx\,S.\Pi rdx$ es la diferencial de $\frac{1}{2}(S.\Pi rdx)^2$; se resolverá esta equacion añadiendo f^2 á cada miembro, y sacando la raiz de ambos, saldrá $f + S.\Pi rdx = \sqrt{(f^2 + 2S.\Pi r^3 du)}$; haciendo $\frac{S.\Pi r^3 du}{f^2} = \rho$, ó $S.\Pi r^3 du = f^2\rho$, y diferenciando (III. 334), sale $\Pi rdx = \frac{2\Pi r^3 du}{2\sqrt{(f^2+2S.\Pi r^3 du)}}$, $dx =$ $\frac{rrdu}{f\sqrt{(1+2\rho)}}$; este es el elemento del tiempo, ó de la longi-

Fig. gitud media, que resolveremos mas adelante en conociendo la razon entre las otras dos incógnitas r y u.

145 Consideremos la segunda equacion (142) $rdu^2 - ddr = \left(\frac{S}{rr} + \Phi\right)dx^2$ ó $\frac{rdu^2}{dx^2} - \frac{ddr}{dx^2} = \frac{S}{rr} + \Phi$, que hemos de integrar para sacar el valor de r. Consideraremos desde luego que en esta equacion no hay mas diferencial de segunda orden que la del segundo término $\frac{ddr}{dx^2}$, cuyo término es lo mismo que $d\left(\frac{dr}{dx}\right)$, dividido por dx, suponiendo dx constante. Pero para hacer mas general la equacion, y que nos quede arbitrio para suponer constante una de las demas incógnitas como du, que nos acomodará mas en el discurso del cálculo, hemos de espresar la equacion propuesta de un modo que no suponga constante dx, para lo qual basta escribir $\frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx}$ (8); luego la segunda equacion será $\frac{rdu^2}{dx^2} - \frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx} = \frac{S}{rr} + \Phi$, en la qual es menester substituir el valor de $\frac{rdu^2}{dx^2}$. Tomaremos el de $dx = \frac{r^2du}{f\sqrt{(1+2\rho)}}$ (144), $\frac{du}{dx} = \frac{f\sqrt{(1+2\rho)}}{rr}$; $\frac{du^2}{dx^2} = \frac{f^2}{r^4}(1+2\rho)$; $\frac{rdu^2}{dx^2} = \frac{f^2}{r^3} \times (1 + 2\rho)$; este es el valor del primer término del qual haremos uso dentro de poco.

Tambien hemos de buscar el valor del segundo término $d\left(\frac{dr}{dx}\right)$; por medio del valor de $\frac{du}{dx}$ tendremos el de $\frac{dr}{dx}$

Fig.

$\frac{dr}{dx}$, con multiplicar $\frac{f\sqrt{(1+2\rho)}}{rr}$ por $\frac{dr}{du}$, quiero decir que $\frac{dr}{dx} = \frac{fdr}{rrdu}\sqrt{(1+2\rho)}$. Tendremos que dividir por dx su diferencial $d\left(\frac{dr}{dx}\right)$, pero la diferencial de $\frac{fdr}{rrdu} \times \sqrt{(1+2\rho)}$ (III. 326 y 334) es $\frac{fddr}{rrdu}\sqrt{(1+2\rho)} + \frac{fdrd\rho}{rrdu\sqrt{(1+2\rho)}} - \frac{2frdr^2}{r^4du}\sqrt{(1+2\rho)}$, suponiendo du constante; dividiendo por el valor de dx, ó $\frac{r^2du}{f\sqrt{(1+2\rho)}}$, sacaremos los cinco términos siguientes $\frac{f^2ddr}{r^4du^2}(1+2\rho) + \frac{f^2drd\rho}{r^4du^2} - \frac{2f^2dr^2}{r^5du^2}(1+2\rho)$ que formarán el valor de $\frac{d\left(\frac{dr}{dx}\right)}{dx}$.

Si de este valor restámos el de $\frac{rdu^2}{dx^2}$, esto es, el de $\frac{f^2}{r^3}(1+2\rho)$, tendremos el valor de $\frac{S}{rr} + \Phi$ igual á $\frac{f^2}{r^3}(1+2\rho) - \frac{f^2ddr}{r^4du^2}(1+2\rho) - \frac{f^2drd\rho}{r^4du^2} + \frac{2f^2dr^2}{r^5du^2} \times (1+2\rho)$; esta es la segunda equacion del problema puesta en otra forma; pero $f^2d\rho = \Pi r^3du$, de donde se sigue que $-\frac{f^2drd\rho}{r^4du^2} = -\frac{\Pi r^3dudr}{r^4du^2} = -\frac{\Pi dr}{rdu}$; luego $\frac{S}{rr} + \Phi + \frac{\Pi dr}{rdu} = \frac{f^2}{r^3}(1+2\rho) - \frac{f^2ddr}{r^4du^2}(1+2\rho) + \ldots\ldots \frac{2f^2dr^2}{r^5du^2}(1+2\rho)$; dividiendo por $1+2\rho$, y multiplican-

do

Fig.

do por $\frac{rr}{S}$ tendremos $1 + \frac{\frac{\Phi rr}{S} + \frac{\Pi r dr}{S du}}{1 + 2\rho} = \frac{f^2}{Sr} - \frac{f^2 ddr}{Sr^2 du^2} + \frac{2f^2 dr^2}{Sr^3 du^2} = \frac{\frac{f^2}{Sr} du^2 - \frac{f^2}{Sr^2} ddr + \frac{2f^2 dr^2}{Sr^3}}{du^2}$.

146. Con la mira de simplificar el cálculo supondremos el primer miembro $1 + \frac{\frac{\Phi rr}{S} + \frac{\Pi r dr}{S du}}{1 + 2\rho} = 1 + \Omega = \frac{\frac{f^2}{Sr} du^2 - \frac{f^2}{Sr^2} ddr + \frac{2f^2 dr^2}{Sr^3}}{du^2}$, ó lo que viene á ser lo propio, $\Omega = \frac{\frac{\Phi rr}{S} + \frac{\Pi r dr}{S du} - 2\rho}{1 + 2\rho}$. Pero $\frac{f^2 ddr}{Sr^2} - \frac{2f^2 dr^2}{Sr^3}$ es la diferencial de $\frac{f^2 dr}{Srr}$ (III. 329); luego $1 + \Omega = \frac{\frac{f^2}{Sr} du^2 - d\left(\frac{f^2 dr}{Sr^2}\right)}{du^2}$. Hagamos el primer término de $1 + \Omega$ ó $\frac{f^2}{Sr} = 1 - s$, tendremos $ds = \frac{f^2 dr}{Sr^2}$ (III. 329), y $dds = d\left(\frac{f^2 dr}{Sr^2}\right)$ que es el valor de los dos últimos términos; luego $1 + \Omega = 1 - s - \frac{dds}{du^2}$ y $s + \frac{dds}{du^2} + \Omega = 0$. Esta es la equacion que hemos de integrar; puesta en la forma la mas sencilla, á la qual se reduce principalmente la cuestion de los tres cuerpos.

147. Dentro de poco veremos que Ω se reduce á términos como $a.\cos pu$, esto es, que no llevan sino cosenos de múltiplos de u (157). Integraremos, pues, esta equacion, suponiendo $s + \frac{dds}{du^2} + a.\cos pu = 0$.

Da-

148 Dada la equacion que se debe integrar $s + \frac{dds}{du^2}$ Fig. $+ a . \cos. pu = 0$, se la multiplicará por $du . \cos u$, y saldrá $sdu . \cos u + \frac{dds . \cos u}{du} + adu . \cos pu . \cos u = 0$. Luego (II. 378) $sdu . \cos u + \frac{dds . \cos u}{du} + \frac{1}{2} adu . \cos (p + 1) u + \frac{1}{2} adu . \cos (p - 1) u = 0$. Por la regla ordinaria (16) sacarémos que la integral de esta equacion es $s . \text{sen } u + \frac{ds}{du} . \cos u + \frac{a}{2(p+1)} \text{sen } (p + 1) u + \frac{a}{2(p-1)} \text{sen } (p - 1) u = g$, g es la constante que se debe añadir.

149 En lugar del seno de la suma de los ángulos u y pu, substituirémos su valor (I. 655) $\text{sen } pu . \cos u + \text{sen } u . \cos pu$, y en lugar del seno de la diferencia, substituirémos su valor (I. 655) $\text{sen } pu . \cos u - \text{sen } u . \cos pu$, y sacarémos $s . \text{sen } u + \frac{ds}{du} . \cos u + \frac{a}{2(p+1)} . \text{sen } pu . \cos u + \frac{a}{2(p+1)} . \text{sen } u . \cos pu + \frac{a}{2(p-1)} . \text{sen } pu . \cos u - \frac{a}{2(p-1)} . \text{sen } u . \cos pu = g$; pero $\frac{1}{p+1} + \frac{1}{p-1} = \frac{p - 1 + p + 1}{pp - 1} = \frac{2p}{pp-1}$, y $\frac{1}{p+1} - \frac{1}{p-1} = \frac{p - 1 - p - 1}{pp - 1} = \frac{-2}{pp-1}$; luego tendrémos $s . \text{sen } u + \frac{ds}{du} . \cos u + \frac{ap}{pp-1} \text{sen } pu . \cos u - \frac{a}{pp-1} \text{sen } u . \cos pu - g = 0$; multiplicando por $\frac{du}{\cos u^2}$, la equacion se transforma en $\frac{sdu . \text{sen } u}{\cos u^2} + \frac{ds}{\cos u} + \frac{apdu . \text{sen } pu}{(pp-1) . \cos u} - \frac{adu . \cos pu . \text{sen } u}{(pp-1) \cos u^2} - \frac{gdu}{\cos u^2} = 0$.

150 La integral de los dos primeros términos $\frac{sdu . \text{sen } u}{\cos u^2} + \frac{ds}{\cos u}$ es $\frac{s}{\cos u}$ (7). La integral de los dos términos siguientes es $\frac{-a . \cos pu}{(pp-1) \cos u}$ (III. 329), pero se la debe añadir $\frac{a}{pp-1}$ (III. 501). La integral del último término es $g . \text{tang } u$ (III. 359) ó $\frac{g . \text{sen } u}{\cos u}$. Luego toda la integral es $\frac{s}{\cos u} - \frac{a . \cos pu}{(pp-1) \cos u} + \frac{a}{pp-1} - \frac{g . \text{sen } u}{\cos u} = b$; esta es una cons-

Fig. constante que se debe añadir para completar la integral (III. 423). Multiplicando por cos u, sacaremos $s - \frac{a}{pp-1}$. cos $pu + \frac{a}{pp-1}$. cos $u - g$. sen $u = b$. cos u, y substituyendo en lugar de s su valor $1 - \frac{f^2}{Sr}$ (146), sacaremos finalmente esta equacion $\frac{f^2}{Sr} = 1 - g.\ \mathrm{sen}\ u - b.\ \mathrm{cos}\ u + \frac{a}{pp-1}.\ \mathrm{cos}\ u - \frac{a}{pp-1}.\ \mathrm{cos}\ pu$, que llamaremos la equacion de la órbita turbada.

151 Esta equacion de la órbita turbada lleva tres términos, es á saber, $1 - g.\ \mathrm{sen}\ u - b.\ \mathrm{cos}\ u$, que son los mismos que en la equacion de una elipse vulgar (VII. 86), cuyo parámetro fuese $\frac{f^2}{S}$; los dos últimos términos son la alteracion que las fuerzas perturbatrices causan en la equacion de la órbita, ó el efecto de las fuerzas Π y Φ. Tiene, pues, esta resolucion la circunstancia de espresar con una misma equacion, en términos separados, una órbita elíptica, y una órbita turbada.

152 Si supusiéramos $\Omega = a.\ \mathrm{cos}\ pu + \mathrm{cos}\ mu$, sacaríamos para la correccion de $\frac{P}{r}$ los mismos términos, y á mas de esto los dos siguientes $\frac{1}{(m^2-1)}.\ \mathrm{cos}\ u - \frac{1}{m^2-1}.\ \mathrm{cos}\ mu$. De donde se inferirá que si la espresion de Ω constare de una serie de términos $A.\ \mathrm{cos}\ mu + B.\ \mathrm{cos}\ nu + C.\ \mathrm{cos}\ qu$ &c. (157), la equacion general será $\frac{P}{r} = 1 - g.\ \mathrm{sen}\ u - \left(b - \frac{A}{m^2-1} - \frac{B}{n^2-1} - \frac{C}{q^2-1}, \&c.\right) \mathrm{cos}\ u - \frac{A.\ \mathrm{cos}\ mu}{m^2-1} - \frac{B.\ \mathrm{cos}\ nu}{n^2-1} - \frac{C.\ \mathrm{cos}\ qu}{q^2-1}$, quiero decir que habrá tantos términos cos u, quantos términos hubiere en Ω, y á mas de esto otros tantos términos cos mu, cos nu, cos qu &c.

Por

153 Por lo que mira á los términos que multiplican cos u, y se juntan con el término b. cos u que hay en la equacion de una elipse vulgar (VII. 86), afectarán la elipse que anda el planeta, pero la afectarán constantemente; y como esta elipse es determinada por las observaciones, y nos importa poco saber quál hubiera sido la excentricidad en el supuesto de que los planetas turbadores no se hubiesen criado, no tendremos que atender á estos términos cos u al tiempo de calcular las desigualdades periódicas; nos contentaremos con los términos mu, nu que turban dicha órbita, y son causa de que no es una elipse inmobil (118, &c.). Fig.

154 Despues de hallado el valor de $\frac{f}{r}$ (152), se puede buscar el elemento del tiempo $dx = \frac{rrdu}{f(\sqrt{1+2\rho})}$ (144) que solo lleva funciones de r y u. Hemos llamado (151) $\frac{f^2}{S}$ el parámetro de la órbita turbada, que suponemos determinado por observacion, é igual á p; luego $f^2 = pS$ y $dx = \frac{rrdu}{\sqrt{(f^2+2f^2\rho)}} = \frac{rrdu}{(\sqrt{pS+2pS\rho})}$; pero suponemos $S = 1$, porque todas las masas son espresadas en partes de S, que es la masa central, esto es, la masa del Sol, quando se trata de las desigualdades de los planetas principales, y la de la Tierra quando se trata de las desigualdades de la Luna. Tambien suponemos $p = 1$, porque la órbita es casi concéntrica; quiero decir, que el parámetro no discrepa del ege mayor sino una cantidad mucho

Fig. cho menor que la excentricidad; luego $dx = \frac{rrdu}{\sqrt{(1+2\rho)}}$ $= rrdu\,(1+2\rho)^{-\frac{1}{2}} = rrdu\,(1-\rho)$, omitiendo los términos ulteriores de la serie (II.99).

155 La propiedad de la elipse dá $\frac{1}{r} = 1 - e.$ $\cos mu$ (VII.85), ó $\frac{1}{r} = 1 - e.\cos mu + Z$, llamando Z la correccion de $\frac{1}{r}$ que hallamos por medio de las fuerzas perturbatrices (152); inferiremos de aquí el valor de rr. Para este fin haremos los dos términos $1 - e.\cos mu = a$; y elevando $a + Z$ á la potencia -2, tendremos $r^2 = a^{-2} - 2a^{-3}.Z$; pero $a^{-2} = 1 + 2e.$ $\cos mu$, y $a^{-3} = 1 + 3e.\cos mu$, despreciando los términos ulteriores de la serie, que llevarian e^2; luego $r^2 =$ $1 + 2e.\cos mu - 2Z - 6eZ.\cos mu$. Substituyendo este valor de rr en la espresion $dx = rrdu\,(1-\rho)$; y despreciando los términos donde está el producto de las dos cantidades pequeñas Z y ρ, saldrá $dx = (1 + 2e.$ $\cos mu - 2Z - 6eZ.\cos mu - \rho - 2e\rho.\cos mu)\,du$; luego los términos variables de esta espresion son $-(2Z$ $+ \rho)du - 2e(3Z + \rho).\cos mudu = dx$; esta es la correccion del elemento del tiempo ó de la longitud media, aun para el caso de llevar en cuenta en el cálculo la excentricidad del planeta.

156 Todas las cantidades que estos cálculos determinan son quebrados cortos del radio de la órbita que hemos tomado por unidad; las fuerzas Π y Φ son quebrados de la fuerza del Sol á la distancia 1, ó á la distancia media

dia del Sol al planeta turbado, quando se trata de un planeta principal qual es Júpiter; su masa es un quebrado de la masa del Sol, y su distancia á la Tierra un quebrado de la distancia al Sol. Por consiguiente la fuerza que resulta de esta masa dividida por el quadrado de la distancia es tambien un quebrado de la fuerza del Sol; pero no se ha hallado sino en partes del radio el espacio andado en virtud de estas fuerzas; es á saber, $rddu + 2drdu$ para la fuerza Π, y $rdu^2 - ddr$ para la fuerza $\frac{M}{rr} + \Phi$ (142); todos estos términos llevan r ó ddr, luego estos espacios no quedan determinados sino en partes del radio r. Lo propio diremos de $S.\Pi r^3 du = p$, que es igual á r^3 multiplicado por un quebrado de la fuerza Π; luego p es un quebrado de r^3, esto es de la distancia; lo mismo decimos de Ω, cuyas partes todas multiplican á r, y son quebrados de r; por consiguiente la cantidad Z que se compone de Ω, es tambien un quebrado de la distancia r, y por este motivo se multiplicará el último resultado por 200000 para sacar el número de segundos que llevará (VII.46).

Fig. 1

157 Con suponer $\Omega = a.\cos pu$ (152) tenemos la equacion de la órbita turbada; ahora hemos de probar que la espresion de Ω se ha de componer con efecto de una serie de términos, como $\cos pu$, ó $\cos mu$. Para este fin es preciso valuar las fuerzas Φ y Π que componen la fuerza Ω. La fuerza Φ es igual á la masa del planeta perturbador, multiplicada por $\frac{TS}{RT^3} - \left(\frac{RS}{RT^3} - \frac{1}{SR^2}\right).\cos t$ (134); esta fuerza es muy variable, porque pende de

Fig. 22. quatro variables. 1.° De la distancia TS, ó del radio vector del planeta turbado. 2.° Del radio vector RS del planeta perturbador. 3.° De la distancia RT que hay entre los dos planetas. 4.° Del ángulo de comutacion t, ó RST que forman los dos radios vectores. Para simplificar esta espresion será menester buscar un medio de espresar todas estas variables, con la sola anomalía u del planeta turbado; quiero decir, que se deberá determinar, por aproximacion por lo menos, la razon que hay entre u y las tres variables que lleva la espresion de la fuerza Φ.

Aplicaremos estas aproximaciones, averiguando primero una de las desigualdades que el Sol causa en el movimiento de la Luna, y despues una de las que Júpiter ocasiona en el movimiento de la Tierra; ó lo que es lo mismo, en el lugar aparente del Sol. En esto no llevamos otra mira que la de hacer patentes los principios, é imponer á los lectores en el espíritu ó el alma de los métodos, por este motivo haremos su aplicacion con brevedad; bastará sin embargo lo que especificaremos para que un lector laborioso pueda llevar mas adelante su aplicacion, una vez hecho cargo de los dos egemplos que siguen, y del cálculo que les corresponde.

De las desigualdades de la Luna.

158 Son tantas y tan varias las desigualdades de la Luna, que para determinarlas se necesitaría una multitud monstruosa de términos. No podemos engolfarnos en este por me-

menor, pero daremos á conocer las dificultades que acompañan á esta indagacion, y añadiremos el cálculo de la variacion, que hasta ahora nadie ha enseñado como se calcula en números por el principio de la atraccion. Fig.

El centro S representará la Tierra; AT, la órbita de la Luna al rededor de la Tierra, que suponemos fija en S; BR, la órbita aparente que el Sol anda al parecer en un año al rededor de la Tierra; suponemos estas dos órbitas concéntricas, y en el mismo plano, con la mira de simplificar el cálculo. La fuerza $\Pi = -\left(\frac{M.SR}{RT^3} - \frac{M}{SR^2}\right)$ sen t (133), se puede reducir á una forma mucho mas simple, por razon de la gran distancia de la Luna; porque con bajar la TC perpendicular al radio que vá desde la Tierra al Sol, se saca RT sensiblemente igual á RC; luego $RT = SR - SC = SR - ST$. cos t; luego $\frac{1}{RT^3} = (SR - ST . \cos t)^{-3} = \frac{1}{SR^3} + \frac{3ST.\cos t}{SR^4}$ (II.99); luego $\frac{M.SR}{RT^3} = \frac{M}{SR^2} + \frac{3M.ST}{SR^3}$. cos t; luego $\Pi = -\frac{3M.ST}{SR^3}$. cos t. sen t $= -\frac{3M.ST}{2SR^3}$. sen $2t$ (II.378). No atenderemos á la fuerza Φ, porque con suponer la órbita de la Luna circular, esta fuerza afecta mucho menos el movimiento de la Luna en su órbita, que la fuerza Π que es perpendicular al radio vector, y cuyo efecto se gasta todo en alterar la velocidad de la Luna en su órbita, conforme lo declararemos mas por menor en adelante. 22.

159 Llamemos f la distancia del Sol á la Tierra, tomando por unidad la de la Luna á la Tierra, de modo que f sea igual á 380, con corta diferencia. Sea M la masa del

Fig. del Sol, si tomamos por unidad la suma de las masas de la Tierra y de la Luna, tendremos la fuerza $\Pi = -\frac{3M}{2f^3}$. sen $2t$. De aquí hemos de sacar el valor de ρ que se halla en Ω (146); hemos visto como $\rho = S.\frac{\Pi r^3 du}{f^2}$ (144); pero entonces $\frac{f^2}{S}$ era el parámetro (151), por consiguiente si llamamos p el parametro de la órbita, que las observaciones siempre determinan, tendremos $\rho = S.\frac{\Pi r^3 du}{pS}$. Pero ya que la órbita es circular, $p = 1$; tenemos por unidad de las masas la masa S de la Tierra, luego $pS = 1$ y $\rho = S.\Pi r^3 du$; pero r es tambien igual á 1, luego $\rho = S.\Pi du = -\frac{3M}{2f^3}$ S.sen $2tdu$.

Supongamos que el movimiento de la Luna sea al movimiento del Sol como 1 es á $1 - n$, de modo que siendo u el movimiento de la Luna, la diferencia de los movimientos medios del Sol y de la Luna, ó el ángulo de comutacion t sea nu, ($n = 0,9252$), pondremos $2nu$ en lugar de $2t$, y tendremos $\rho = -\frac{3M}{2f^3}$. S. sen $2nudu$, $= + \frac{3M.\cos 2nu}{4nf^3}$ (5).

Tomemos en el valor de Ω (146) el término mayor de todos no mas, es á saber $- 2\rho$, y tendremos $\Omega = -\frac{3M}{2nf^3}$. cos $2nu$; luego la correccion que de esto resultará (152) en la equacion $\frac{p}{r} = 1 - e$. cos mu, &c. será $-\frac{3M}{2nf^3(1-4nn)}$. cos $2nu$.

160 En conociendo el efecto que obra la atraccion en el valor de $\frac{p}{r}$, se debe buscar su efecto en el valor de

dx,

dx, qué es la espresion del tiempo, ó de la longitud media. Fig.
Pero si llamamos Z el término que acabamos de hallar en la equacion de la órbita, el término que de aquí resulta en el valor de x es $-S.(2Z+p)du$ (155); esta es la correccion del valor de la longitud media, ó de la espresion del tiempo; tendremos, pues, que integrar $-\left(\frac{-6M}{2nf^3(1-4nn)}+\frac{3M}{4nf^3}\right)$. cos $2nudu$ (6), y sacaremos $-\frac{3M}{2n^2f^3}\left(\frac{-1}{(1-4nn)}+\frac{1}{4}\right)$. sen $2nu$, que es uno de los términos de la espresion de la longitud media en longitud verdadera; mudará de signo quando espresaremos la longitud verdadera en longitud media; porque si tenemos $x=u-a$, tendremos con corta diferencia $u=x+a$, siendo x el término pequeño que acabamos de sacar; los demas los despreciamos (3).

161 Para espresar este valor en segundos, nos valdremos de los números siguientes, 1.° La distancia del Sol es á la de la Luna como $57' 3''$ es á $9''$; luego $\frac{1}{f^3}=\frac{1}{55016000}$, 2.° La masa M del Sol es 307831 (107), el producto de estas dos cantidades ó $\frac{M}{f^3}$ viene á ser t^2 (109) $=0,005595=\frac{1}{179}$. 3.° El movimiento diurno de la Luna es $13° 10' 35''$, 0, el del Sol es $59' 8''$, 3, la diferencia es $12° 11' 26''$, 7; dividiendo esta diferencia por el movimiento de la Luna que tomamos por unidad, sacaremos $n=\frac{12°11'}{13°10'}=0,9251989$; luego $1-4nn=-2,424$; $\frac{-1}{1-4nn}=+0,41254$, y $-\frac{1}{1-4nn}+\frac{1}{4}=0,66254$; se multiplicará esta cantidad por $\frac{M}{f^3}=t^2$, se la multiplicará

Fig. tambien por $\frac{3}{2n} = 1,75236$, y despues por $57°$ para sacarla en segundos (VII. 46), y sacaremos $+ 22' 20''$. sen $2t$, esta será la equacion que buscamos; discrepa mucho de la que sacó Clairaut que es de $40'$, pero nuestro resultado se debe mirar como una parte no mas de toda la variacion, porque no hemos tomado sino un término de los que forman el valor de Ω.

162 Daremos ahora noticia de las quatro consideraciones importantes que se deben tener presentes en los cálculos rigurosos de la Luna. La primera es la de la inclinacion de la órbita lunar que no hemos llevado en cuenta, pues hemos supuesto el Sol y la Luna en un mismo plano; la espresion de las fuerzas Φ y Π incluye (133) el ángulo t, y supone que t es la diferencia entre la longitud verdadera de la Luna en su órbita, y la longitud verdadera del Sol en la suya. Pero quando se considera la inclinacion, se debe reducir el lugar del Sol al plano de la órbita de la Luna por medio de una perpendicular, y llamando f' la distancia del Sol á la tierra reducida al plano de la órbita lunar, y t' la elongacion de la Luna en el mismo plano, tendremos en la espresion de las fuerzas $\frac{f'}{f}$. cos t en lugar de cos t. En lugar de estas dos cantidades $\frac{f'}{f}$ y cos t' se substituirán sus valores (VII. 29 y 30), y se sacará la espresion de las fuerzas, con el verdadero ángulo t, y la verdadera distancia f del Sol á la tierra, pero los mas de los términos serán multiplicados ó por el coseno de la inclinacion, ó por una funcion del mismo coseno.

El

163 El segundo punto á que hemos dejado de atender es la paralaxe del Sol; con efecto hemos supuesto $RT = RC$, como si el Sol estuviera á una distancia infinita, y fuese verdaderamente nula su paralaxe, del mismo modo que el ángulo *SRT*. Quando se calculan con rigor los puntos correspondientes á la teórica de la Luna, no se hace este supuesto, y se convierte en serie el valor de $\frac{1}{RT^3}$, tomando muchos términos de la serie (2), y substituyendo tambien en lugar del verdadero ángulo *RST* que forman el radio vector del Sol y de la Luna cuyo plano está inclinado á la eclíptica, un valor en que no haya mas que el ángulo t, que se saca quando del lugar verdadero de la Luna en su órbita se resta el lugar del Sol en la suya. Fig. 22.

164 Las desigualdades que resultan de esta consideracion, serán mas reparables al paso que fuere mayor la paralaxe del Sol; por consiguiente estas equaciones calculadas y comparadas con las que dá la observacion, deberían servir para determinar la paralaxe del Sol.

165 La tercera consideracion indispensable en la teórica de la Luna, es la excentricidad del Sol, que ocasiona en sus distancias, respecto de la Luna y la Tierra, notables diferencias, y por lo mismo nuevas desigualdades en el movimiento de la Luna. Pide esta excentricidad que en lugar de la distancia media f, se substituya el radio vector del Sol espresado con su anomalía (50 y VII. 87).

166 Hemos omitido (160) otra consideracion

Fig. que se debe tener presente en los cálculos rigurosos de la Luna. Despues de hallada la espresion del tiempo ó de la longitud media x, por medio de la longitud verdadera u; por egemplo, $x = u + a$. sen mu, ó $u = x - a$. sen mu, siendo el último término una de las equaciones originadas de la atraccion, no se puede suponer $u = x - a$. sen mx, esto es, $x = u$ en el último término, sino quando este último término es muy pequeño. Pero si este último término fuese tan crecido, como sucede en las tres grandes equaciones de la Luna, que su quadrado valiese todavia algunos segundos (vale cerca de dos segundos en la eveccion de la Luna), entonces se debería hacer uso de la cuestion resuelta (3).

167 Despues de considerado el efecto de la fuerza Π perpendicular al radio vector (159), nos falta considerar el efecto de la otra fuerza Φ, que modifica, ó afecta la fuerza central de la Luna. Tenemos $\Phi = \frac{Mr}{RT^3} - \left(\frac{Mf}{RT^3} - \frac{M}{f^2}\right)$. cos t (134); pero $\frac{1}{RT^3} = (f - r.$ cos $t)^{-3}$ por causa de la suma distancia del Sol, $= f^{-3} + 3rf^{-4}$. cos t (II.99) $= \frac{1}{f^3} + \frac{3r \cos t}{f^4}$, luego $-\left(\frac{Mf}{RT^3} - \frac{M}{f^2}\right)$. cos $t = -\left(\frac{M}{f^2} + \frac{3Mrf. \cos t}{f^4} - \frac{M}{f^2}\right)$. cos $t = -\frac{3rM. \cos t^2}{f^3}$; este es el segundo término de Φ. En lugar del primer término $\frac{Mr}{RT^3}$ se puede substituir $\frac{Mr}{f^3}$, porque los demas términos que se sacarían con substituir en lugar de RT su valor $f - r$. cos t, serían mucho menores; luego la fuerza total $\Phi = \frac{Mr}{f^3} - \frac{3rM. \cos t^2}{f^3} = -\frac{Mr}{2f^3} - \frac{3Mr}{2f^3}$. cos $2t$ (II.398).

En

168 En los Sicygies, esto es, quando la Luna es nueva ó llena, tenemos igualmente $2t = 0$ y cos $2t = 1$; por consiguiente dicha fuerza es entonces $-\frac{2Mr}{f^3}$; este es el decremento que la accion del Sol causa en la fuerza central de la Luna, ó su pesantez ácia la tierra, en las conjunciones y oposiciones, esta cantidad viene á ser $\frac{1}{339}$ de la tendencia de la Luna ácia la tierra. Fig.

En la primera quadratura, ó quando la Luna está á 90° de la conjuncion, $2t = 180^\circ$, y en la segunda quadratura $2t = 540^\circ$; entonces cos $t = -1$ (VII. 14), y la fuerza Φ es $+\frac{Mr}{f^3}$; este es el incremento que el Sol ocasiona en la fuerza central de la Luna en las dos quadraturas. Este incremento es la mitad no mas del decremento que se verifica en los Sicygies, pues este es $-\frac{2Mr}{f^3}$. Luego la fuerza perturbatriz pende de la linea r ó de la distancia de la Luna á la Tierra; es tanto mayor quanto mas lejos está la Luna de la Tierra; luego esta fuerza es mayor en el apogeo que en el perigeo. Para que los dos términos $\frac{Mr}{2f^3}$ y $\frac{3Mr}{2f^3}$. cos $2t$, se destruyan, es preciso que cos $2t$ sea $= -\frac{1}{3}$, ó que el ángulo t sea de $54^\circ\ 44'$, porque entonces $2t = 109^\circ\ 28'$, cuyo coseno es negativo (VII. 14), é igual á un tercio del radio, ó 0,333. Síguese de aquí que por causa de la atraccion del Sol la fuerza central de la Luna ácia la Tierra mengua mas tiempo que crece; acabamos de manifestar que la cantidad del decremento es tambien mayor que la del incremento; se puede, pues, decir en suma que la fuer-

Fig. fuerza del Sol disminuye la pesantez de la Luna, ó la atraccion con que la tierra obra en la Luna.

169 Como es muy del caso dar las razones generales de los resultados que el cálculo demuestra, esplicaremos como la perturbacion del Sol causa las tres principales desigualdades de la Luna, es á saber, la eveccion, la variacion, y la equacion anua.

La *Eveccion* es la principal desigualdad que el Sol causa en la Luna (VII.797); equivale, conforme lo supusieron Newton y Halley, á una variacion de excentricidad en la órbita lunar con un movimiento del apogeo (VII.799). Quando el Sol corresponde al apogeo ó al perigeo de la Luna, ó quando la linea de los apsides de la Luna concuerda con la linea de los Sicygies, la fuerza central de la tierra en la Luna que es la menor en el sicygi apogeo, padece el mayor decremento (168), y la fuerza central que es la mayor en el sicygi perigeo padece la menor diminucion; luego la diferencia entre la fuerza central perigea, y la fuerza central apogea será entonces la mayor; luego crecerá la diferencia de las distancias, quiero decir que la excentricidad será mayor. Prueba con efecto la observacion que entonces la máxima equacion de la Luna es de $7^{\circ}\frac{2}{3}$, siendo así que solo era de 5°, quando la linea de las quadraturas concurria con la de los Sicygies.

170 El movimiento del apogeo proviene de que la fuerza central mengua, conforme veremos mas adelante; debe

be ser, pues, máximo quando la linea de los Sicygies concurre con la linea de los apsides, ó quando el Sol corresponde al apogeo ó al perigeo de la Luna; quando está en las quadraturas el movimiento del apogeo es al contrario el mas lento, porque el decremento total de la fuerza central es mínimo. Quando el Sol está á los 45° de los apsides el movimiento verdadero del apogeo es igual con el movimiento medio, pero su lugar verdadero discrepa entonces máximamente de su lugar medio, y la equacion es máxima, porque es el resultado de todos los grados de velocidades que ha adquirido hasta entonces el apogeo. Fig.

Conviene tener presente que el efecto de esta especie de aceleraciones no empieza á verificarse en realidad y en la observacion, hasta que la causa es un máximo, y es máximo quando la causa deja de obrar. Por esta razon en el movimiento elíptico de los planetas el lugar verdadero está mas adelantado quando la aceleracion acaba y empieza el atraso (VII.707), quiero decir á los nueve signos de anomalía.

171 La *Variacion* es la desigualdad de la Luna, que en una órbita supuesta circular se verifica en los octantes, por razon de la fuerza tangencial que obra para acelerar ó atrasar su movimiento. Sea *C* el centro 24. de la Tierra; *O*, el centro del Sol; *DHA*, la órbita de la Luna; quando antes de la conjuncion la Luna está en *H*, es mas atrahida que la tierra, y es atrahida en la direccion *HO*; entonces se acelera su velocidad hasta que

es-

Fig. 124. esté en *A* en su conjuncion, donde la velocidad de la Luna en su órbita es máxima. Quando está ácia *P*, 45° despues de la conjuncion, su longitud verdadera es la mas adelantada, una cantidad llamada *Variacion*, que es de 37′ aditiva (VII.807): verdad es que cesa la aceleracion y empieza el atraso de la velocidad de la Luna, luego que la Luna ha pasado el punto *A*, porque habiendo atrahído el Sol á la Luna mas de lo que atrahía á la tierra mientras iba desde *H* á *A*, ha aumentado mas y mas su velocidad hasta *A* donde cesa de aumentar dicha velocidad; pero el punto *A* es donde esta velocidad ha sido máxima, porque hasta allí no ha dejado de ser acelerada. Desde el punto *A*, tirando el Sol ácia *O* obra para disminuir la velocidad, pero el exceso que la velocidad adquirida lleva á la velocidad media, dura hasta el octante *P*, 45° despues de la conjuncion, donde la velocidad verdadera es igual con la media. Esta es la razon porque la equacion de la variacion es aditiva, y máxima, á los 45° de la conjuncion donde la velocidad es la mayor.

172 La *Equacion anua* de la Luna que llega hasta 11′ $\frac{1}{4}$ (VII.810) proviene de que el Sol quando es perigeo obra mas en la Luna que quando es apogeo; y como su efecto mayor en el discurso de una revolucion de la Luna, consiste en disminuir la fuerza central de la Luna ácia la Tierra (168), esta fuerza está en su mayor decremento quando el Sol es perigeo. Entonces el diáme-

metro de la órbita lunar se hace mayor, porque siendo la Luna menos atrahida ácia la tierra, se aparta de ella indispensablemente; su órbita hecha mayor hace mayor el tiempo de la revolucion, porque los quadrados de los tiempos de las revoluciones siempre son como los cubos de los diámetros de las órbitas; luego el movimiento de la Luna es retardado en el perigeo del Sol, y entonces la equacion anua empieza á ser sustractiva, por la razon declarada (170). Fig.

Como se calcula la distancia de la Luna por medio del péndulo.

173 Para determinar las distancias á que están del Sol todos los planetas que giran al rededor de este astro, basta conocer una de dichas distancias, y los tiempos de sus revoluciones, en virtud de la ley de Kepler (VII.684). Lo propio se verifica, con poca diferencia, acerca de la distancia de la Luna á la Tierra respecto de la de los cuerpos que están en la superficie de nuestro globo. La gravedad de estos cuerpos es conocida igualmente que su distancia al centro, conocemos uno de los efectos de la pesantez de la Luna ácia la Tierra, es á saber el tiempo que dura su revolucion, luego se puede inferir de aquí su distancia, y hemos dado un método (100) para determinarla al poco mas ó menos.

La fuerza con que los cuerpos son atrahidos ácia la tierra, en la superficie del globo, se conoce ya por el es-

Fig. espacio que andan en un segundo (30), ya por la longitud del péndulo de segundos (IV. 258); de aquí se infiere el tiempo que gastarían en dar la vuelta en un círculo de igual diámetro que el equador (39). Sabido el tiempo que dura esta revolucion, igualmente que la distancia, y la fuerza central que la corresponde, basta conocer la revolucion de la Luna, para determinar su distancia y la fuerza central que la detiene.

Si suponemos $=1$ la atraccion en la superficie de la tierra, la misma atraccion será $\frac{1}{g^2}$ á una distancia g; como la Luna atrahe tambien á la tierra con una fuerza proporcional á su masa, que llamaremos m, supondremos la tierra en reposo, y daremos á la Luna sola los efectos de los dos movimientos (130); tomaremos, pues, $\frac{1+m}{g^2}$ por la atraccion de la tierra en la Luna. La accion del Sol en la Luna disminuye la pesantez de la Luna ácia la tierra cerca de $\frac{1}{339}$ (168); quedan, pues, $\frac{338}{339}$ no mas de la fuerza antecedente; luego si llamamos $\frac{1}{\gamma}$ este número, la fuerza de la tierra en la Luna será $\frac{1+m}{\gamma g}$. Hemos visto como si un cuerpo girara en el equador, el tiempo de su revolucion en segundos sería $2'' \sqrt{\frac{r}{p}}$ (39); la fuerza centrífuga quita $\frac{1}{289}$ de la fuerza central de la tierra; por consiguiente suponiendo $=1$ la fuerza atractriz de la tierra, la que detendria este cuerpo, ó la gravedad de la Luna ácia la tierra no es mas que $\frac{288}{289}$, cuyo nú-

Fig.

número supondremos $= \frac{1}{\beta}$. Las fuerzas centrales de los cuerpos que se mueven en órbitas circulares son como los radios de sus órbitas divididos por los quadrados de los tiempos periódicos, ó en razon inversa de los quadrados de los tiempos divididos por los radios (98); luego si llamamos t el tiempo periódico de la Luna, tendremos esta proporcion $\frac{1}{\beta} : \frac{1+m}{\gamma g^2} :: \frac{t^2}{g} : \frac{4''r}{pr}$; luego $g^3 = \frac{t^2 \beta p}{4''\gamma}(1+m)$, y la distancia que se busca de la Luna, espresada en multiplos de p será $\frac{t^2\beta p}{4''\gamma}(1+m)$.

174 Para reducir esta espresion á números, supongo la masa de la Luna $\frac{1}{71}$ (115) $1+m = 1{,}01408$. $t = 27^d\ 7^h\ 43'\ 11''\ 6$, el log de $\beta = 0{,}00147$; el de γ, $0{,}00122$; el logaritmo del péndulo simple $p =$ 36 pulg. 7 lin. 21, debajo del equador, dividido por 864 para espresarle en toesas, y por 3281000 para espresarle en radios de la tierra, conforme veremos en los Elementos de Geografia, es $3{,}19016$. Con estos datos sacamos el log. de $g = 1{,}78049$, cuyo complemento es el seno de la paralaxe orizontal $56'\ 59''$ debajo del equador. Para llevar en cuenta el aplanamiento de la tierra en esta investigacion, se debería restar de $1+m$ el término $\frac{3}{5}A$, como manifestaremos quando se trate de la atraccion de un esferoide elíptico.

Cál-

Fig.

Cálculo de las desigualdades que la atraccion de Júpiter causa en la Tierra.

122. 175 Despues de declaradas sin internarnos en el asunto las desigualdades de la Luna, y manifestado como se calculan; calcularemos con mas individualidad las desigualdades que la tierra padece por causa de la atraccion de Júpiter, porque queda todavía mucho que averiguar acerca de las desigualdades de los planetas, y lo que digéremos en este asunto podrá servir de norma á los que quisiesen egercitarse en los cálculos de esta naturaleza.

Lo primero que se debe practicar es espresar las fuerzas Φ y Π (133) por medio de los radios vectores de Júpiter y de la tierra, y del ángulo de comutacion. Desde luego se eliminará en la espresion de las fuerzas la distancia *RT*, entre los dos planetas. Llamemos r el lado *ST*; f, el lado *SR*, y s el lado *RT*, cuyo valor buscamos, tendremos (2) $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{9r^2}{4f^5} + \frac{225r^4}{64f^7} + \left(\frac{3r}{f^4} + \frac{45r^3}{8f^6}\right) \cos t + \left(\frac{15r^2}{4f^5} + \frac{105r^4}{16f^7}\right). \cos 2t + \frac{35r^3}{8f^6}. \cos 3t + \frac{315r^4}{64f^7}. \cos 4t$, á cuya espresion se la podría dar esta forma general $A + B . \cos t + C . \cos 2t$ &c. Esta cantidad multiplicada por r, dará la primera parte $\frac{r}{s^3}$ de la fuetza Φ (134); se restará $\frac{1}{f^2}$ de $\frac{f}{s^3}$; multiplicando por cos t, saldrá la segunda parte de Φ, y multiplicando por sen t, se sacará la fuerza Π (133). Pondremos aquí el principio del cálculo para que sirva de egemplo á los que desearen proseguir estas operaciones.

En

En la aplicacion que sigue de estas fórmulas (179), Fig. será $r = 1$; $f = 5,2$; luego $\frac{1}{f^8}$ es 140 veces menor que $\frac{1}{f^5}$, y podremos despreciar los términos menores que $\frac{1}{f^6}$, dentro de poco diremos lo que se deberá practicar en los demas casos (188). En las fórmulas siguientes no introduciremos la masa de Júpiter que multiplica todos los términos, bastará con multiplicar el último resultado, y saldrá mas simple el cálculo.

176 La segunda parte de $\Phi = \left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right) \cos t = \left(\frac{9rr}{4f^4} + \frac{225r^4}{64f^6}\right) \cos t + \left(\frac{3r}{f^3} + \frac{45r^3}{8f^5}\right) \cos t^2 + \left(\frac{15r^2}{4f^4} + \frac{105r^4}{16f^6}\right). \cos 2t \cos t + \frac{35r^3}{8f^5}. \cos 3t. \cos t + \frac{315r^4}{64f^6}. \cos 4t. \cos t$, y substituyendo en lugar de $\cos t^2$ su valor $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2t$ (II. 398), en lugar de $\cos 2t. \cos t$ su valor (II. 378) $\frac{1}{2} \cos t + \frac{1}{2} \cos 3t$, sacaremos $\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right). \cos t = \frac{3r}{2f^3} + \frac{45r^3}{16f^5} + \left(\frac{3r}{2f^3} + \frac{5r^3}{f^5}\right). \cos 2t + \left(\frac{33r^2}{8f^4} + \frac{435r^4}{64f^6}\right). \cos t + \left(\frac{15r^2}{8f^4} + \frac{735r^4}{128f^6}\right). \cos 3t + \frac{35r^3}{16f^5}. \cos 4t + \frac{315r^4}{128f^6}. \cos 5t$. Para sacar la espresion total de la fuerza Φ, hemos de restar este valor de el de $\frac{r}{s^3}$, que es la primera parte de Φ, ó de $\frac{r}{f^3} + \frac{9r^3}{4f^5} + \frac{225r^5}{64f^7} + \left(\frac{3r^2}{f^4} + \frac{45r^4}{8f^6}\right) \cos t + \left(\frac{15r^3}{4f^5} + \frac{105r^5}{16f^7}\right). \cos 2t$ &c. y resultará el valor total de la fuerza $\Phi = -\frac{r}{2f^3} - \frac{9r^3}{16f^5} + \frac{225r^5}{64f^7} - \left(\frac{9r^2}{8f^4} + \frac{75r^4}{64f^6}\right). \cos t - \left(\frac{3r}{2f^3} + \frac{5r^3}{4f^5} + \frac{105r^5}{16f^7}\right). \cos 2t - \left(\frac{15r^2}{8f^4} + \frac{175r^4}{128f^6}\right). \cos 3t - \frac{35r^3}{16f^5}. \cos 4t - \frac{315r^4}{128f^6}. \cos 5t$.

Para sacar por medio de una operacion como la que acabamos de egecutar, la fuerza Π perpendicular al radio vector (133), que es $-\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right). \operatorname{sen} t$, multiplicaremos por $\operatorname{sen} t$ el valor hallado de $\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}$ (175), mu-

Fig. mudaremos los signos, y sacaremos $-\left(\frac{9rr}{4f^4}+\frac{225r^4}{64f^6}\right)$ sen $t-\left(\frac{3r}{f^3}+\frac{45r^3}{8f^5}\right)\cos t$. sen $t-\left(\frac{15r^2}{4f^4}+\frac{105r^4}{16f^6}\right)\cos 2t$. sen $t-\frac{35r^3}{8f^5}$. cos $3t$. sen $t-\frac{315r^4}{64f^6}$. cos $4t$. sen t. Resolveremos estos productos acudiendo á las fórmulas (II. 378), quales son cos t. sen $t=\frac{1}{2}$ sen $2t$ &c. y sacaremos $-\left(\frac{9rr}{4f^4}+\frac{225r^4}{64f^6}\right)$ sen $t+\left(\frac{15r^2}{8f^4}+\frac{105r^4}{32f^6}\right)$ sen t $-\left(\frac{3r}{2f^3}+\frac{45r^3}{16f^5}\right)$ sen $2t+\frac{35r^3}{16f^5}$. sen $2t-\left(\frac{15r^2}{8f^4}+\frac{105r^4}{32f^6}\right)$ sen $3t+\frac{315r^4}{128f^6}$. sen $3t-\frac{35r^3}{16f^5}$. sen $4t-\frac{315r^4}{128f^6}$. sen $5t$. Para reducir los diferentes términos de esta cantidad, repararemos que $-\frac{9}{4}+\frac{15}{8}=-\frac{3}{8}$, $-\frac{225}{64}+\frac{105}{32}=-\frac{15}{64}$; $-\frac{45}{16}+\frac{35}{16}=-\frac{10}{16}=-\frac{5}{8}$; $-\frac{105}{32}+\frac{315}{128}=-\frac{420}{128}+\frac{315}{128}=-\frac{105}{128}$. Hallaremos, pues, finalmente $\Pi=-\left(\frac{3r^2}{8f^4}+\frac{15r^4}{64f^6}\right)$ sen $t-\left(\frac{3r}{2f^3}+\frac{5r^3}{8f^5}\right)$ sen $2t-\left(\frac{15r^2}{8f^4}+\frac{105r^4}{128f^6}\right)$ sen $3t-\frac{35r^3}{16f^5}$. sen $4t-\frac{315r^4}{128f^6}$ sen $5t$, que es la espresion de la fuerza perturbatriz perpendicular al radio vector (133), que tambien hemos de multiplicar por la masa de Júpiter (107), á no ser que lo degemos para lo último de la operacion.

177 Una vez averiguadas la medida y la espresion de las fuerzas perturbatrices, la cuestion se reduce á determinar el efecto que deben causar en un tiempo dado; pongo por caso en tres meses, ó mas generalmente en el tiempo que necesita el planeta para andar un arco qualquiera. Bien se echa de ver que este es el punto mas dificultoso de la cuestion: el determinar la medida de las fuerzas Φ y Π, para un momento dado no era mas que una operacion del álgebra comun; pero lo que debe resul-

sultar de dichas fuerzas, despues que hubieren obrado sin interrupcion y de un modo variable un tiempo finito, no se puede averiguar sin el auxilio del cálculo infinitesimal, el único que pueda sacar el efecto total, de un efecto momentaneo é infinitamente pequeño. Fig.

178 La accion de Júpiter en la tierra en un instante infinitamente pequeño, la desviará de su órbita una cantidad infinitamente pequeña; pero esta cantidad infinitamente pequeña, espresada de un modo general por medio de su razon con el elemento del tiempo, nos proporcionará determinar por el cálculo integral, el desvio total que deberá resultar en un tiempo finito. Este es el camino por donde hallamos la longitud de una curva respecto de su ordenada, por medio de una porcion infinitamente pequeña, con tal que esta esté espresada de un modo general por la equacion de la curva; esto es inferir la razon entre dos cantidades finitas de la razon de las cantidades infinitamente pequeñas (III. 469).

179 En conociendo las fuerzas Φ y Π, se sacará de ellas el valor de Ω, el qual nos dará el valor del radio vector, ó por mejor decir de $\frac{p}{r}$ (152), y despues la correccion del tiempo (144), ó la partecilla de la longitud media, que pende de las fuerzas perturbatrices. Los primeros términos del valor de Φ que son $-\frac{r}{2f^3} - \frac{9r^3}{16f^5} + \frac{225r^5}{64f^7}$ no nos sirven, solo nos manifiestan que la fuerza central de la tierra ácia el Sol crece constantemente esta cantidad á influjos de la atraccion de Júpi-

Fig. piter; por lo menos siempre que r y f son cantidades constantes conforme lo suponemos aquí; en la Astronomía solo se necesitan los términos variables que causan irregularidades en los movimientos aparentes, quales son los términos multiplicados por sen t, porque el ángulo t y su seno varían continuamente.

Supongamos que la distancia media del planeta turbado, esto es, de la tierra al Sol, sea igual á la unidad; entonces $f = 5,20098$ (VII. 682), luego $\frac{1}{f^4} = \frac{1}{731}$ ó $0,00136665$ (los quebrados decimales son sumamente acomodados para estos cálculos), luego $\frac{3}{8f^4} = 0,000512496$. Asimismo $\frac{15}{64f^6} = 0,00001841$, luego la parte de la fuerza Π que es $-\left(\frac{3r^2}{8f^4} + \frac{15r^4}{64f^6}\right)$ sen t (176) equivale á $0,000524337$. sen t, y el primer término de $\Phi = -\left(\frac{9r^2}{8f^4} + \frac{75r^4}{64f^6}\right)$. cos t (176) será $-0,001596694$. cos t; nos contentaremos con estos primeros términos que son los mayores, é indagaremos qué efecto obran en el movimiento de la tierra; el cálculo será el mismo para los demas términos $2t$, $3t$, &c.

180 Despues de sacado en números el valor de Π, se debe inferir el de ρ (144); supusimos $\rho = S. \frac{\Pi r^3 du}{f^2}$, pero $\frac{f^2}{S}$ era entonces el parámetro de la órbita (151), luego haciendo uso del parámetro p qual le dá la observacion, sacaremos $\rho = S. \frac{\Pi r^3 du}{pS}$. Pero si suponemos la ór-

órbita de la tierra circular y concéntrica con el Sol, tendremos $r = 1$, $p = 1$, luego $\rho = S. \frac{\Pi du}{S}$; no atenderemos á S que es la masa del Sol mas la de la tierra, porque la suponemos igual á la unidad, siendo espresada la masa atractiva de Júpiter en partes de esta masa del Sol; tendremos, pues, $\rho = S. \Pi du = S. 0{,}0005243.$ sen tdu; fáltanos hallar el valor de esta integral. Fig. 22.

181 Con esta mira hemos de espresar t por medio del ángulo u; supondremos las órbitas concéntricas; llamaremos el movimiento de la tierra, 1; el de Júpiter, $1 - n$, de modo que 1 sea á $1 - n$, como el tiempo de la revolucion de Júpiter respecto de las estrellas, es al tiempo de la revolucion de la tierra (VII. 642), ó como 0,08430586 es á 1; la diferencia n de estos dos movimientos, ó 0,91569414 es el valor del ángulo de comutacion t, ó la diferencia de las longitudes de la tierra y de Júpiter. Porque al salir del punto B donde era una misma la longitud de estos dos planetas, y suponiendo $= 1$ el ángulo del movimiento de la tierra desde el mismo tiempo, el de Júpiter es $1 - n$, y la diferencia n. Pero si el movimiento de la tierra es u, el de Júpiter será $(1 - n)u$, y el ángulo t de comutacion será nu, siendo $n = 0{,}91569$.

Luego el valor de $\rho = - S. 0{,}000524.$ sen tdu viene á ser $- S. 0{,}000524.$ sen $nudu$, cuya integral será (5) $+ \frac{0{,}0005243}{0{,}91569}$ cos nu, ó $+ 0{,}0005761$.

Fig. cos nu; este es el valor de ρ del qual sacaremos $- 2\rho$, que es una parte del valor total de Ω (146).

182 El valor total de Ω es $\dfrac{\frac{\Phi rr}{S} + \frac{\Pi r dr}{S du} - 2\rho}{1 + 2\rho}$;

pero este valor de Ω se debe reducir á $\Phi\frac{rr}{S} + \frac{\Pi r dr}{S du} - 2\rho$, porque como el denominador $1 + 2\rho$ discrepa muy poco de 1, el pequeño quebrado 2ρ no le añadiría al valor de Ω, que de suyo es muy corto, sino una cantidad mucho menor. Solo en la Teórica de la Luna se debe llevar en cuenta este denominador $1 + 2\rho$.

Hay en Ω otro término que hemos de desechar; porque como hemos supuesto constante el radio r, dr es enteramente nulo, y el término $\frac{\Pi r dr}{S u}$ es $= 0$ (187).

Luego el valor de Ω es $\frac{\Phi rr}{S} - 2\rho$, y como hemos tomado la distancia r de la tierra y la masa S del Sol por unidad, tendremos finalmente $\Omega = \Phi - 2\rho$. Por consiguiente Ω se reduce $\Phi - 2\rho$; pero $\Phi = - 0{,}00159669$. cos t, ó $- 0{,}001597$. cos nu, y $- 2\rho = - 0{,}001145$. cos nu, luego $\Phi - 2\rho = - 0{,}002742$. cos $nu = \Omega$.

183 En conociendo el valor de Ω espresado en cosenos de un ángulo como nu, basta dividirle por $nn - 1$ (152), y mudar los signos, ó, lo que es lo propio,

di-

dividirle por $1 - nn$, sin mudar los signos, para inferir Fig. el valor que resulta en la equacion de la órbita $\frac{p}{r} = 1 - e \cos mu$; y se transforma en $\frac{p}{r} = 1 - e . \cos mu + \frac{\Omega}{1 - nn}$. Pero $n = 0{,}91569$, $nn = 0{,}8385$; luego $1 - nn = 0{,}1615$; dividiendo, pues, $\Phi - 2\rho = - 0{,}002742 . \cos nu$ por $0{,}1615$, la correccion de $\frac{p}{r}$ será $- 0{,}01698 . \cos nu$, esta es la cantidad que llamamos (155) Z. Es de advertir que quando n se acerca mucho á la unidad, la cantidad $1 - nn$ es muy pequeña, y los términos del valor de Ω los producen mucho mayores en el valor de Z. Al revés quando n es grande, el valor de Ω mengua formando el valor de Z; esta es la razon porque hemos despreciado (176) los términos sen $6t$, sen $7t$ que hubieran dado $nn = 36$ y $nn = 49$.

184 El segundo término del elemento del tiempo (155) que es $- 2e(3Z + \rho) \cos mudu$ desaparece quando se supone la órbita circular, porque lleva la excentricidad e; luego para hallar la longitud media haremos únicamente uso del término $-(2Z + \rho)\, du = dx$; hemos hallado $Z = - 0{,}01698 . \cos nu$ (183) y $\rho = 0{,}00057261 . \cos nu$ (181), luego $-(2Z + \rho)\, du = + 0{,}033381 . \cos nudu = dx$. Para hallar su integral hemos de mudar coseno en seno, y dividir por n (6) cuyo valor es $0{,}91569$, y será $0{,}03645 . \text{sen}\, nu$ el valor de x, quiero decir que $x = u$

Fig. $+ 0{,}03645 . \text{sen}\ nu$, luego la longitud verdadera $u =$ $x - 0{,}03645 . \text{sen}\ nu$.

Esta cantidad $0{,}03645$ se ha de multiplicar por la masa de Júpiter $\frac{1}{1067}$, porque las fuerzas Φ y Π (133) incluían esta masa, á la qual no hemos atendido hasta aquí, dejándolo para lo último, con la mira de simplificar los cálculos (175); la misma cantidad se debe multiplicar tambien por 57°, ó por $206265''$ para convertirla en segundos (156), conforme lo dejamos declarado, y sacaremos $- 7''05 . \text{sen}\ nu$ ó $- 7''05 . \text{sen}\ t$.

185 Hallaríamos tambien una equacion $+ 2''7.$ $\text{sen}\ 2t$, si hiciéramos con los términos $2t$ lo que hemos hecho con los términos t. Si en vez de suponer $r = 1$, hiciéramos uso de $r = 1 + e . \cos mu$; llamando u la anomalía media de la tierra ó del Sol, sacaríamos otras dos equaciones, es á saber, $- 1''5 . \text{sen}\ (2t - u) + 0''4.$ $\text{sen}\ (t - u)$.

El ángulo t es la longitud de la tierra, menos la de Júpiter vista desde el Sol. Supongo que el dia 5 de Marzo de 1749 fuese la longitud del Sol $11^s\ 13^\circ\ 20'$, la de la tierra que le es opuesta, sería $5^s\ 13^\circ\ 20'$; supongo tambien que la longitud heliocéntrica media de Júpiter fuese segun las tablas de $11^s\ 9^\circ\ 4'$; se restará esta de la longitud de la tierra, y quedarán $6^s\ 4^\circ\ 16$ para el valor del ángulo t; el seno de $6^s\ 4^\circ\ 16'$ ó el seno de $4^\circ\ 16'$ tomado negativamente (II. 361) $= -0{,}0744$, conforme le dan las tablas de los senos; luego la equacion

cion — $7'' 05$. sen t será + $0'' 5$ en este caso. Si en lugar de la longitud de la tierra, hiciéramos uso de la del Sol, que es seis signos mayor, para formar el ángulo t, tendríamos que mudar el signo de la equacion, y sería en general + $7''$. sen t. Fig.

186 La *Excentricidad* de la órbita turbada, quando se la quiere llevar en cuenta en estos cálculos, pide muchos mas términos en el valor de Ω; entonces no se hace $r = 1$, conforme lo hemos practicado en los cálculos antecedentes (180), ni tampoco $t = nu$ (181); daremos á conocer por mayor las dificultades que de aquí se originan en el cálculo.

Sea u la anomalía verdadera de la tierra, será $u + 2e$. sen u su anomalía media (42); como hemos llamado $1 - n$ el movimiento medio de Júpiter, quando el de la tierra es 1, bastará con multiplicar $u + 2e$. sen u por $1 - n$, y sacaremos $u - nu + 2e(1 - n)$. sen u, que será la longitud media de Júpiter; y si la restamos de la de la tierra ($u + 2e$. sen u), tendremos el valor de t en u. Quando se calculan los efectos de la excentricidad de la tierra, se supone concéntrica la órbita de Júpiter; por consiguiente si suponemos que $u - nu + 2e(1 - n)$ sen u espresa la longitud verdadera de Júpiter igualmente que la media, y la restamos de la de la tierra, que es u, sacaremos $nu - 2e(1 - n)$ sen $u = t$, en lugar de nu que tomamos (181) por el valor de t.

Hemos restado el movimiento de la tierra de el de Jú-

Fig. Júpiter, y no el de Júpiter de el de la tierra, porque para hallar un ángulo t, que siempre sea creciente, siempre se resta la longitud que crece mas lentamente de la que crece mas aprisa.

187 Otro efecto de la excentricidad es el término $\frac{\Pi r dr}{du}$ del valor de Ω (182), cuyo término hemos despreciado, y se debe llevar en cuenta quando se considera la excentricidad; entonces tenemos $r = 1 + e.$ cos u, $dr = - e.$ sen udu (5), $\frac{dr}{du} = - e.$ sen u, $\frac{rdr}{du} = - er.$ sen u; porque los términos ulteriores de la multiplicacion llevarían e^2, ó el quadrado de la excentricidad, que se puede despreciar; tendremos, pues, que multiplicar por $e.$ sen u todos los términos que, segun hallamos, componen el valor de Π (176), y sacaremos una nueva serie de términos que entrarán en Ω, y con la qual practicarémos lo propio que (183) con el término $- 0,002742.$ cos nu.

Finalmente, la excentricidad pide tambien en la correccion del tiempo un término mas $- 2e(3Z + \rho).$ cos $mudu$. Mr. de la Lande ha dado en el tomo de las memorias de la Real Academia de las Ciencias de París, para el año de 1758, el cálculo de todos estos términos, aplicándole á un caso muy individualizado. Allí mismo se hallará tambien el cálculo de los términos que penden de la excentricidad de la órbita perturbadora, de la qual se ofrece hacer uso algunas veces.

El

188 El valor de $\frac{1}{s^3}$ es lo primero que fue preciso Fig.
determinar para hallar la espresion de las fuerzas perturbadoras; en el egemplo propuesto, espresamos el valor de $\frac{1}{s^3}$ con una serie (175) cuyos últimos términos despreciamos, porque supusimos f muy grande ó muy pequeña respecto de r. Pero quando las dos cantidades se arriman mucho á la igualdad, no converge bastante la serie, y no sirve este método. Daremos aquí los principios de otro, con las fórmulas que de ellos se deducen. 22.

189 El valor general de la distancia s ó RT, es $\sqrt{(r^2 + f^2 - 2fr \cdot \cos t)}$ (2), luego $\frac{1}{s^3} = (r^2 + f^2 - 2fr \cdot \cos t)^{-\frac{3}{2}}$; dividiendo por $2fr$ las cantidades que coge el radical, y multiplicándolo todo por $(2fr)^{-\frac{3}{2}}$, sale $\frac{1}{s^3} = (2fr)^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{r^2+f^2}{2fr} - \cos t\right)^{-\frac{3}{2}}$; si hacemos $\frac{r^2+f^2}{2fr} = b$, y el esponente $-\frac{3}{2} = m$, la cuestion se reducirá á sacar en general el valor de $(b - \cos t)^m$. Para este fin, sea $(b - \cos t)^m = A + B \cdot \cos t + C \cdot \cos 2t + D \cdot \cos 3t$ &c; esta forma nos la indican los valores sacados antes (175), una vez que $\frac{1}{s^3}$ no nos dió sino cosenos de multiplos de t; tenemos que determinar los valores de A, B, C &c. Para hallar el de A, multiplicaremos todo por dt, y saldrá $(b - \cos t)^m dt = Adt + B \cdot \cos tdt + C \cdot \cos 2tdt$ &c; luego integrando $S.(b - \cos t)^m dt = At + B. \operatorname{sen} t + \frac{1}{2} C. \operatorname{sen} 2t$; hagamos $t = 180^\circ$, entonces todos los términos B, C &c. desaparecerán (II. 364), y no quedará mas que $A =$

S.

Fig. $S.\frac{(b - \cos t)^m\, dt}{180^\circ}$, que hemos de convertir en números por aproximacion, por no poderse integrar cabalmente esta cantidad.

190 Para sacar $S.(b - \cos t)^m\, dt$, imaginaremos una curva, cuya abscisa sea t, la diferencial de la abscisa dt, y $(b - \cos t)^m$ la ordenada; y si hallamos la superficie ó la quadratura de esta curva para el caso de ser $t = 180^\circ$, esta será la integral de $(b - \cos t)^m\, dt$. Calculando Mr. de la Lande las desigualdades que la accion de Venus causa en la tierra, sacó $f = 0{,}72333$, $b = 1{,}052912$; por consiguiente si $t = 1^\circ$, será $\cos t = 0{,}9998477$, luego $b - \cos t = 0{,}0530643$; su logaritmo es $8{,}7248025$; el complemento de este logaritmo será $1{,}2751975$, este es el logaritmo de $(b - \cos t)^{-1}$. Si le añadimos su mitad $0{,}6375987$, sacaremos $1{,}9127962$, log de $81, 8081$, por consiguiente $(b - \cos t)^{-\frac{3}{2}} = 81, 8081$, quando $t = 1^\circ$.

Se buscará tambien el valor numérico del mismo término quando $t = 2^\circ$, quando $= 3^\circ$, y prosiguiendo á este tenor hasta 180°; todas estas ordenadas se multiplicarán por dt, y darán los elementos de la curva cuya quadratura ó superficie se busca. Pero dt será $= 1$ si las ordenadas se hubieren calculado de grado en grado; será $= 2$, si se hubieren calculado de dos en dos grados, y así de las demas, porque dt se ha de espresar en grados del mismo modo que t. Luego despues de terminadas

180°

180 ordenadas de grado en grado, se sumarán unas con otras para sacar la superficie ó la integral que se busca (17). Fig.

191 Se nos podría preguntar porqué $S.(b - \cos t)^m dt = A.180°$, esto es, porqué hacemos $t = 180°$, y no $360°$. Responderemos que si le hiciéramos igual á $360°$ sacaríamos lo mismo, porque entonces $S.(b - \cos t)^m dt$ se debería repetir 360 veces, y se sacaría el duplo cabalmente de lo que se saca quando no se calculan mas que 180 ordenadas de la curva, cuya diferencial es $(b - \cos t)^m dt$. Con efecto quando se saca $A = \frac{S.(b - \cos t)^m dt}{180°}$, es evidente que es $S.(b - \cos t)^m dt$ para el caso en que $t = 180°$; si se toma para el caso de ser $t = 360°$, se sacará el duplo; porque todas las ordenadas del primer semicírculo se repetirán en el segundo, y como el total será dividido por $360°$, se sacará el mismo resultado.

192 Tambien diremos porqué al buscar el valor de $S.dt(b - \cos t)^m$ para cada grado, tomamos $dt = 1°$, de modo que dt sea la unidad de los arcos t. Lo hacemos porque como dt es la diferencial de t, la hemos de espresar indispensablemente en partes de t, á fin de que t y dt sean cantidades homogeneas. Por lo mismo, si tomáramos dt igual á $1'$ ó á $\frac{1}{60}$ de grado, y fuera esta la unidad, entonces el semicírculo que forma el denominador en $\frac{S.(b - \cos t)^m dt}{180°}$, y hace este valor igual con A, ya

no

Fig. no valdría 180, sino 60 veces 180 de dichas unidades; por consiguiente si en lugar del semicírculo querémos substituir 180 partes, es preciso que dt se componga de las mismas partes, esto es, de grados. Si hiciéramos dt igual á dos grados, sacaríamos el mismo resultado, con tal que se duplicára la suma de todas las ordenadas, quiero decir que se dividiera por 90 en lugar de dividirla por 180, esto vendrá á ser lo mismo con corta diferencia. Digo *con corta diferencia*, porque quanto mayor fuera dt, tanto menos exacto sería suponer rectilínea la superficie de la curva $(b - \cos t)^m\, dt$, que es el elemento de la area total de la curva, cuyas ordenadas se calculan para valuar la superficie.

193 Hemos dicho que se debían sumar unas con otras todas las ordenadas para sacar la superficie de la curva; pero todavía es mejor acudir á lo que dejamos dicho (18) de las curvas parabólicas. Supongamos que $dt = 2$, y que hayamos hallado 46 ordenadas para el primer quadrante de círculo, esto es, las ordenadas que resultan de los supuestos $x = 0$, $x = 2^\circ$, $x = 4^\circ$ &c. hasta $x = 90^\circ$ inclusive, y 46 ordenadas para el segundo quadrante de círculo, esto es, desde $x = 90^\circ$ inclusive, hasta $x = 180^\circ$ inclusive; se sumarán uno con otro el tercio de los estrémos, ó de la primera y última ordenada; los quatro tercios de la segunda, de la quarta, de la sexta, esto es, de todos los términos pares; los dos tercios de la tercera, de la quinta, ó de todos los números impa-

res

res (18); se dividirá la suma por 90 (189), se la dividiría por 180 si se hubiesen calculado las ordenadas para todos los grados, y en el caso especificado (190), se sacará el valor de $A = 8,702$. Todos estos cálculos se hallan hechos con la mayor individualidad en las Actas de la Real Academia de las Ciencias de París para los años de 1760 y 1761. Fig.

194. En el egemplo propuesto hemos supuesto que solo se buscaba el valor de $(b - \cos t)^{-\frac{3}{2}} = (1,0529 - \cos t)^{-\frac{3}{2}}$, ó de $\left(\frac{r^2+f^2}{2fr} - \cos t\right)^{-\frac{3}{2}}$; pero para sacar el valor de $\frac{1}{s^3}$, se debe multiplicar la misma cantidad por $(2fr)^{-\frac{3}{2}}$ (189). Y como siempre se supone que r, ó la distancia del planeta turbado es igual á la unidad, basta con dividir la unidad por la raiz quadrada del cubo de $2f$, ó de dos veces la distancia del planeta perturbador para sacar el coeficiente general. Así la distancia de Venus al Sol es $0,72333 = f$, suponiendo la de la Tierra igual á la unidad; luego $r = 1$, y $(2fr)^{-\frac{3}{2}} = 0,57471$; este es el coeficiente general respecto de las perturbaciones que Venus causa en el movimiento de la Tierra; luego se debe multiplicar 8,702 por dicho número, y se sacará el valor entero de $A = 5,0011$.

195 Por el mismo camino se debe buscar el valor de B que es el segundo término de $\frac{1}{s^3}$ (189); para este fin volveremos á la serie $(b - \cos t)^m = A + B.\cos t + C.\cos 2t$ &c. y multiplicándolo todo por $\cos t$, sacaremos $(b - \cos t)^m \cos t = A.\cos t + B.\cos t^2$ &c. $= A.$

cos

Fig. $\cos t + \frac{B}{2} + \frac{B}{2}. \cos 2t$ &c; en todos los términos siguientes habrá cosenos, porque solo las potencias pares $\cos t^2$, $\cos t^4$ &c. dán términos como $\frac{B}{2}$, que no llevan cosenos (II. 398); luego $(b - \cos t)^m . \cos t . dt = A . \cos t . dt + \frac{Bdt}{2} + \frac{B}{2}.$ $\cos 2t . dt$ &c. cuya integral $S.(b - \cos t)^m . \cos t . dt = A.$ $\text{sen}\, t + \frac{Bt}{2}$ &c. todos los términos, á excepcion de $\frac{Bt}{2}$, llevarán el seno de t, ó de sus múltiplos; luego todos desaparecerán, á excepcion del término $\frac{Bt}{2}$, quando se hiciere $t = 180°$; luego entonces tendremos $S.(b - \cos t)^m . \cos t . dt$ $= B . 90°$; luego $B = S. \frac{(b - \cos t)^m . \cos t . dt}{90°}$; este es el segundo termino de la serie. Por el mismo camino hallaríamos $C = S. \frac{(b - \cos t)^m . \cos 2t . dt}{90°}$, y &c.

Se calculará, pues, para cada grado el valor de $(b - \cos t)^m . \cos 2t$; pongo por caso, quando fuere $t = 1°$, $\cos t = 0{,}9998477$; pero $b = 1{,}052912$ (190); luego $b - \cos t = 0{,}0530643$, cuya cantidad, elevada á la potencia $- \frac{3}{2}$, es $81{,}8081$, y multiplicando por $\cos 1°$, sale $81{,}795$; este es el primer término de B, ó la primera ordenada de la curva, cuya superficie entera es igual al valor de B. Se calculan, pues, de este modo las 181 ordenadas, de grado en grado, ó solamente 91 de 2° en 2°, teniendo presente que (II. 361) $\cos t$ ha de mudar de signo así que t pasa de 90°; entonces se suma $\cos t$ con b, en vez de restarle, y todas las ordenadas del segundo quadrante de círculo se hacen negativas por causa de la multipli-

plicacion por cos t. Despues de calculadas 91 ordenadas, se tomará el tercio de las estremas, los $\frac{4}{3}$ de los términos pares, y los $\frac{2}{3}$ de los impares (18), teniendo presente que en el segundo quadrante son todas negativas; se dividirá la suma por 45 (se la dividiría por 90 si se hubiesen calculado 181 ordenadas), y se sacará 15,4666; multiplicando esta cantidad por el coeficiente general 0,57471 (194), se hallará el verdadero valor de B, ó el segundo término de la serie $\frac{1}{s^3} = A + B \cdot \cos t + C \cdot \cos 2t$, y se hallará que es $= 8,8888$. Fig.

196 Los demás términos C, D, E, F se determinarán por medio de los dos primeros, apelando á las fórmulas siguientes que Mr. de la Lande ha demostrado en las Actas de la Academia de las Ciencias de París para el año de 1760: $C = \frac{2Bh + 2Am}{m+2}$, $D = \frac{4Ch + (m-1)B}{m+3}$, $E = \frac{6Dh + (m-2)C}{m+4}$, $F = \frac{8Eh + (m-3)D}{m+5}$. En el caso que aquí consideramos (194), $m = \frac{3}{2}$, y $b = 1,052912$, en vista de lo qual es facil de sacar el valor de C, D &c. en números.

197 El uso de estos términos es de todo punto el mismo que en la serie $\frac{1}{s^3} = \frac{1}{f^3} + \frac{9r^2}{4f^5}$ &c. (175); porque sirven para hallar Φ y Π, despues Ω, Z, y el elemento del tiempo (179 y sig.). Quando se quiere llevar en cuenta la excentricidad del planeta turbado, se halla en el valor de $\frac{1}{s^3}$ un término $- 3ef. \, 2f^{-\frac{5}{2}} \left(\frac{1+f^2}{2f} - \cos t\right)^{-\frac{5}{2}}$, que requiere una nueva serie de términos como A, B, C &c.

198 Es indispensable hacer muchos cálculos como

Fig. estos quando se quiere averiguar las perturbaciones y desigualdades que se observan en el movimiento de los cometas; los valores de ρ y Ω se hallan por medio de las quadraturas de unas curvas que se consiguen calculando muchas de sus ordenadas. Con efecto, quando la distancia s del planeta perturbador al planeta turbado es tan variable que ni aun por el método antecedente se la puede espresar con una serie, es preciso buscar los valores de las diferentes partes de Ω (182), calculando muchísimas veces sus valores para cada revolucion.

Del movimiento de los Apsides.

199 Manifiestan las observaciones que los afelios de todos los planetas tienen un movimiento lento de occidente á oriente (VII. 721 y sig.); el apogeo de la Luna tiene un movimiento muy rápido (VII. 796); estos movimientos son efectos de la atraccion. Cada planeta trazaría naturalmente una elipse si no esperimentára mas atraccion que la del cuerpo al rededor del qual vá girando; pero la apartan continuamente de esta órbita las atracciones de los demás planetas, por manera que su rumbo nunca es una elipse; no obstante suponen los Astrónomos, con la mira de facilitar los cálculos, que un planeta permanece constantemente en una elipse, pero que está elipse es mobil.

21. Sea S el focus; A, el afelio de un planeta, cuya órbita es $AMPO$, y supongamos que el planeta haya caminado de A á B en una elipse inmobil ABP, á influjos de

de la fuerza central del Sol *S*; si la atraccion de otro plane- Fig.
ta *P*, que obra para apartarle del Sol, le hace llegar á un punto *C*, y á una distancia *CS* del Sol, podremos suponer que este punto está en otra elipse *CDE* igual á la órbita *ABP*, cuyo ápside en vez de permanecer en *A* ha pasado á *C*; se ajusta, digamoslo así, sobre el punto *C* donde ha llegado el planeta, la elipse *ABP* de la qual se ha salido en realidad el planeta; y suponiendo que esta elipse se mueve, el cálculo del movimiento verdadero del planeta se reduce á la sencillez del cálculo elíptico.....Siempre que el planeta se aparta del focus *S*, ó mengua su fuerza central, es indispensable imaginar un movimiento progresivo en su ápside para cumplir con este decremento, esto se verifica en el systema planetario.

200 Si la gravedad estuviera puntualmente en razon inversa del quadrado de la distancia, el planeta gastaría la mitad de su revolucion en ir desde *A* á *P*, ó desde el afelio al perihelio; si la gravedad es en razon inversa de una potencia de la distancia que esté entre dos y tres, ó entre el quadrado y el cubo, el planeta gastará mas de la mitad de la revolucion en ir desde el afelio al perihelio, quiero decir que el perihelio tendrá un movimiento directo; si la gravedad siguiere la razon inversa de una potencia menor que el quadrado de la distancia, el afelio será retrogrado. Vamos á declarar como se puede inferir el movimiento de los ápsides, de la equacion general de una órbita turbada (150); con hacer estas aplicaciones á las órbitas

 pla-

Fig. planetares, se podrá averiguar mejor que hasta aquí el movimiento de sus ápsides.

201 La equacion general de una órbita turbada sirve para hallar el movimiento continuo de los ápsides, como tambien las desigualdades periódicas. Porque en una elipse mobil tenemos esta equacion $\frac{1}{r} = 1 - e . \cos mu$ (VII. 87); pero en la órbita turbada en lugar de $e . \cos mu$, tenemos una serie de términos dependientes de Ω (150). Vamos á considerar los mayores respecto de las perturbaciones que Júpiter ocasiona en la Tierra.

202 Hemos visto antes (176) como la fuerza perturbatriz que hace variar la fuerza central, es á saber, Φ (en el supuesto de que la masa de Júpiter sea I), es igual á $-I\left(\frac{r}{2f^3} + \frac{9r^3}{16f^5}\right)$, luego $\Phi rr = -I\left(\frac{r^3}{2f^3} + \frac{9r^5}{16f^5}\right)$; pero $\frac{1}{r} = 1 - e . \cos mu$ (VII. 87); de donde se saca $r^3 = 1 + 3e . mu$ (II. 99); luego $\frac{r^3}{2f^3} = \frac{1 + 3e . \cos mu}{2f^3}$, y $9r^5 = \frac{9 + 45e . \cos mu}{16f^5}$; despreciaremos este término dividido por $16f^5$, como que es muy pequeño; pero indagaremos quál será el valor de $\frac{3e}{2f^3} . \cos mu$ entre los términos que la atraccion introduce en el valor de Ω (182). Si suponemos que sea este el único término de Ω, porque es con efecto el mayor de todos, la equacion de la órbita turbada será (150) $\frac{f^2}{Mr} = 1 - g . \operatorname{sen} u - b . \cos u + \frac{3e}{2f^3(mm-1)} . \cos u - \frac{3e}{2f^3(mm-1)} . \cos mu$; esta equacion se há de reducir á lo mismo que la equacion de una elipse mobil sacada de la observacion, $\frac{1}{r} = 1 - e . \cos mu$ quando no se considera mas que el movimiento del ápside, y se prescin-

cinde de todas las demás desigualdades, porque entonces la equacion de la órbita turbada no tiene mas efecto que hacer mobil la elipse; luego el término $\frac{3e}{2f^3(mm-1)}$ es la excentricidad de la órbita turbada, esto es, la excentricidad observada, ó la misma que hemos llamado e; luego $\frac{3e}{2f^3(mm-1)}$ $= e$, de donde se saca $mm = 1 - \frac{3}{2f^3}$, $m = 1 - \frac{3}{4f^3}$ (129: *vease la nota*), $1 - m = \frac{3}{4f^3}$, este es el movimiento del afelio de la Tierra (VII. 87), suponiendo que el movimiento de la Tierra sea la unidad. Hemos, pues, de multiplicar $\frac{3}{4f^3}$ por 360°, para sacar el movimiento del ápside en el discurso de una revolucion entera de la Tierra, esto es, su movimiento anuo; tambien se debe multiplicar por la masa de Júpiter que entraba en la fuerza Φ (175). El valor de $\frac{3}{4f^3}$ es 0,005331, pues $f = 5{,}201$; multiplicando, pues, por $\frac{1}{1067}$ y por 1296000″ para convertirle en segundos y decimales, salen 6″, 47 que son el movimiento anuo del afelio de la Tierra, que proviene de la atraccion de Júpiter; sacaríamos 6″ 55‴ si no se omitieran muchos términos como $\frac{45}{16f^3}$ que es igual á 0,000739. Fig.

203 Hay otras dos causas que pueden ocasionar un movimiento en los ápsides; la primera que se verifica en la Luna y los Satélites, es la figura aplanada del planeta; la segunda es la pequeña resistencia que podemos suponer en la materia eterea, en la qual se mueven los planetas; esta resistencia, si la hubiera, podría mudar la magnitud, la figura y la situacion de las órbitas al cabo de unas quan-

Fig. tas revoluciones. Pero despues de consideradas las observaciones mas antiguas no se percibe en las órbitas mudanza alguna que arguya resistencia en la materia eterea; el movimiento de los ápsides que en ellas se repara es efecto de la atraccion mutua de los planetas; porque está averiguado que la resistencia del fluido causaría un movimiento del afelio mucho menos reparable que la mudanza en la duracion de la revolucion; esta mudanza no se verifica, sensiblemente por lo menos; luego el movimiento de los ápsides no proviene de la resistencia.

Del movimiento de los Nudos de los Planetas.

204 Si todos los planetas dieran la vuelta al rededor del Sol en un mismo plano, este plano no variaría por razon de su atraccion recíproca, porque no puede un planeta sacar á otro de un plano en el qual se mueven los dos. Pero como estas órbitas están inclinadas unas á otras, y en situaciones muy diferentes, cada planeta es sacado sin cesar del plano de su órbita por los demás planetas, y muda de órbita cada instante. Para representar metódicamente estas desigualdades, suponen los Astrónomos que el planeta siempre está en un mismo plano, ó en una misma órbita, pero que varía la situacion de esta órbita; se pueden representar con efecto todos los movimientos de un planeta fuera del plano de su órbita primitiva dándole á este plano una variacion de inclinacion, con un movimiento en sus

nu-

nudos, tal que el plano que se toma, siga al planeta en todas sus desigualdades. Fig.

Qualquiera puede hacerse cargo de que es imposible que un planeta atrahido, cuya órbita está en otro plano que la órbita del planeta perturbador, vuelva á cortar el plano de este en el mismo punto donde le cortó en la revolucion antecedente; debe cortarle cada vez mas pronto que si el planeta perturbador no le hubiese atrahido ácia dicho plano; tiene incesantemente un impulso ó una tendencia ácia el plano donde está el planeta que le atrahe, y no puede seguir la direccion de esta fuerza sin llegar á dicho plano un poco antes de concluir su revolucion.

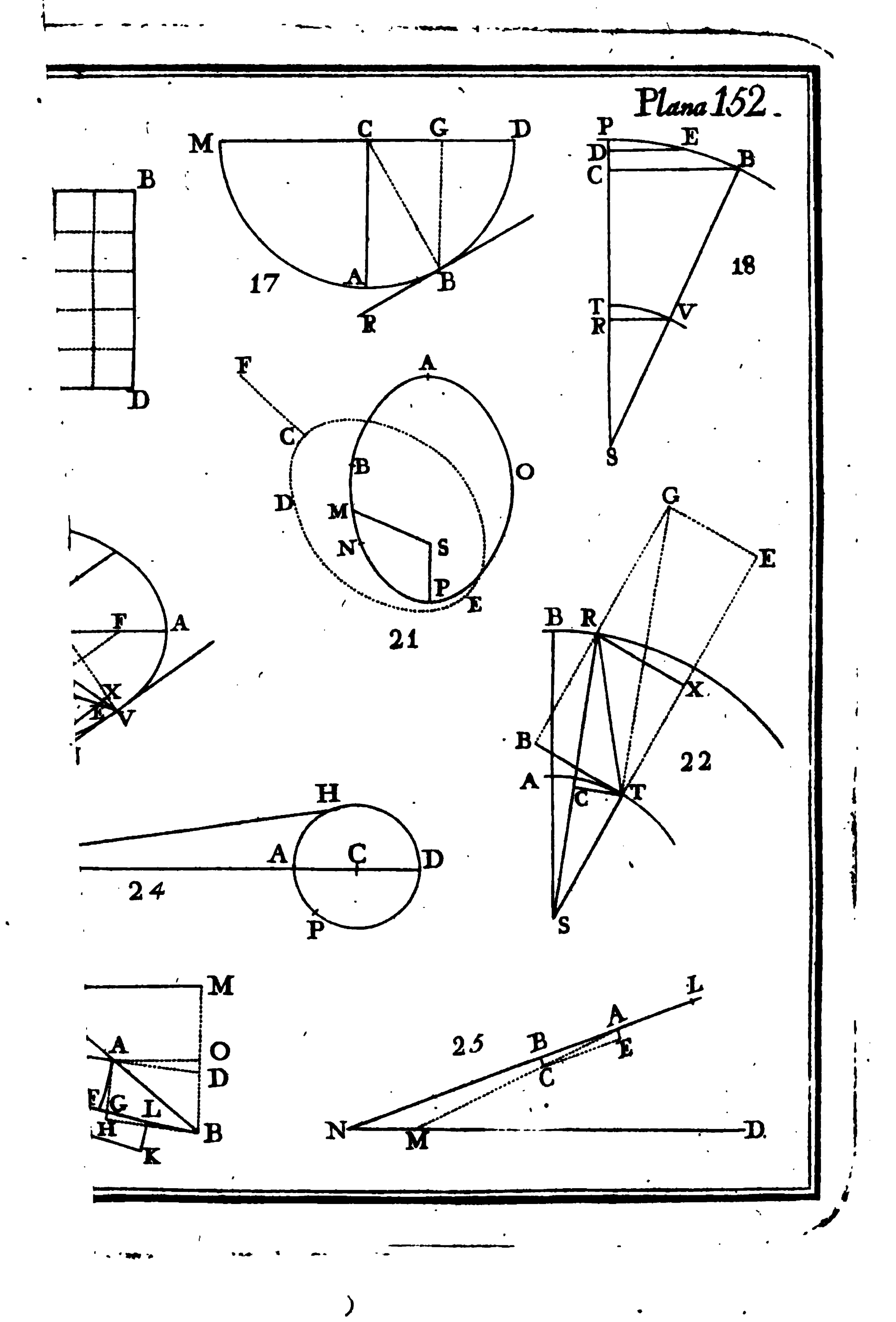
205 Sea *DN* la eclíptica; *LABN*, la órbita de la 25.
Luna, esto es, la órbita en la qual se hallaba al principio la Luna, al tiempo de andar el arco *LA*. Como el Sol está en el plano de la eclíptica *DN*, es evidente que en todos tiempos la fuerza atractriz del Sol obra para acercar la Luna al plano de la eclíptica ó de la linea *DN*, en la qual está el Sol. Por consiguiente quando la Luna intenta andar en su órbita un segundo espacio *AB* igual al espacio *LA* que acababa de andar, la fuerza del Sol obra para acercarla á la eclíptica *ND* una cantidad *AE*; es forzoso que la Luna ande con un movimiento compuesto la diagonal *AC* del paralelogramo *AECB*, de modo que su órbita llegue á ser *ACM*, en lugar de *LABN*. Esta es la razon porqué el nudo *N* de esta órbita muda incesantemente de posicion, y vá de *N* á *M* en una direccion contraria al movimiento

Fig. 25. de la Luna, que suponemos moverse desde *A* ácia *N*; luego el movimiento del nudo de un planeta siempre es retrogrado respecto de la órbita *DN* del planeta que causa este movimiento.

206 La misma figura está diciendo porqué la atraccion del Sol muda la inclinacion de la órbita lunar: hallándose precisada la Luna á mudar su direccion primitiva *LABN* en una direccion nueva *ACM*, encontrará la eclíptica *NMD* en el punto *M* en un nuevo ángulo *AMD* distinto de la inclinacion *AND* que la Luna seguia antes; pero como esta mudanza de inclinacion es insensible en los demás planetas, no la considerarémos. Fuera de esto, esta variacion es periódica y no se acumula; porque si la órbita turbada *ACM* forma en *M* un ángulo de inclinacion mayor que la órbita primitiva en *N*, sucederá lo contrario quando el planeta habrá pasado el nudo *N*, de modo que la inclinacion se restituirá por los mismos grados; solo los nudos tienen siempre un movimiento ácia una misma direccion, y retroceden mas y mas, ora se arrime, ora se aparte la Luna de su nudo. Por lo mismo solo hablaremos del movimiento de los nudos, que hace mucho papel en la Astronomía; este movimiento causa una variacion en la inclinacion de las órbitas planetares quando se refieren á la eclíptica, y esta variacion es sumamente notable en los Satélites de Júpiter.

Este movimiento del nudo para cada instante es diferente por razon de la distancia del planeta á su nudo, y de

la



Plana 152.
M
C
G
D
A
B
R
17
P
D
E
C
B
18
T
R
V
S
F
A
C
B
O
D
M
N
S
P
E
21
G
E
B
R
X
B
22
A
C
T
S
F
A
X
V
H
A
C
D
24
P
M
A
O
D
G
L
H
B
K
L
A
25
B
E
C
N
M
D.

la distancia del planeta perturbador al mismo nudo. Hemos, pues, de buscar primero una espresion general del movimiento del nudo en un instante infinitamente pequeño, y sacando despues su integral, determinaremos el movimiento para una revolucion entera. Fig.

207 A fin de *hallar la espresion general del movimiento de los nudos*, sea *TOE* la órbita de la Tierra, para la qual se busca el movimiento del nudo, respecto de la órbita de Júpiter *MP*; *S*, el Sol que ocupa el centro de dichas órbitas; *M*, el planeta cuya atraccion causa este movimiento, esto es, Júpiter; *SN*, la linea de interseccion de las dos órbitas, de modo que el semicírculo ☊*TO* esté levantado sobre el plano de la figura; *Tp*, el movimiento de la Tierra en su órbita en un instante muy corto, qual es *dt*. Tiraremos una linea *pq* paralela al radio vector *SM* de Júpiter, para que esprese la fuerza con la qual obra Júpiter para apartar la Tierra *T* de su órbita, paralelamente á *SM*; hallándose la Tierra trasladada de *p* á *q* por la atraccion de Júpiter, su movimiento verdadero, en lugar de ser *Tp*, será desde *T* á *q*; la linea *Tq* espresa la órbita compuesta que traza la Tierra en aquel instante, siendo así que *Tp* espresa la órbita primitiva que trazaría si la atraccion de Júpiter no la hubiese trasladado de *p* á *q*. 26.

Se prolongará la tangente *Tp* de la órbita, cuya tangente irá á encontrar en un punto *N* la linea de los nudos *SON*, ó la seccion comun del plano de la eclíptica y de la órbita de Júpiter. Si se prolonga tambien la linea *Tq* del

mo-

Fig. 26. movimiento compuesto, irá á encontrar el plano de la órbita de Júpiter en otro punto n, y Sn será la linea de los nudos respecto de esta nueva órbita; por consiguiente el ángulo NSn espresará el movimiento del nudo ó la variacion que padece la seccion comun de los dos planos por parte de la fuerza de Júpiter, esta es la cantidad que buscamos, y cuya espresion hemos de determinar. Llamaremos dq el angulillo NSn.

208 Tiraremos una linea desde N á n, y será paralela á pq; porque los triángulos Tpq, TNn están en un plano, en el qual todas las lineas paralelas á pq son tambien paralelas á la linea SM; luego la linea tirada por el punto N paralelamente á SM y á pq está en el plano del triángulo Tpq; y como á mas de esto está en la órbita misma de Júpiter, igualmente que SM, está en la órbita y en el triángulo, luego es la seccion comun de la órbita y del triángulo TNn. Los dos triángulos Tpq, TNn son semejantes; luego $Tp : TN :: pq : Nn$, y $Nn = \frac{TN}{Tp} . pq$.

Si llamamos M la masa de Júpiter, siendo 1 la del Sol; f, su distancia al Sol; s, su distancia á la Tierra, esto es, MT, la fuerza perturbatriz de Júpiter en la Tierra será $\frac{M}{s^2}$ (101); la qual resuelta en la direccion MS es $\frac{Mf}{s^3}$ (23); de esta hemos de restar la fuerza en el Sol, ó $\frac{M}{f^2}$, y la fuerza perturbatriz en la direccion SM ó en la direccion pq que la es paralela, será $= M\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$, á esta fuerza la llamaremos F.

El espacio $pq = Fdt^2$, por ser los espacios andados co-

como los quadrados de los tiempos (IV. 39); luego Nn Fig. 26.
$= \frac{TN}{Tp} Fdt^2$. La perpendicular $Rn = Nn$. sen nNR; pero el ángulo nNR es igual al ángulo $MS☊$, distancia de Júpiter al nudo, por razon de ser paralelas las lineas SM, Nm; luego $Rn = Nn$. sen $MS☊ = \frac{TN}{Tp} Fdt^2$. sen $MS☊$.

209 El valor del ángulo NSn, que es el movimiento del nudo, ó el arco dividido por el radio (VII. 44), es $\frac{Rn}{Sn} = \frac{Tn}{Tp.NS}$. Fdt^2. sen $MS☊$; pero $NS : TN :: R :$ sen TSN, suponiendo la órbita circular, ó el ángulo T de 90°; luego $\frac{TN}{NS} =$ sen TSN ó $TS☊$; luego el ángulo $NSn = dq = \frac{Fdt^2}{Tp}$. sen $MS☊$. sen $TS☊$, esta es la espresion del movimiento del nudo.

Si suponemos que el movimiento medio de Júpiter sea al de la Tierra, como p es á 1, siendo p, por egemplo, $\frac{1}{12}$; quando la Tierra hubiere trazado un ángulo u, Júpiter habrá andado un arco igual á pu (ó $\frac{1}{12} u$), partiendo del mismo punto, y la diferencia de sus movimientos ó el ángulo de comutacion MST será $u - pu$, ó $(1 - p) u = t$; si el movimiento del nudo fuere q, la distancia $MS☊$ será $pu - q$, y la distancia $TS☊$ que es la suma de MST y $MS☊$ será $u - q$. Se substituirán estas dos espresiones en la fórmula que incluye el valor de dq.

210 En lugar del elemento del tiempo dt que suponemos constante, por ser uniforme el movimiento, podemos substituir el movimiento Tp que llamaremos du, que es igualmente uniforme, y proporcional al tiempo, en una órbita circular. En virtud de esto, tendremos $\frac{Fdt^2}{Tp} = \frac{Fdt^2}{du} =$

Fdu,

Fig. 26. Fdu, substituiremos este valor en la espresíon del movimiento del nudo, substituiremos tambien en lugar de F su valor $M\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$, y sacaremos el movimiento del nudo, $dq = Mdu\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ sen $(pu - q)$ sen $(u - q)$, cuya integral será facil de hallar, en conociendo los valores de f y s, espresados en senos del ángulo u, ó de sus multiplos.

211 Si llámamos t el ángulo de comutacion MST, tendremos el valor de $\frac{1}{MT^3}$ ó $\frac{1}{s^3}$, espresado con una serie de esta forma $A + B.\cos t + C.\cos 2t + D.\cos 3t$ &c. (175 y 189), cuyos coeficientes A, B, C &c. suponemos que son conocidos; tendremos, pues, $dq = Mdu(fA - \frac{1}{f^2} + Bf.\cos t + Cf.\cos 2t$ &c.$)\text{sen}(pu - q).\text{sen}(u - q)$. Si egecutamos con efecto la multiplicacion de sen $(pu - q)$. sen $(u - q)$, sacaremos (II. 378) $\frac{1}{2}\cos(1 - p)u - \frac{1}{2}\cos(u + pu - 2q)$, cuya cantidad se ha de multiplicar tambien por $Mdu(fA - \frac{1}{f^2}Bf.\cos t$ &c.). Con substituir $(1 - p)u$ en lugar del ángulo t, tendremos en el producto un número crecido de términos, entre los quales se hallará el producto de $\frac{1}{2}\cos(1 - p)u$ por $Bf.\cos t$ ó $Bf.\cos(1 - p)u$; este producto es $Bf\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cos(2 - 2p)u\right]$ (II. 398); el término $\frac{1}{4}$ no lleva seno alguno, y por consiguiente ninguna cantidad que vuelva periódicamente; espresa, pues, una cantidad que irá siempre creciendo, y dará $dq = MBfdu.\frac{1}{4}$, para el elemento, ó la diferencial del movimiento del nudo, despreciando todos los términos que llevan senos. La integral es $\frac{MBfu}{4}$; este es, pues, el movimiento del nudo de la Tierra sobre la órbita de Júpiter, en el tiempo

po que la Tierra trazará un ángulo u. Si en lugar de u subs- Fig.
tituimos 360°, tendremos el movimiento del nudo corres- 26.
pondiente á una revolucion entera de la Tierra, ó el movimiento anuo $MBf.\ 90^\circ$.

212 Sea, por egemplo, M la masa de Júpiter $= \frac{1}{1067}$, siendo 1 la del Sol; $f = 5,2$ (VII. 682); $B = 0,004384 = \frac{3r}{f^4} + \frac{45r^3}{8f^6}$ (175); $90^\circ = 324000''$; luego $MBf.\ 90^\circ = 6'',924$. Por cálculos como este aplicados á todos los planetas, halló Mr. de la Lande el movimiento de los nudos de cada uno causado por la accion de todos los demás, cuyo resultado dimos en otro lugar (VII. 735).

213 El movimiento de los nudos de la Luna, el qual segun las observaciones es de $1^\circ\ 26'\ 48''$ en cada revolucion de la Luna (VII. 817), se saca por la fórmula antecedente, con diferencia de un veinteno. Vamos á calcularle, despreciando no solo la paralaxe del Sol, mas tambien la excentricidad de la órbita lunar, la del Sol, y todas las desigualdades de la Luna; no hay duda en que quando se desprecian menos cosas, se saca este movimiento mucho mas conforme con la observacion.

214 La fuerza $M\left(\frac{f}{s^3} - \frac{1}{f^2}\right)$ (208) se reduce á $-\frac{3S.\cot t}{f^3}$, quando se supone TM igual con la diferencia que vá de MS á ST (167 y 219), y S la masa del Sol; luego tenemos (210) $dq = \frac{3S}{f^3} du.\cos(1-p)u.\,\text{sen}\,(pu-q)$ sen $(u-q)$. Multiplicando con efecto estos tres factores, sacaremos un término que será $\frac{\cos\ \text{cero}}{4}$, ó igual á $\frac{1}{4}$, habiendo senos en todos los demás. Se sacará, pues, de este tér-

Fig. término la equacion $dq = \frac{3S}{4f^3} du$, cuya integral $q = \frac{3Su}{4f^3}$ es el movimiento del nudo en el intervalo de una revolucion de la Luna. En lugar de u substituiremos 360°, ó 1296000″; en lugar de $\frac{S}{f^3}$ su valor que viene á ser el de t^2 (109); á su logaritmo 7,7478192 añadiremos el de $\frac{3}{4}$, y el de 360°, tendremos el logaritmo de 1° 30′ 38″, que es el movimiento del nudo de la Luna. La observacion le dá de 1° 26′ 48″, pero basta este egemplo para dar á conocer el método.

De la precesion de los Equinoxios.

215 La precesion de los equinoxios ó el efecto de las atracciones con que el Sol y la Luna obran en el esferoide de la tierra, es un punto de los mas dificultosos de toda la Astronomia Física. Muchos Matemáticos se han empeñado en su investigacion, y todos han sacado resultados diferentes.

216 La teórica del movimiento de los nudos hace patente que un planeta que gira en el plano de su órbita, es apartado de ella incesantemente por los demas planetas (205); lo propio sucede con las partes del esferoide terrestre, las quales por ser mas altas ácia el equador con el qual dan cada dia la vuelta, son desviadas de su movimiento natural por las atracciones laterales del Sol y de la Luna, como si la porcion de materia (ó la especie de menisco) que podemos suponer pegado al globo se compusiese de mucho número de planetas que en el discurso de vein-

veinte y quatro horas diesen la vuelta al rededor de la Fig.
tierra. Buscaremos primero la accion del Sol y su influjo en la precesion de los equinoxios, por ser este cálculo menos complicado que respecto de la Luna.

217 Lo primero que se debe averiguar en esta materia es la fuerza con que el Sol atrahe cada punto ó cada partícula de la tierra. Sea *S* el Sol; *PADp*, un meridiano terrestre; *PCp* el ege de la tierra; *DC*, una linea perpendicular á la linea de los centros *SC*, esto es, á la línea que va desde el Sol á la tierra. La fuerza con la qual cada punto *A* del meridiano es atrahido del Sol en la direccion *AS*, no puede hacer balancear el ege *PCp* de la tierra, y echar de su lugar al equador sino en el caso de que el punto *A* sea mas atrahido que el centro *C* de la tierra; porque si ambos fuesen atrahidos con la misma fuerza ácia el Sol, no resultaría variacion alguna en su posicion respectiva (127); hemos, pues, de buscar la espresion de la fuerza que obra en el punto *A*, determinar lo que de ella resulta en la direccion *CS*, y restar de ella la fuerza con que el Sol atrahe el centro mismo de la tierra en la misma direccion, el remanente será la fuerza perturbatriz, con la qual el punto *A* mas atrahido que el punto *C* ó el punto *K*, procura apartarse de la línea *CKD* perpendicular al rayo solar *CS*. 27.

218 Si llamamos *M* la masa del Sol, podremos espresar con $\frac{M}{SA^2}$ (101) la fuerza del Sol en el punto *A*; esta fuerza equivale por medio de la resolucion á

otras

Fig. 27. otras dos que obrasen en las direcciones AB y AC; y como la fuerza AC dirigida al centro de la tierra no causa perturbacion alguna, no queda mas que la fuerza en la direccion AB ó en la direccion CS que la es paralela, esta fuerza es $\frac{M.CS}{SA^3}$, como se infiere de lo dicho (IV.81); hemos de restar de ella la fuerza del Sol en el centro de la tierra, que es $\frac{M}{CS^2}$, y sacaremos la fuerza perturbatriz $M\left(\frac{CS}{SA^3} - \frac{1}{CS^2}\right)$, en la direccion de la linea de los centros CS.

219 Para simplificar esta espresion consideraremos que $SA = CS - AK$, con muy corta diferencia por lo menos, siendo muy pequeño el ángulo CSA por razon de la gran distancia SA; luego $\frac{1}{SA^3} = (CS - AK)^{-3}$, y reduciendo esta espresion á serie (II.101) $= \frac{1}{CS^3} + \frac{3AK}{CS^4}$ &c. Los términos siguientes se pueden omitir porque los dividirían potencias mayores de CS, y serían por lo mismo mucho menores; luego $\frac{M.CS}{SA^3} = \frac{M}{CS^2} + \frac{3AK.CS.M}{CS^4}$; luego la fuerza perturbatriz $M\left(\frac{CS}{SA^3} - \frac{1}{CS^2}\right)$ se reducirá á $\frac{M.3AK}{CS^3}$. Por consiguiente esta fuerza es proporcional á AK, esto es, á la distancia de cada punto A de la tierra á la linea CD perpendicular al rayo CS.

220 En lugar de la masa M del Sol que entra en esta espresion, substituiremos la fuerza centrífuga que esperimentamos debajo del equador, cuya fuerza es, qual la sacó Newton, $\frac{1}{289}$ de la gravedad de los cuerpos terrestres. Si llamamos a el radio del equador; t, el tiempo de la revolucion diurna de la tierra; T, el tiempo de la revolucion anua,

ten-

tendremos $M = \frac{Cs^3\beta . tt}{a^3T^2}$ (116), y por consiguien- Fig.
te si hacemos $a = 1$, la fuerza perturbatriz del Sol en 27.
una partícula A de la tierra espresada en partes de la fuerza centrífuga terrestre será $\frac{3\beta tt}{T^2} . AK$.

221 Luego esta fuerza es proporcional á AK ó á la distancia de cada partícula al plano CKD del círculo de iluminacion, y quando AK llega á ser igual á la unidad, esto es, al radio del equador, sale $\frac{3 . \beta tt}{T^2}$ que es la fuerza perturbatriz debajo del equador, la llamaremos γ en adelante. Esta fuerza del Sol convertida en números es $3 \cdot \frac{1}{(365)^2} \frac{1}{289} = \frac{1}{12852000}$ de la gravedad total de los cuerpos terrestres de la qual hemos hablado (30); luego la fuerza del Sol $\gamma = \frac{1}{128520000}$ de la gravedad ordinaria; esta es la fuerza con que obra el Sol para arrancar de la tierra una partícula puesta debajo del equador, y en la direccion CS.

222 Despues de determinada la fuerza del Sol en una partícula de la tierra, hemos de determinar la fuerza total que de ella resulta para hacer dar la vuelta á toda la elipse del meridiano; y despues al esferoide. Supongamos, pues, que todas las partes de una elipse qual es FCN están solicitadas como antes; consideremos una ordenada EC al diámetro OF, y buscaremos la suma de las 28.
fuerzas que obran en toda esta linea; consideremos un punto V ó una partícula V de materia tomada en la linea EC; por ser la fuerza proporcional á la distancia de cada

Fig. 28. partícula al diámetro *MON*, tendremos esta proporcion, a es á γ, como *OD* es á la fuerza que buscamos, cuya fuerza será $\frac{\gamma}{a}$ *OD*.

223 Esta fuerza ó tendencia de cada partícula de la tierra ácia el Sol requiere una consideracion esencial en la qual es importante detenernos, es á saber la del brazo de palanca *DV* al qual dicha fuerza es aplicada. Si la fuerza $\frac{\gamma}{a}$ *OD* que obra en la partícula *V*, estuviese aplicada en *D*, ó si en lugar de la partícula *V* consideráramos la partícula *D*, no habria ningun movimiento en la elipse: la partícula *D* procura separarse del centro *O* en la direccion *OD*, pero no hacer girar la elipse al rededor del centro, dicha fuerza no obra para hacer dar vueltas á la elipse mas que si estuviera aplicada al centro *O*. Porque por lo dicho (IV.76) se puede considerar una misma fuerza en todos los puntos de su direccion, esto es, en *O*, en *D* y en *T*. Al contrario es evidente que la misma fuerza aplicada en *C* obrará mas para hacer girar la elipse, que en otro punto qualquiera de la linea *DC*; sin embargo la espresion $\frac{\gamma}{a}$ *OD* es igual para todos los puntos de la linea *BDC*, porque solo indica la cantidad que cada punto de la linea *BDC* intenta apartarse de la linea *MON*. Luego se debe multiplicar la tendencia que cada partícula de materia *V* tiene para apartarse de la linea *MN*,

MN, por su distancia *DV* á la linea de los centros *OT*, Fig.
para determinar su energía, ó el efecto que debe obrar 28.
para hacer girar la tierra al rededor de *O*. No se percibe desde luego qué producto dará una fuerza multiplicada por una linea, pero nos bastará determinar la suma de todas estas fuerzas de rotacion espresadas de este modo, las compararemos con las de otro cuerpo cuyo movimiento fuere conocido, espresando del mismo modo las fuerzas de este (241), y de aquí inferiremos el movimiento del equador terrestre; esto no es mas que un término de comparacion. Quando multiplicamos la fuerza del punto *V* por *DV*, y la fuerza del punto *C* por *DC*, queremos decir que estas fuerzas son entre sí como *DV* es á *DC*, y esto es evidente.

224 Es, pues, $\frac{\gamma}{a}$ *OD*. *DV* la energía ó eficacia de la fuerza con la qual cada partícula *V* procura hacer girar la elipse; y si hacemos $DV = z$, y la partícula ó elemento $V = dz$, tendremos $\frac{\gamma}{a} zdz . OD$, cuya integral $\frac{\gamma}{2a} z^2 OD$ es la fuerza de la linea *DV*; luego $\frac{\gamma}{2a}$ $DC^2 . OD$ será la fuerza de la linea total *DC*.

225 Por la misma razon la fuerza de todas las partes de la linea *BD* para hacer girar la elipse, será $\frac{\gamma}{2a}$ $OD . BD^2$, y como estas obran para hacer girar la tierra

L 2 en

Fig. en la direccion contraria, hemos de tomar la diferencia
28. de las dos fuerzas, y sacaremos $\frac{\gamma}{a}.\frac{1}{2}OD(BD^2-CD^2)$

$=\frac{\gamma}{a}.\frac{1}{2}OD(BD+CD)(BD-CD)=\frac{\gamma}{a}OD.$

$BC.DE$; esta es la fuerza que resulta de todas las atracciones en la ordenada BC, para hacer girar la elipse al rededor de su centro.

226 Para inferir de aquí la fuerza de toda la elipse, la espresaremos algebraicamente por medio de los diámetros. Con esta mira haremos $OF=c$, $OM=p$, $FH=f$, $OH=g$, $OD=y$, $OE=x$. Por la propiedad de los diámetros OF, OM de una elipse respecto de las ordenadas BE, EC (VII.65), tenemos $CE^2=BE^2=\frac{pp}{cc}(cc-xx)$; pero de los triángulos semejantes OFH, ODE sacamos estas dos proporciones $OF:FH::OE:OD$, esto es, $c:f::x:y$, y $OF:OH::OE:ED$, esto es, $c:g::x:ED$; luego $OD=y=\frac{fx}{c}$ y $ED=\frac{gx}{c}$; en virtud de estos valores la fuerza $\frac{\gamma}{a}OD.BC.ED$ de toda la ordenada BC será $=\frac{\gamma}{a}.\frac{fx}{c}.\frac{2p}{c}\sqrt{(cc-xx)}\frac{gx}{c}$. Imaginaremos otra ordenada infinitamente próxima, cuya distancia midiéndola en OD, llamaremos dy; multiplicando por dy la fuerza en la ordenada BC, tendremos la espresion de la fuerza en el rectangulillo elemental de la elipse, y la integral dará la fuerza en toda la elipse. En lugar de dy podría-

dríamos substituir $\frac{fdx}{c}$, y sacaríamos la fuerza en el ele- Fig.
mento de la elipse $\frac{\gamma}{a} . \frac{ffgxx.2p}{c^4} \surd(cc - xx)dx$, ó $\frac{\gamma fg}{ac^2}$. 28.
$\frac{2pf}{c^8} \surd(cc - xx)\, xxdx$, que hemos de integrar.

227 Tendremos presente que el elemento de la superficie de la elipse es igual á $\frac{2p}{c} \surd(cc - xx) \frac{fdx}{c}$, esto es, á la ordenada $\frac{2p}{c} \surd(cc - xx)$ multiplicada por la corta distancia de una ordenada á otra que es dy, ó $\frac{fdx}{c}$. Si llamamos A la integral de este elemento $\frac{2pf}{cc} \surd(cc - xx)dx$, ó la superficie de la elipse, la integral del otro elemento que lleva xx mas que el primero, ó $S. \frac{2pf}{c^2} \surd(cc - xx)\, xxdx$, será igual á $A. \frac{c^2}{4}$ quando $x = c$ (15); luego la integral, ó la fuerza de toda la elipse será $\frac{\gamma fg}{ac^2}$.
$A \frac{c^2}{4} = \frac{\gamma}{a} . \frac{fgA}{4} = \frac{\gamma}{a} . \frac{1}{4} FH. OH. A$; pero $OH. FH = mn\,(aa - bb)$, llamando m y n el seno y el coseno del ángulo AOH (VII. 81); luego la fuerza que buscamos es $\frac{\gamma}{a} . \frac{1}{4} mn\,(aa - bb) A$, en toda la elipse; esta es la fuerza con la qual dicha elipse, pongo por caso un meridiano de la tierra, procura hacer girar la tierra de norte á sur, ó de sur á norte.

228 Ya que AOG es el ege mayor de la elipse, ó el diámetro del equador terrestre, y suponemos que el Sol obra en la linea ODT, síguese que el ángulo AOT es igual á la declinacion del Sol, pero el seno del ángulo

Fig. $AOH = m$ y su coseno $= n$ (227 y VII. 81); luego mn es el producto del coseno y del seno de la declinacion del Sol (247).

229 Lo que acabamos de demostrar respecto de la elipse $FMGA$, que forma el meridiano ó la seccion del esferoide terrestre en la direccion de su ege, lo demostraríamos igualmente respecto de otra seccion qualquiera de la tierra paralela al meridiano; porque todas estas secciones son elipses semejantes al meridiano (VII. 89). Luego conocemos la fuerza del Sol en una elipse que es parte de un esferoide; podremos imaginar otra elipse, ú otra seccion del esferoide infinitamente próxima á la primera, y paralela con ella, siendo du la distancia de una á otra; la fuerza de toda la elipse multiplicada por du, dará la fuerza de toda la rebanada sólida que es el elemento del esferoide; integrando, sacaremos la fuerza del esferoide total, ó la energia total con que la atraccion del Sol en todas las moléculas terrestres conmueve la tierra. Supongamos, pues, que el esferoide terrestre está cortado paralelamente al
29. ege PO, ó al meridiano en el qual se halla el Sol, á una distancia $CM = u$ del centro de la tierra, con un plano LMN; la seccion será una elipse (VII. 89), cuyo semiege mayor perpendicular al ege menor LN será $\sqrt{(aa - uu)}$, pues será una ordenada al equador, cuyo radio es a, tomándola á la distancia u del centro. Si llamamos A la superficie de la elipse del meridiano $EPQO$, tendremos $aa : aa - uu :: A : A\frac{aa-uu}{aa}$, superficie de la elip-

elipse menor; para hallar la fuerza de todas las partes de esta elipse, habremos de substituir en la espresion de la fuerza total (227), esta superficie en lugar de A. Fig.

Por la misma razon substituiremos la diferencia de los quadrados de los eges de esta elipse menor en lugar de la diferencia $aa - bb$, que correspondía á la elipse mayor y la diferencia de los quadrados de los eges de la elipse menor la hallaremos con considerar que esta diferencia es proporcional á la superficie de la elipse; porque en dos elipses semejantes hay una misma razon entre los dos semieges. Siendo $\sqrt{(aa - bb)}$ la excentricidad, la superficie de la elipse es como el quadrado de esta excentricidad ó como $aa - bb$, esto es, como la diferencia de los semieges. Por consiguiente $A : A . \frac{aa - uu}{aa} :: aa - bb : \frac{aa - bb}{aa}(aa - uu)$; esta es la diferencia de los eges que hemos de substituir en lugar de $aa - bb$ (227), y tendremos $\frac{\gamma}{a} . \frac{mn}{4} \left(\frac{aa - bb}{aa}\right) \left(\frac{aa - uu}{aa}\right)^2 A$, que será la energía de la elipse menor. La multiplicaremos por du é integraremos, la multiplicacion nos dará $A . \frac{\gamma}{a^5} . \frac{mn}{4}(aa - bb)(a^4 du - 2a^2 u^2 du + u^4 du)$, é integrando cada término (III. 471 y 472) sacaremos $\frac{A\gamma}{a^5} . \frac{mn}{4}(aa - bb)(a^4 u - \frac{2}{3} a^2 u^3 + \frac{u^5}{5})$.

230 Quando $u = a$, esto es, á todo el radio CQ del equador, la cantidad que acabamos de sacar es igual á la

 efi-

Fig. eficacia de todas las partículas que componen el semiesferoide; y la de todo el esferoide que es dupla, es $\frac{A\gamma}{a^5}$. $\frac{mn}{4}(aa-bb)$. $2(a^5-\frac{2}{3}a^5+\frac{a^5}{5})=\frac{4}{15}A\gamma . mn(aa-bb)$. Pero $\frac{4aA}{3}$ es la masa de todo el esferoide (20) que llamaremos S; luego con substituir $\frac{3S}{4a}$ en lugar de A, la fuerza será $\frac{\gamma}{5}(aa-bb)\frac{mn}{a}S$; y substituyendo en lugar de γ su valor $\frac{3\beta tt}{T^2}$ (220), tendremos por último $\frac{3\beta tt}{5T^2}(aa-bb)\frac{mn}{a}S$: esta es la espresion de la fuerza total del Sol para hacer girar el esferoide terrestre de norte á sur. De aquí hemos de inferir ahora la mudanza del ege, ó el ángulo que el ege debe trazar á impulsos de esta fuerza; aquí empieza la principal dificultad de la cuestion, y á manifestarse la elegancia particular del método por el qual la resolveremos, cuyo método la reduce á otra de Dynámica sumamente sencilla.

231. Ya conocemos la fuerza del Sol en el esferoide terrestre (230), y esta fuerza debe causar en el estremo del ege de rotacion una mudanza de lugar que llamaremos r, de modo que el plano del equador de la tierra se debe inclinar ácia el Sol girando al rededor de uno de sus diámetros, en el mismo tiempo que gira por la rotacion diurna al rededor del ege del mundo que es perpendicular á su plano. Busquemos, pues, en general qué

qué fuerza debería aplicarse perpendicularmente á cada punto del equador para fomentar este corto movimiento *r* del plano del equador, en el mismo tiempo que cada partícula contenida en el mismo plano proseguiría su movimiento de rotacion; en determinando la fuerza total que se necesitaría para obrar un movimiento *r*, sacaremos por una regla de tres (244) el movimiento que causa la fuerza dada del Sol en un instante infinitamente pequeño. Así, hemos considerado la fuerza del Sol qual obra en cada partícula del esferoide, y hemos determinado la fuerza total que obra en el esferoide, ahora buscaremos por un camino muy llano la razon entre un movimiento *r* y la fuerza total que obra en un esferoide, y es necesaria para causarle. Resolveremos desde luego el caso mas sencillo, considerando el círculo del equador no mas, y una sola partícula de materia que diese la vuelta con libertad en la circunferencia de dicho círculo, conforme gira la tierra, en el mismo tiempo que el plano del equador en el qual se mueve, tuviese un movimiento *r*, y hallaremos que esta partícula de materia necesita una fuerza que sea $= 2r\beta . \cos AR$.

Fig.

232 Cuestion. *Sea* R *un corpúsculo de materia, que gira uniforme y libremente en una circunferencia* ARFB *igual al equador terrestre, de occidente á oriente, en el mismo tiempo que el plano del equador gira de norte á sur, al rededor del diámetro* AB *con un movimiento infinitamente mas lento, cuya velocidad sea* r, *en el punto* F *donde es máxima.* 30.

Fig. 30. *ma. Se pregunta que fuerza ha de comover el corpúsculo* R *en cada punto del arco* AF, *ó cada instante, perpendicularmente al plano del equador, á fin de que pueda siempre permanecer en el plano que gira al rededor del diámetro* AB.

Sea *ARFB* la situacion del equador en el momento que el corpúsculo está en *R*; *ANHZB*, la situacion del equador en el segundo instante, quando el corpúsculo *R* hubiere andado el arco *RE* del equador, ó la parte *RM* de la tangente, que no discrepa de *RE* (9.). Este corpúsculo ha recibido en *R* del movimiento del plano, una impresion perpendicular al plano *ARFB*, en virtud de la qual andaría *RN* que espresa la velocidad del plano en *R*, siendo así que *RM* espresa su movimiento en el equador. Luego ha de andar la diagonal del paralelogramo *RNVM*, y llegará *V* al cabo del segundo instante, de modo que *MV* sería igual á *RN*, considerando las dos impresiones *RN* y *RM* no mas. Pero la distancia de los dos círculos *ARF*, *ANH* es mayor enfrente del punto *M*, que enfrente del punto *R*, luego el punto *V* no está en el plano del círculo *ANHB* que representa la situacion del equador en el segundo instante; falta una cantidad como *CV*, suponiendo la linea *GHC* paralela á la linea *DN*, ambas en el plano del círculo *ANHB*; es, pues, preciso que al cabo del segundo instante obre en el corpusculo otra fuerza capaz de hacerle andar *VC*, para que pueda acompañar al plano del equador á pesar de su movimiento; esta es la fuerza que buscamos. Aunque el punto *C*

no

no esté en la circunferencia misma del círculo *ANH*, sino fuera del círculo, la cantidad *CH*, no llevaremos en cuenta esta diferencia, ni tampoco la fuerza que se necesitaría para restituirle á *H*. Si despreciamos esta cantidad *CH*, no es porque dicha fuerza sea indiferente para la cuestion, sino porque es infinitamente menor que la fuerza *VC*, cuyo valor buscamos. La cantidad *CH* no es otra cosa que el desvío de la tangente para un arco pequeño *MC* que se supone infinitamente menor que *RM* ó *NV*; luego *CH* es un infinitamente pequeño de tercera orden, siendo así que la fuerza *CV* que buscamos es un infinitamente pequeño de segunda orden. Fig. 30.

233 Supongamos que los triángulos planos *DRN*, *GMC* sean perpendiculares á la seccion comun *ADOB*, y que *RN* sea perpendicular á *DR*, y *MC* perpendicular á *GM*, que encuentra en *C* el plano del círculo *ANHB*, ó la linea *GH* prolongada hasta *C*; tiraremos *NV* paralela á la tangente *RM*, y encontrará *MC* en *V*. Supongamos que *RM* esprese la velocidad del cuerpo en la circunferencia *ARF*, la velocidad que le ha comunicado el movimiento solo del círculo *ARF* sería *RN*, porque el cuerpo *R* se hallaría en *N* en virtud de este movimiento; y concluyendo el paralelogramo *RMVN*, el punto *V* es el punto donde llegaría el cuerpo con su velocidad *RM*, y la velocidad *RN* del plano del equador, si fuera libre, en el mismo tiempo que gasta en andar *RM*; en este caso se apartaría del plano de este círculo la cantidad

Fig. 30. dad *CV*. Luego para que el cuerpo *R* permanezca en el plano del círculo *ANH*, se necesita una fuerza capaz de contrarrestar dicha velocidad *CV*, ó de hacer andar *CV*; dicha fuerza varía incesantemente, porque la velocidad *RN* del plano del equador es distinta en cada punto; la fuerza que buscamos es máxima quando el cuerpo está en *A*, porque quando anda *AX*, no ha recibido en *A* velocidad alguna del plano, y necesita una fuerza cuya espresion es *XY*, para permanecer en el equador. Aquí tambien despreciamos la diferencia entre la velocidad *AX* y la velocidad *AY*, porque como *XY* no es mas que un infinitamente pequeño de segunda orden, la diferencia entre *AX* y *AY* es un infinitamente pequeño de tercera orden.

234 Para hallar una fuerza que pueda detener incesantemente el cuerpo en el plano del círculo mobil *AR*, hemos de hallar la fuerza con la qual pueda andar *CV* en el mismo tiempo; es, pues, preciso que esta fuerza sea á la fuerza centrífuga, como *CV* es á *ET*, que es el espacio que la fuerza centrífuga haria andar; porque los espacios andados en un mismo tiempo han de ser como las fuerzas aceleratrices á cuyos impulsos son andados.

235 Tomando por unidad la velocidad del movimiento diurno *RM*, hemos llamado *r* el movimiento angular del ege ó del plano del equador; luego $r \cdot RM$ será la velocidad *ZF* del plano del equador en *F*, esto es, la velocidad de un punto *F*, y $r \cdot RM \frac{DR}{OF}$ será la velocidad

RN

RN del punto *R*, pues *ZF* : *RN* :: sen *AF* : sen *AR* :: Fig. *OF* : *DR*, (VII.54). 30.

De los triángulos semejantes *DRN*, *GMC* se saca *DR* : *RN* :: *GM* : *MC*, ó $DR : r . \frac{RM.DR}{OF} :: DR + SM :$ *MC*; luego $MC = r . \frac{RM.DR}{OF} + r \frac{RM.SM}{OF}$; de esta cantidad restaremos $MV = RN = r . \frac{RM.DR}{OF}$, y quedará $CV = r . \frac{RM.SM}{OF}$. La fuerza centrífuga del cuerpo que se mueve en la circunferencia *ARF*, es igual á $\frac{RM^2}{2OF}$ (32); luego *CV* es al efecto de la fuerza centrífuga, como $r . SM : \frac{1}{2} RM :: 2r . SM : RM$; pero *OD* : *OA* :: *SM* : *RM* (III.350); luego *CV* es al efecto de la fuerza centrífuga :: $2r . OD : OA$. Luego para que el cuerpo permanezca constantemente en el plano del equador, quando el equador diere la vuelta al rededor del diámetro *AB*, es preciso que haya una fuerza perpendicular al plano del equador, que varíe como la distancia al plano en el qual se hace el movimiento del ege, esto es, al plano que pasa por *OF* perpendicularmente á la figura y al círculo *AFB*, ó si se quiere, una fuerza que varíe como el seno de la distancia *RF*, ó el coseno de la distancia *AR* al diámetro *AB*, cuya fuerza en el punto *A* donde es máxima sea igual á la fuerza centrífuga β multiplicada por $2r$. Esto es cabalmente lo que buscábamos.

Esta fuerza proporcional á la distancia de cada partícula á una linea *OF*, ó á un plano que pasa por *OF*, perpendicular á la linea de los centros del Sol y de la Tierra, es de la misma especie que la fuerza con la qual

ca-

Fig. cada partícula de la tierra es atrahida del Sol (220).
30. Esta fuerza es nula quando el cuerpo está en *F*; porque bien se echa de ver que entonces *RN* es paralela é igual con *CM*, la diferencia *CV* desaparece; la velocidad del plano del equador al rededor de su diámetro *AB*, que es comun al cuerpo *R*, bastará sola para que permanezca en el plano del equador.

236 Aquí no atendemos á la corta diferencia que hay entre la velocidad real del cuerpo *R*, y su velocidad, supuesta uniforme, en el plano *ARF*. Verdad es que la velocidad real de *R* á *C* no es rigurosamente uniforme, si se supone uniforme la velocidad en el plano *ARF*, pero la diferencia es infinitamente menor que la fuerza *CV*; porque como suponemos infinitamente pequeño el ángulo *RAN*, será *RN* infinitamente pequeña respecto de la velocidad de rotacion *RM*; si imaginamos una linea desde *N* á *C*, formará un ángulo infinitamente pequeño con *NV*; luego la diferencia entre *NV* y *NC* será infinitamente menor que *CV* (VII. 36); luego si fuere *CV* un infinitamente pequeño de segunda orden, la diferencia que no hemos llevado en cuenta será un infinitamente pequeño de tercera orden.

237 Esta fuerza necesaria para un solo corpúsculo que se moviera en la circunferencia del equador, nos guiará para averiguar lo que debe suceder en un número mayor de corpúsculos que formasen un anillo continuo *AFB* en el plano del equador, y aun en el caso de haber anillos

llos concéntricos, como *GIK*, que diesen igualmente la vuelta dentro del equador; y vamos á demostrar que la misma fuerza se verificará con la misma ley, y bastará para mantener el equilibrio y el movimiento r en un esferoide que fuese totalmente fluido. Fig. 30.

Sea β la fuerza centrífuga de un corpúsculo puesto en el anillo esterior *ARFB*; la de un corpúsculo *I* puesto en un anillo interior *GIK*, bien que siempre en el plano del equador, será $\beta \frac{OI}{OF}$, esto es, proporcional al radio del anillo ó del círculo que traza (34); luego la fuerza que se necesita para detener el corpúsculo *I*, será $2r\beta \frac{OI}{OF}$ en el punto *I*.

238 Si consideramos un corpúsculo colocado en otra latitud, pongo por caso, á una distancia del equador igual á *GL*, hallaremos que esta fuerza mengua como el coseno de la latitud, del mismo modo que la fuerza centrífuga (34). Porque si imaginamos el plano del círculo *GLIK* levantado perpendicularmente al plano de la figura, de modo que sea *I* el polo del anillo chico, cuyo diámetro es *GK*, será *QO* igual al radio del paralelo que traza el punto *L*; luego la fuerza centrífuga que debajo del equador ó en *G* era $\beta . \frac{OI}{OF}$, será $\beta \frac{OI}{OF} . \frac{QO}{OI}$, ó $\beta . \frac{QO}{OF}$; luego la fuerza que se necesita para detener el corpúsculo en la circunferencia de su paralelo, en vez de ser $2r\beta . \frac{OI}{OF}$, será $2r\beta . \frac{OI . QO}{OF . OI} = \frac{2r\beta . QO}{OF}$. Pero en esta espresion no hay mas cantidad variable que *OQ*; luego la fuerza que se ne-

Fig. necesita para detener cada corpúsculo de la tierra en su círculo ó anillo, á una distancia qualquiera del equador, será tambien proporcional á la distancia *OQ* del corpúsculo respecto del diámetro *OF*, ó del plano que pasa por *OF* perpendicularmente á la figura, del mismo modo que (235) quando el cuerpo daba la vuelta en el equador.

31. 239 Sea *GEHF* un círculo ó un paralelo al equador, considerándole como compuesto de una infinidad de anillos concéntricos, que suponemos dén la vuelta al rededor del centro *C*, y del ege *PCOB* en virtud del movimiento diurno, con una velocidad igual á la unidad debajo del equador, mientras que el centro mismo *C* y la linea recta *OC* que es el ege del cono *GOH*, giran uniformemente en el plano del meridiano ó en la circunferencia del círculo *PQB*, con una velocidad angular $= r$; las fuerzas que se necesitan para detener las partículas del círculo *GEHF* en su plano, mientras dura este movimiento compuesto, serán las mismas que si el círculo *GEH* diera la vuelta al rededor de su diámetro *EF* perpendicular al plano *PQB* de la figura, y se supusiese inmobil este diámetro con su centro *C*, y la velocidad angular del círculo *GEH*, esto es, la velocidad de los puntos *G* y *H* igual á la que tenia antes el centro *C* al rededor del punto *O*. Con efecto, por ser siempre recto el ángulo *OCG*, el punto *G* trazará el arco *GQ*, y el punto *C* otro arco concéntrico, y semejante á *GQ*, el punto *G* visto desde el centro *C* tendrá el mismo movimiento angular que los puntos *G* y *C* vistos desde el centro *C*; si

si el punto *G* anda un grado del círculo *GQ*, tambien Fig. variará un grado la posicion de la linea *GC* que forma 3.1. con *OG* un ángulo constante; luego la rotacion al rededor de *C* habrá sido de un grado. Pero este movimiento angular al rededor del centro *C* y del diámetro *ECF* es el que pide una fuerza que pueda detener el corpúsculo en el plano de su círculo; porque el movimiento que fuese comun al centro y á todas las partes de la circunferencia no alteraría en ninguna manera el movimiento del corpúsculo en su círculo. Luego yá que el movimiento angular del punto *G* al rededor de su centro *C*, es en la nueva hypótesi el mismo que quando el centro *C* era inmobil, la fuerza que se necesita para detener el corpúsculo *G* será tambien la misma. Es, pues, constante que las fuerzas paralelas á *PCO*, ó perpendiculares al plano del círculo *GE*, que se necesitan para detener las partículas en el plano *EGFH*; siempre serán como las distancias al diámetro *GH* ó al plano *PHBQ*, en el qual se hace el movimiento del ege (235), del mismo modo que en el caso que consideramos antes (237), sea la que fuere la distancia del círculo *GEHF* al centro *O*; quiero decir, sea la que fuere la latitud del paralelo terrestre *GEHF*. Podemos, pues, suponer que todas las partes de la Tierra están solicitadas de una fuerza paralela al ege, que debajo del equador es $2r\beta$ en los estremos del diámetro al rededor del qual dá la vuelta al equador, y que siempre es proporcional á la distancia de cada partícula al plano del me-

Fig. ridiano perpendicular al espresado diámetro.

31. 240 Imaginemos un fluido homogeneo dando vueltas uniformemente al rededor del ege *PB*, en forma de esferoide aplanado, siendo *QR* el diámetro del equador, mientras que el ege mismo dará vueltas, conforme dejamos dicho (232), con un movimiento muy lento de *P* á *Q*, supuesto $= r$. De lo que hemos dicho antes se percibe, que á fin de que cada una de las partes del fluido se mantenga en equilibrio en el plano de su paralelo, ha de ser solicitada paralelamente al ege, ó perpendicularmente al equador por fuerzas que sean como las distancias al plano del meridiano *PRBQ*, y es preciso que la fuerza sea $2r\beta$ en el punto *A* del equador *QAR*, que está en el diámetro *OA*, al rededor del qual se hace el movimiento lento del equador. Veamos qual es la fuerza total que de esto resulta, á fin de que podamos comparar esta fuerza con la del Sol, cuya espresion dejamos (230) determinada.

29. 241 *Si todas las partículas de un esferoide* EPQO *son solicitadas de fuerzas paralelas al ege* PO, *proporcionales á la distancia de cada parte al plano que pasa por* PO, *ó á un meridiano, conforme hemos probado* (240) *que debe ser para que el equador se mueva una cantidad* r *de norte á sur; y si las dos mitades* PEO, PQO *del esferoide son solicitadas igualmente y ácia direcciones contrarias, la suma de todas estas fuerzas, ó la eficacia de la fuerza total que se empleare en hacer girar el esferoide al rededor de su centro, será la* quinta *parte de la que se verificaría, si*

to-

todas las partes del esferoide estuviesen juntas á la distancia CQ *del radio del equador.* Fig. 29.

Llamemos a el semidiámetro CQ del equador; A, la superficie de la elipse $OEPQ$; γ, la fuerza que obra en una partícula puesta á la distancia CQ, ó la fuerza que hallamos (235) igual á $2r\beta$; x, la distancia CM de una seccion paralela al meridiano; esta seccion cuyo diámetro es LN, tambien será una elipse semejante al meridiano $OEPQ$ (VII. 89). Pero por la propiedad de la elipse tenemos $CP^2 : LM^2 :: aa : aa - xx$; luego como la seccion por PO es igual á A, la seccion por LN será $A\frac{aa-xx}{aa}$, porque las figuras semejantes son como los quadrados de sus lados homólogos; luego la suma de todas las fuerzas que obran en la elipse menor, cuyo ege menor es LN, será $A.\frac{aa-xx}{aa}.\frac{x}{a}\gamma$, una vez que por la hypótesi la fuerza en M es á la fuerza γ que se verifica en Q, como x es á a. Esta fuerza que obra en toda la elipse LN, se debe multiplicar por el brazo de palanca CM, ó por la distancia al centro, conforme lo practicamos quando espresamos (223) la fuerza del Sol, porque tiene tanto mayor energía para hacer girar el esferoide quanto mas lejos del centro obra, y tendremos $A\gamma.\frac{aa-xx}{aa}.\frac{xx}{a}$ que será la espresion de la fuerza, con la qual la seccion elíptica procura hacer girar el esferoïde.

Si imaginamos otra seccion infinitamente próxima lmn, y multiplicamos la fuerza hallada por $Mm = dx$, tendremos la fuerza total en $LNnl$, cuya integral sacaremos

Fig. 29. haremos $x = a$ para sacar el efecto en el semiesferoide PQO, y el duplo será el efecto total, que será $\frac{4}{15} \,. aaA\gamma$. La masa del esferoide que llamamos S es igual á $\frac{4}{3}aA$ (20); luego $\frac{4}{15}aaA\gamma$ que es lo propio que $\frac{4}{3}aA \,.\, \frac{1}{5}a\gamma$ es tambien igual á $\frac{1}{5}a\gamma S$. Pero si toda la masa S estuviera á la distancia a, la fuerza sería $a\gamma S$, luego la fuerza en el esferoide es un quinto de la que la misma masa esperimentaría si estuviera toda en el punto Q; y esto es lo que nos propusimos averiguar.

Esta fuerza $\frac{a\gamma S}{5}$ ó $\frac{2r\beta a S}{5}$ (por ser $\gamma = 2r\beta$) es la que se necesita para causar en el ege del esferoide ó en el plano del equador, un movimiento angular igual á r de norte á sur.

242 Luego las partículas del esferoide permanecerán en su orden natural siguiendo los dos movimientos espresados, si la fuerza total que obra el movimiento r del ege, cuyo movimiento llamaremos F, fuese igual á $\frac{2r\beta a S}{5}$; luego $F = \frac{2ra\beta S}{5}$, y por consiguiente el movimiento del ege, ó el valor de $r = \frac{F}{\frac{2}{5}a\beta S}$; quiero decir que la fuerza total que gasta el Sol en la direccion de la linea de los centros para hacer girar el esferoide, dividida por $\frac{2}{5}a\beta S$, dará el movimiento del ege.

243. Queda, pues, demostrado que una fuerza total $\frac{2}{5}ar\beta S$ que obra en todo el esferoide, es capaz de causar el

el movimiento r en el plano del equador de norte á sur; pero Fig.
hemos visto que el Sol obra en todo el esferoide con una fuerza total $\frac{3\beta tt}{5T^2}(aa - bb)\frac{mn}{a}S$ (230) para hacerle girar de norte á sur; luego si hacemos esta proporcion: La fuerza $\frac{2}{5}ar\beta S$ es al movimiento r que de ella resulta, como la fuerza real del Sol es á un quarto término, sacaremos el movimiento que de esta debe resultar $= \frac{3}{2}\frac{tt}{T^2}\cdot\frac{mn}{a^2}(aa - bb)$; es, pues, este el angulillo que el ege de la Tierra anda en un instante infinitamente pequeño, tomando por unidad el movimiento diurno de rotacion.

El efecto no se manifiesta en el punto del equador donde el Sol obra, sino 90° mas allá. Supongamos que en un instante dado la accion del Sol procure mudar de lugar al punto E del equador una cantidad $DE = r$, en el tiempo que el punto E ha andado por medio de la rotacion ordinaria el arco AE, resultará de aquí un movimiento compuesto AD; el equador AEB se pondrá en la situacion ADC, y se apartará la cantidad CB; por esta razon el desvío es máximo á 90° del punto A, donde obra la fuerza perturbatriz. 32.

244 El angulillo $\frac{3ttmn}{2TTa^2}(aa - bb)$, que espresa quanto la accion del Sol desvía de su situacion al ege de la Tierra en un instante dado, es el mismo que el ángulo que forma el equador con el equador medio; pero dicho ángulo diferencial es mayor ó menor en unos tiempos que otros, por causa de la variacion de la declinacion del Sol,

Fig. Sol, ó de *m* y *n*. Vamos á averiguar qué efecto resulta de aquí en un tiempo finito, á fin de determinar la precesion de los equinoccios para tres meses, ó para el tiempo al cabo del qual *m* y *n* son las mismas, de donde la inferiremos para otro tiempo qualquiera.

33. Sea *ESL* la eclíptica; *EAC*, el equador; *BAD*, la nueva situacion que dá al equador la accion del Sol, que forma el ángulo *BAE* con su situacion antecedente, en el instante que le hemos considerado, esto es, estando el Sol en el punto *S* de la eclíptica, con una declinacion *AS*. Pongamos *k* en lugar de $\frac{aa-bb}{aa}$ en el valor del ángulo *A*, sacaremos $\frac{3t^2}{2T^2}kmn$ igual al ángulo *BAE* (243). En el triángulo esférico *BAE*, cuyo ángulo *A* es infinitamente pequeño, tenemos esta proporcion: sen *B*: sen *EA* :: sen *A*: sen *BE*, ó :: *A*: *BE* (VII. 54); luego *BE* que es la retrocesion del punto equinoccial *B* á lo largo de la eclíptica *BESL*, en un instante infinitamente pequeño, será $= \frac{A.\text{sen } EA}{\text{sen } B} = \frac{3t^2}{2T^2}kmn \frac{\text{sen asc. rect.}}{\text{sen } 23^\circ \frac{1}{2}}$, porque el punto *A* es el punto al qual corresponde el Sol para el tiempo que se ha calculado el corto movimiento del equador, esto es, quando el seno de la declinacion era *m*. Luego este valor de *BE* es la diferencial de la precesion de los equinoccios; la daremos despues una forma mas acomodada.

245. El equador *EAC* que se pone en la situacion *BAD*, está menos apartado de la eclíptica en el coluro de los solsticios *LDC*, ó á los 90° del punto equinoccial *E*;
34. la diferencia *CD* ó *SR* es la leve variacion de la oblicuidad

de

de la eclíptica, ó la nutacion que resulta de este movimien- Fig.
to del equador. Porque *SR* es el valor del exceso que el án- 34.
gulo ♈ lleva al ángulo *A*, pero la mudanza de las posiciones celestes solo puede pender de la posicion del equinoccio *A*, desde el qual se cuentan, y del ángulo *A* que forma la eclíptica con el equador. No es *IK* medida del ángulo *D*, diferencia de los ángulos ♈ y *A*, es *SR*; *IK* es la diferencia de las declinaciones *IL* y *KL*, pero estas declinaciones no están á distancias iguales del equinoccio, porque la una corresponde á la longitud ♈*L*, y la otra á la longitud *AL*; luego *IK* nunca es una cantidad que haga falta en nuestros cálculos; pero sirve *RS*, diferencia entre el ángulo ♈ y el ángulo *A*, combinada con la diferencia ♈*A* que se verifica en la posicion del punto equinoccial.

Quando decimos que *SR* es la diferencia entre el ángulo ♈ y el ángulo *A*, suponemos que *RL* es igual á *rl*, y esto es verdad en *R* ó á 90° del punto *A*, donde el arco *Rr* es sensiblemente paralelo á *LI*.

Para hallar el valor de la nutacion *CD*, repararemos 33.
que en el triángulo *CAD*, *R* : sen *AC* ó cos *AE* :: sen *A* : sen *CD* :: *A* : *CD*; luego la nutacion $CD = A \cdot \cos AE = \frac{3t^2}{2T^2} kmn \cdot \cos AE$; en cuya espresion hemos de introducir la longitud del Sol para darla una forma mas astronómica.

246 Hagamos

La longitud *ES* = ... *x*

Sen longit. ó sen *ES* = ... *si*

Cos longit. = ... *y*

Fig. Sen $23^\circ \frac{1}{2}$ ó sen AES = ... p

33. Cos $23^\circ \frac{1}{2}$ = ... q

Cos longit. = y = ... $\sqrt{(1 - xx)}$.

En el triángulo esférico EAS rectángulo en S, la declinacion del Sol = AS; su ascension recta = EA; su longitud = ES; tenemos, pues, sen AS = sen ES. sen E = px (III. 698); cos ES = cos AE. cos AS = y (III. 700); luego sen decl. cos decl. cos AE = pxy; luego mn. cos asc. rect. = pxy; por consiguiente la diferencial de la nutacion; esto es, el arco elemental CD será $\frac{3t^2}{2T^2}.kpxy$.

247. Ya que este ángulo es un quebrado del movimiento diurno que hemos supuesto = 1, le multiplicaremos por $366\frac{1}{4}$. ó $\frac{T}{t}$ (VII. 43), y será el mismo quebrado del movimiento anuo, el qual será $\frac{3t}{2T}kpxy$; por consiguiente con multiplicar por esta cantidad una parte qualquiera del movimiento anuo, qual es el arco elemental dz de la eclíptica que el Sol anda en un tiempo infinitamente pequeño, sacaremos el movimiento de precesion para el mismo tiempo. Finalmente, escribiendo en lugar de y su valor $\sqrt{(1 - xx)}$, y en lugar de dz su valor $\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ (III. 351), sacaremos la diferencial de la nutacion para el tiempo actual $\frac{3t}{2T}kpxdx$, cuya integral $\frac{3t}{4T}kpx^2$ es la nutacion total correspondiente al intervalo de tiempo que gastó el Sol en andar un arco z de la eclíptica.

248. Hemos de determinar tambien la precesion de los equinoccios, ó la cantidad total de BE para un tiempo finito; haremos estas dos proporciones (VII. 54) ER :

CD

CD :: sen EA : sen CA ó cos EA (VII. 54) :: tang EA: Fig.
1, y $EB : ER$ :: 1 : sen B; multiplicándolas ordenadamen- 33.
te sale $EB : CD$ :: tang EA : sen B. Pero tang EA = cos E. tang ES (III. 699) = cos E . $\frac{\text{sen longit.}}{\text{cos longit.}} = \frac{qx}{\sqrt{(1-xx)}}$; luego $EB : CD$ :: $\frac{qx}{\sqrt{(1-xx)}} : p$; si substituimos tambien en lugar de CD su valor $\frac{3t}{2T} kpxdx$ (247), sacaremos $EB = \frac{3t}{2T} \cdot \frac{kqx^2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$; esta es la diferencial de la precesion de los equinoccios, en quanto pende del Sol. La integral de $\frac{x^2dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ que pende de la quadratura del círculo es $\frac{z - x\sqrt{(1-xx)}}{2}$ (14); luego la integral que buscamos es $\frac{3t}{2T} \cdot \frac{kq}{2} (z - x\sqrt{(1-xx)})$, esta es la precesion de los equinoccios para el tiempo que gastó el Sol en andar el arco z de la eclíptica; la segunda parte de esta espresion es una parte variable ó una desigualdad de la precesion, que no pasa de un segundo, por cuyo motivo la despreciaremos.

249 La parte $\frac{3tkqz}{4T}$ de este valor, es la mas importante; se echa de ver que vá siempre creciendo, y esto prueba que la precesion de los equinoccios crece continuamente, como la longitud z del Sol. Para hallar su valor numérico, consideraremos que al cabo de tres meses $z = 90° = 324000''$; $x = 1$; tambien tenemos $q =$ cos $23° 28'$ $= 0{,}917$; $t = 1$ dia; $T = 365^d, 256$; $k = \frac{aa-bb}{aa} = \frac{1}{115}$, ó con corta diferencia el duplo del aplanamiento de la Tierra; tomando todos estos números, tendremos $\frac{3tkqz}{4T} = 5'' 28$; esta es la precesion media para tres meses; por consiguiente su quádruplo $21'' 12$ será la precesion media anua de los equinoccios causada por la accion del

Sol,

Fig. Sol, suponiendo la Tierra homogenea, y el aplanamiento $\frac{1}{230}$. Por las observaciones esta cantidad no pasa de $16''$, y se verá luego.

250 La Luna, obrando tambien en el esferoide, ocasiona en él un movimiento como el que acabamos de calcular. La precesion que la Luna causa la inferiremos facilmente de la del Sol; pero hemos de llevar en cuenta en este cálculo la situacion de los nudos de la Luna, y esto nos precisará á egecutar una operacion trigonométrica mas, porque la declinacion cuyo seno y coseno entran en las fórmulas antecedentes incluye el lugar del nudo, quando se trata de la Luna, cuya oblicuidad respecto del equador no es constante como la de la eclíptica.

34. Sea ♈B la eclíptica supuesta inmobil; ♈ED♎F, el equador en su primera situacion; $AGRDBH$, el equador mudado por la accion de la Luna en un instante infinitamente pequeño; $EGNFH$, la órbita de la Luna, cuyo nudo está en el punto N de la eclíptica, siendo el ángulo N de $5^\circ\ 8'\ 46''$, qual le sacó Mayer; esta es la inclinacion media de la órbita lunar.

251 Hagamos

La longit. ☊ $\stackrel{+}{-}$ ♈N = ... z

Sen ♈N = ... x

Cos ♈N = ... y

Sen ♈ $= 23^\circ \frac{1}{2} =$ .... a

Cos ♈ $= 23^\circ \frac{1}{2} =$ .... b

Sen $N = 5^\circ\ 9'$ c

Cos

Cos $N = 5° \ 9' =$ .... d Fig.
Circunferencia $= 6,28 =$ .... e 34.
Fuerza ☾ $= 2\frac{1}{2} =$ .... m
Precesion $= 14''\frac{1}{2} =$ .... p
Revol. ☾ $= 27^d =$ .... t
Año $= 365^d =$ .... T
18 años $=$ .... n.

La accion del Sol causa cada año $21''$ de precesion (249), suponiendo la Tierra homogenea, que se reducen á $14''\frac{1}{2}$, segun las observaciones, conforme lo manifestaremos en breve; luego la Luna, cuya masa es $2\frac{1}{2}$ veces la del Sol (113), causará dos veces y media mas precesion, siendo todo lo demás igual. Pero en los supuestos hechos, la precesion que causa la Luna en un mes será $\frac{mp}{T}$, quiero decir que seguirá la razon de su fuerza y del tiempo que obra, y esto en la órbita de la Luna, y en el supuesto de que la inclinacion de esta órbita respecto del equador sea siempre la misma que la inclinacion de la eclíptica al equador, esto es, que el ángulo E sea de $23° \frac{1}{2}$ como el ángulo ♈. Pero si el ángulo de inclinacion no llegare á $23° \frac{1}{2}$, la precesion será mayor en la razon de los cosenos; porque en la espresion de antes (249) en lugar de q, ó del coseno de $23° \frac{1}{2}$, tendríamos otro coseno que sería el del ángulo E; luego la espresion se debe dividir por q, y despues multiplicar por el coseno del ángulo E. Hecho esto, la precesion EG medida en la órbita de la Luna, en el discurso de una revolucion de la Luna, ó en un

mes

Fig. mes será $\frac{mpt}{T} \cdot \frac{\cos E}{\cos 23^{\circ}\frac{1}{2}}$ en la órbita de la Luna.

34. 252 Para reducir esta cantidad á la eclíptica ΥA en la qual es estilo contar la precesion, consideraremos que la inclinacion del ege de la tierra ó del equador terrestre ha de ser la misma en cada revolucion del Sol ó de la Luna, esto es, en su paso por el equador. Con efecto, la suma de todas las cortas mudanzas del ege, que causa la accion de la Luna, vuelve á obrar á cada revolucion; y suponiendo el nudo N inmobil en el discurso de un mes, la Luna en el discurso de una media revolucion de H á G ha obrado indispensablemente la mayor diferencia que pueda padecer la situacion del equador; luego el punto D que está en medio de los puntos G y H donde la órbita de la Luna corta el equador, es el mismo donde el equador mobil corta el equador primitivo. Luego $DE = DF = 90^{\circ}$. Pero siendo S el punto solsticial, ΥS es tambien $= 90^{\circ}$, de suerte que $DS = \Upsilon E$. Del triángulo DEG sacamos esta proporcion, sen ED ó R : sen G :: sen EG : sen D, ó :: $EG : D$; luego el angulillo $D = EG \cdot \text{sen}\, G = EG \cdot \text{sen}\, E$. Del triángulo esférico ΥDA tambien sacamos esta proporcion, sen A: sen ΥD (ó cos ΥE) :: sen D: sen ΥA ó :: $D : \Upsilon A$; luego $\Upsilon A = \frac{D \cdot \cos \Upsilon E}{\text{sen}\, A} = \frac{EG \cdot \text{sen}\, E \cdot \cos \Upsilon E}{\text{sen}\, 23^{\circ}} = \frac{mpt}{T} \times \frac{\text{sen}\, E \cdot \cos E \cdot \cos \Upsilon E}{\text{sen}\, \Upsilon \cdot \cos \Upsilon}$; este es el valor de la precesion que causa la Luna en el discurso de un mes, medida á lo lar-

largo de la eclíptica; debe variar de un mes á otro por Fig.
razon de la variacion del ángulo E; por este motivo con- 34.
sideraremos la leve precesion de un mes como la diferencial de la precesion total de 18 años; buscaremos su integral en conociendo la de la nutacion.

253 Del mismo modo determinaremos el valor de la corta nutacion SR para el mismo intervalo de tiempo, ó la diferencial de la nutacion, es á saber, la cantidad que el equador se ha arrimado á la eclíptica, sobre el coluro de los solsticios SRL, en el intervalo de un mes. Con esta mira haremos esta proporcion $R : \text{sen } DS :: D : RS$, luego $RS = D . \text{sen } DS = D . \text{sen } \Upsilon E$; pero $D = EG . \text{sen } E$, luego $RS = EG . \text{sen } E . \text{sen } \Upsilon E = \frac{mpt}{T} . \frac{\cos E}{\cos \Upsilon} \text{sen } E . \text{sen } \Upsilon E$. En esta espresion hemos de introducir la inclinacion N que es constante con corta diferencia, y la longitud ΥN del nudo que es uniforme ó poco le falta, considerando que $\text{sen } E : \text{sen } \Upsilon N :: \text{sen } N : \text{sen } \Upsilon E$; luego $RS = \frac{mpt}{T} . \frac{\text{sen } N . \text{sen } \Upsilon N . \cos E}{\cos \Upsilon}$. En esta espresion hemos de eliminar tambien el ángulo E, porque este ángulo varía por razon del movimiento de los nudos de la Luna; en el triángulo ΥEN tenemos $\cos E = \cos \Upsilon N . \text{sen } N . \text{sen } \Upsilon - \cos N . \cos \Upsilon$ (III. 769 y 789); ó $yca - db$; y porque el ángulo E es obtuso, la perpendicular caerá fuera del triángulo, el coseno de E será negativo, y tendremos $\cos E = bd - acy$; luego la corta nu-

Fig. nutacion será $\frac{mpt}{T} \cdot \frac{cx(bd - acy)}{b}$ suponiendo el nudo en N;
34. la consideraremos como una diferencial cuya integral será la nutacion total que se ha de verificar quando el nudo N hubiere dado la vuelta al cielo.

254 Esta diferencial de la nutacion la hemos de espresar con la diferencial de la longitud del nudo que ahora llamaremos dz. Con este fin consideraremos que la duracion t de una revolucion entera de la Luna es á la duracion n de una revolucion entera del nudo, como dz que es el movimiento medio del nudo en un mes, es á toda la circunferencia del círculo que llamaremos e; luego $t = \frac{ndz}{e} = \frac{ndx}{e\sqrt{(1 - xx)}}$ (III. 351). Hagamos $T = 1$, de modo que n sea $= 18,6$ (VII. 816), y substituyamos el valor de t en la diferencial de la nutacion. Con escribir $\sqrt{(1 - xx)}$ en lugar de y, tendremos $mpn \cdot \frac{c}{eb}$ $\left(\frac{dbxdx}{\sqrt{(1 - xx)}} - acxdx\right)$, cuya integral es (III. 472 y 491) $\frac{mpnc}{eb}\left(-db\sqrt{(1 - xx)} - \frac{acx^2}{2}\right)$. Pero quando $x = 0$, es preciso que la nutacion sea nula, pues los movimientos se cuentan desde el punto equinoccial, y desde el mismo punto empieza la accion periódica de la Luna; luego la integral sacada ha de ser $= 0$, quando $x = 0$. Sin embargo $- db\sqrt{(1 - xx)} - \frac{acx^3}{2}$ es entonces $= - db$, luego hemos de añadir $+ db$ (III. 501) á la integral hallada, y esta integral completa será $\frac{mpnc}{eb}\left(bd - bd\sqrt{(1 - xx)} - \frac{1}{2}acxx\right) = \frac{mpnc}{eb}(db.$ sen verso $z - \frac{1}{4}ac.$ sen verso $2z)$, porque el quadrado del seno de un arco es igual á la mitad del seno verso del duplo del arco (II. 397). Esta es la

nu-

nutacion entera, ó la diminucion de la oblicuidad de la eclíptica que causa la Luna desde que el nudo estaba en el equinoccio de Aries hasta que llega á N. Esta espresion se reduce á un número de segundos, porque p está espresada en segundos, pues es igual á $14''\frac{1}{2}$ por las observaciones (263), y todas las demas cantidades de la espresion antecedente son quebrados del radio, y tambien la cantidad e, ó la circunferencia del círculo igual á 6,41 (VII.46). Fig. 34.

255. La diferencial de la precesion $\frac{mpt}{T} \cdot \frac{\text{sen } E . \cos E . \cos \Upsilon E}{\text{sen } \Upsilon . \cos \Upsilon}$ es á la diferencial de la nutacion $\frac{mpt}{T} \cdot \frac{\cos E . \text{ sen } E . \text{ sen } \Upsilon E}{\cos \Upsilon}$, como $\frac{\cos \Upsilon E}{\text{sen } \Upsilon}$ es á sen ΥE ó como cotangente ΥE es á sen Υ; luego la diferencial de la nutacion multiplicada por $\frac{\cot \Upsilon E}{\text{sen } \Upsilon}$, ha de dar la diferencial de la precesion. Pero cot $\Upsilon E = \frac{ad + bcy}{cx}$ (III. 784), luego $\frac{\cot \Upsilon E}{\text{sen } \Upsilon} = \frac{ad + bc\sqrt{(1 - xx)}}{acx}$; luego multiplicando esta cantidad por la diferencial de la nutacion $= \frac{mnpc}{bc}\left(\frac{dbx}{\sqrt{(1-xx)}} - acx\right)dx$, sacaremos la de la precesion $= \frac{mpn}{abc} \cdot \left(\frac{abd^2}{\sqrt{(1-xx)}} + (bb - aa)\,dc - abc^2 . \sqrt{(1 - xx)}\right)dx$, cuya integral, llamando z el arco cuyo seno es x, será (13) $= \frac{mnp}{abc}\left(ad^2bz + (bb - aa)\,dcx - \frac{1}{2}abc^2z - \frac{1}{2}abc^2x\sqrt{(1 - xx)}\right)$, ó $\frac{mpn}{abc}\left[(dd - \frac{1}{2}cc)abz + (bb - aa)dc . \text{ sen } z - \frac{1}{4}abcc . \text{ sen } 2z\right]$ (II. 378). Este es el va-

Fig. valor de la precesion verdadera que causa la accion de la Luna, mientras el nudo anda el arco z.

256 Ahora hemos de espresar con números la nutacion y la precesion: quando el nudo de la Luna ha andado una media revolucion, tenemos $z = 180°$; pero el seno verso de $180°$ es 2, y el seno verso de $2z$ ó de $360° = 0$; luego al cabo de una media revolucion del nudo la nutacion $\frac{mpnc}{eb}(db.$ sen v. $z - \frac{1}{4}ac$ sen v. $2z)$ (254) es $\frac{mpnc}{eb}.2bd$, ó $\frac{2mpncd}{e}$; esta cantidad se reduce á $19''2$, quando se supone $2\frac{1}{2}$ la fuerza de la Luna, ó $m = 2\frac{1}{2}$; porque entonces hemos de suponer la precesion solar $p = 14''\frac{1}{2}$; á fin de que las dos juntas compongan $— 50''3$ que es la precesion observada. Pero si se quisiera que la nutacion fuese de $18''$ y dar por exactas de todo punto las observaciones de Bradley (VII. 496), se supondría $m = 2,09$, y $p = 16'',28$, entonces la nutacion será de 18 como en este egemplo:

Log. 2.....	0,30103
2,09.....	0,32015
16,28.....	1,21184
18,613.....	1,26982
sen 5°.....	8,95310
cos 5°.....	9,99824
6,28.....	9,20192
18″0	1,25610

257 Para espresar tambien con números la precesion hallada, se supone que el nudo haya andado una media revolucion; entonces $z = \frac{c}{2}$; sen z y sen $2z = 0$; luego los dos últimos términos del valor hallado desaparecen, y la precesion total es $\frac{mpn}{2}(dd - \frac{1}{2}cc)$, y porque el quadrado de un coseno $dd = 1 - cc$, se reduce á $\frac{mpn}{2}(1 - \frac{3}{2}cc)$; luego en el discurso de toda una revolucion de los nudos la precesion será dupla de esta cantidad, ó $mpn(1 - \frac{3}{2}cc)$.

Ma-

258 Manifiesta esta espresion que la precesion media que la Luna ocasiona, es á la precesion *mpn* que se verificaría si la Luna diera la vuelta en la eclíptica (251), como $1 - \frac{3}{2}cc$ es á 1, ó como 0,9879 es á 1. Fig.

259 Si comparamos las espresiones (256 y 257) echaremos de ver que la cantidad de la nutacion, que es de 18″ por los cálculos precedentes, en el discurso de nueve años ó de una media revolucion del nudo, es á la precesion correspondiente, como $\frac{4cd}{e}$ es á $1 - \frac{3}{2}cc$, esto es, como 1 es á 17,35.

260 Sacaremos la desigualdad ó la equacion de la precesion restando de la precesion verdadera para un tiempo qualquiera, la precesion media para el mismo tiempo. Sea z la longitud del nudo para un intervalo dado de tiempo: como la precesion media correspondiente á una media revolucion del nudo es $\frac{mpn}{2}(dd - \frac{1}{2}cc)$, tendremos para el tiempo correspondiente al arco z, la precesion $\frac{z}{e}$. $mpn(dd - \frac{1}{2}cc)$; restando esta precesion media de la precesion verdadera hallada antes (255), sacamos la diferencia ó equacion $\frac{mpn}{abc}\left[(bb-aa)dc . \text{sen } z - \frac{1}{4}abc^2 \text{ sen } 2z\right]$. Desecharemos el segundo término que lleva el quadrado del seno c de un ángulo de 5°, que no puede dar mas que un quarto de segundo. Tendremos, pues, para la espresion máxima de la equacion, estando el nudo en el solsticio, esto es, siendo sen z igual á 1, $\frac{mnpcd}{abe}(bb - aa)$.

261 Esta equacion de la precesion es á la nuta-

Fig. cion de 18″ ó $\frac{2mpncd}{e}$ (256), como $bb - aa : 2ab$, como 1 es á $\frac{2ab}{bb-aa}$ ó á la tangente del duplo de la oblicuidad de la eclíptica (VII. 23). Esta regla que resulta de la teórica concuerda con la hypótesi que hemos seguido en el cálculo de la nutacion (VII. 510), y no es otra cosa que la construccion de la espresion antecedente. Con
35. efecto, si suponemos que *PQ* sea á *PB* como $bb - aa$ es á b, ó como el coseno de 46° 56′ es al coseno de 23° 28′ (VII. 23), esto es, como 0,7444 es á 1, ó con corta diferencia, como 3 es á 4, y tomamos *BPO* igual á la longitud del nudo, el lugar del polo estará en *M*. Pero $PQ : BV :: \frac{bb-aa}{2} : b$, y tang PEQ : tang $PQ :: PEQ : PQ :: R$: sen $23° :: 1 : a$; luego multiplicando ordenadamente, $PEQ : BV :: \frac{bb-aa}{2} : ab :: bb - aa : 2ab$; esta es la proporcion que debe haber, en virtud de la teórica antecedente, entre la precesion máxima, igual al ángulo *BEQ*, y la nutacion total de 18″.

262 Determina, pues, la teórica la razon entre la nutacion observada en latitud, y la desigualdad de la precesion de los equinoccios, de modo que podemos determinar esta por la otra. Si suponemos con Bradley que la nutacion es de 18″, la equacion máxima de la precesion será 16″ 8, la precesion que el Sol causa será 16″ 3, y la de la Luna 33″ 7; entonces la fuerza de la Luna sería 2,09, esto es algo mayor que el duplo de la del Sol (256).

263 Pero si la nutacion observada fuese de 19″, tendría-

driamos $17'' 8$ para la equacion, $14'' 5$ para la precesion solar, $35'' 5$ para la que la Luna causa, y $2\frac{1}{2}$ para la fuerza de la Luna, conforme lo supusimos (114 y 256). Esta cantidad puede conciliarse con las observaciones de Bradley, con tal que en ellas se suponga $1''$ no mas de error, cosa muy posible en las observaciones, y con esto se conciliarían tambien las observaciones de las mareas con las de la nutacion. Esta es la razon porque hemos supuesto en el discurso de este tratado, que la fuerza de la Luna es $2\frac{1}{2}$ veces como la del Sol; se puede suponer tomando un medio término que es $2\frac{1}{4}$; y de esto siempre resultará que la precesion que el Sol causa no es $21''$ conforme se sigue de la teórica (249), sino $15\frac{1}{2}$, y que la tierra no es homogenea. Fig.

264 Los $35''$ de precesion media, que son efecto de la Luna, serían causados con la misma uniformidad que los del Sol (248), si la Luna estuviera siempre á la misma declinacion quando corresponde al mismo punto del equador. Pero por causa del movimiento de sus nudos (VII. 815), sucede que en sus diferentes revoluciones se aparta mas ó menos del equador, y obra en él con mas ó menos fuerza. Quando el nudo ascendiente está en Aries, la mayor distancia de la Luna respecto del equador, llega hasta $28^\circ \frac{3}{4}$; pero quando el nudo ascendiente está en Libra, nueve años despues, la Luna no se aparta del equador mas de $18^\circ \frac{1}{4}$ en cada revolucion. Entonces su atraccion total en el esferoide, en el discurso de

Fig. una revolucion, es mucho menor; pues, segun hemos visto (228), pende del seno *m* de la declinacion; por esta razon es tan desigual la precesion anua en el intervalo de 18 años, y tan grande la nutacion.

265 Añadiremos á todo lo dicho una esplicacion elemental de una particularidad que suele dar que hacer á los principiantes, y quedará mas perceptible cómo la atraccion de la Luna causa la variacion de la oblicuidad de la eclíptica. Quando el nudo ascendiente está en Aries, entonces la Luna se aparta mas del equador, y tiene mas fuerza para mudar el plano del equador, y por lo mismo
36. la oblicuidad de la eclíptica. Sea ♈*G*♎ la eclíptica; ♈*M*♎, el equador; *EG*, la órbita de la Luna; este planeta se aparta mucho ácia el norte del equador quando su nudo ascendiente *G* está en Aries, entonces la Luna atrahe al equador ácia aquel lado con mas fuerza. Parece que entonces el equador *EM* debería acercarse á la eclíptica *EG*; sin embargo entonces el ángulo es cabalmente el mayor, y la oblicuidad de la eclíptica en vez de ser $23^\circ\ 28'\ 0''$, es $23^\circ\ 28'\ 9''$.

Para apear esta dificultad, es preciso tener presente que la mayor mudanza del equador no se hace en el punto donde obra la Luna, sino 90° mas allá (243).
37. Por consiguiente quando la Luna, andando el arco *LA*, obra mas en el equador ♈*Q* cerca de los puntos solsticiales, este efecto se hace perceptible ácia los equinocciales ♈ y ♎; no resulta, pues, de aquí efecto alguno para mudar la obli-

oblicuidad de la eclíptica ó la distancia del punto *E* de Fig.
la eclíptica al punto *Q* del equador. Veamos quando se hace la mayor mudanza.

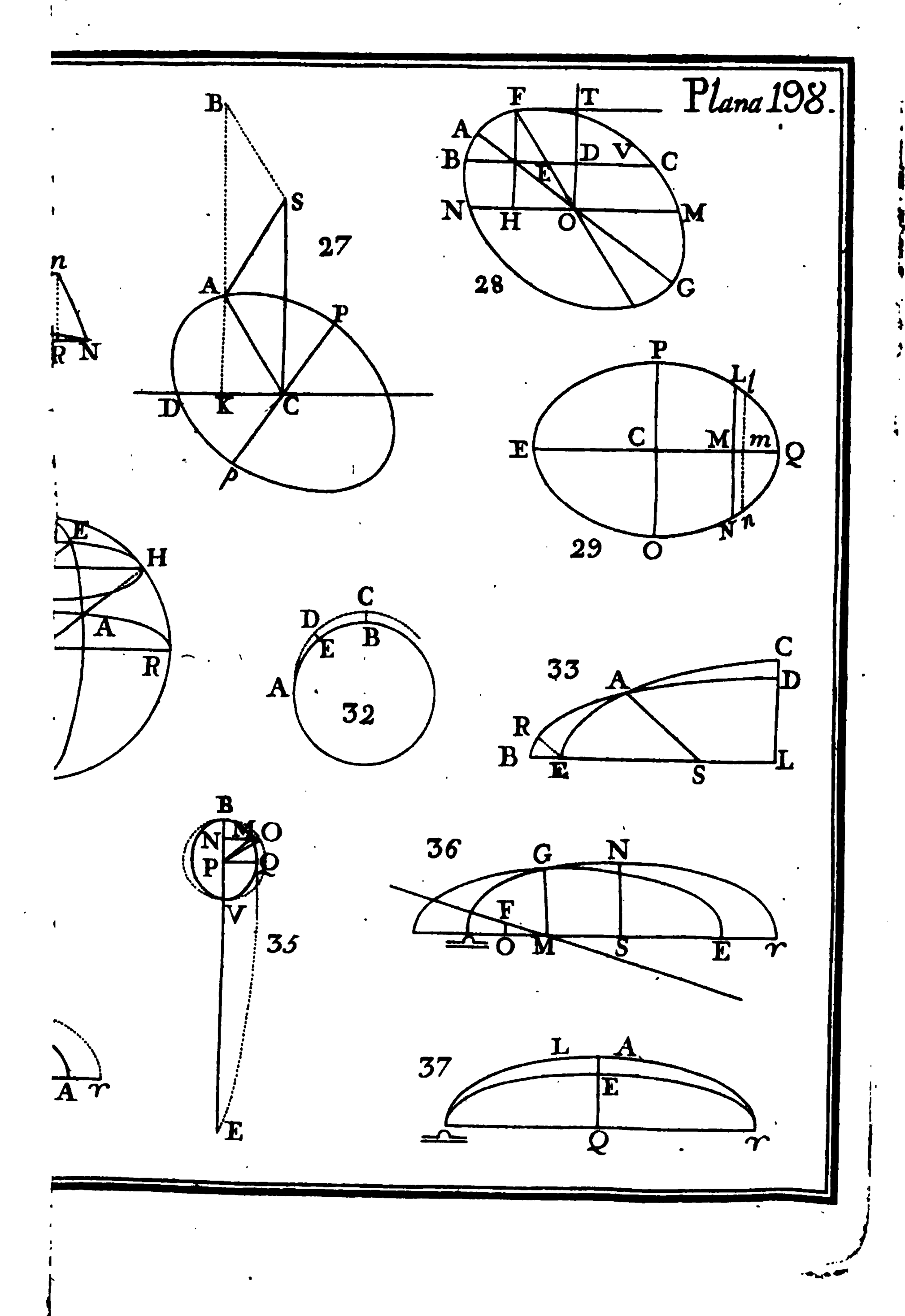
Quando el nudo de la Luna está en *G*, en el solsti- 36.
cio, atravesando la Luna el equador en *E*, no obra para inclinar el equador; porque para obrar es menester que esté de él á cierta distancia, y quanto mas apartada está, tanto mas obra. Estando la Luna en *G*, á la máxima distancia posible del equador, atrahe mas; si *MO* es el movimiento diurno del equador terrestre en 1'' de tiempo, y *OF* la cantidad de fuerza con que la Luna obra perpendicularmente á su plano, el equador se pondrá en la direccion *MF*; luego en el coluro de los solsticios *NS* donde se mide la oblicuidad de la eclíptica, el equador *MS* parecerá mas distante de la eclíptica *N*; luego la oblicuidad parecerá aumentada por la accion de la Luna.

Todo el tiempo que el nudo ascendiente *G* permaneciere en la parte boreal de la eclíptica, ó en los signos ascendientes, se verificará este efecto; esta es la razon porque se va acumulando: y finalmente quando el nudo *G* de la Luna llega con su movimiento retrogrado á ♈, la accion es nula, pero la equacion originada del efecto que se ha verificado hasta aquel instante, es la mayor, así como en el movimiento elíptico de los planetas, la equacion es máxima quando cesa de crecer la velocidad (VII.706). Esta es cabalmente la razon porque la

 obli-

Fig. oblicuidad de la eclíptica es la mayor (VII.498) en el tiempo que la accion de la Luna en el equador está en una situacion menos acomodada para obrar este aumento, y parece que debería causar un efecto contrario.

ELE-


Plana 198.
27
28
29
32
33
35
36
37

ELEMENTOS

DE CRONOLOGÍA,

DONDE SE TRATA PARTICULARMENTE

DEL CALENDARIO.

266 COmo los fundamentos de Cronología estriban en la medida de los años y dias, y por consiguiente en la comparacion de los movimientos del Sol con los de la Luna, y de ambos con los sucesos de la historia, es esta ciencia un ramo de la Matemática dependiente de la Astronomía, igualmente que el uso continuo que hacemos del Calendario; trataremos, pues, de los Años, de sus diferentes divisiones, de los cyclos que de ellos se componen, del Calendario, de los Periodos antiguos, y de las Épocas mas celebradas.

267 Las *Horas planetarias* usadas antiguamente entre los Judios y los Romanos, se contaban desde el nacer del Sol, y se las daba el nombre de uno de los siete planetas, cuyo estilo siguieron antes los Egypcios, segun Herodoto, ó los Caldeos, segun afirman otros escritores. Se cree que á los dias de la semana se les pusieron los nombres de los planetas por el orden que sabemos, por razon del influjo que se supuso tenian en las diferentes horas del dia. El Domingo, al nacer el Sol, la primera hora era para el Sol, seguíanse despues Venus, Mercurio,

la Luna que se suponian debajo de él, despues Saturno, Júpiter y Marte que se suponian encima. Seguíase de aquí que el dia siguiente empezaba por la Luna, y esta es la razon porque el dia de la Luna, esto es, el Lunes se siguió inmediatamente despues del dia consagrado al Sol. Estas horas planetarias eran *desiguales*, porque el dia natural se dividía en doce partes, y la noche en otras doce.

268 Las *Horas Babylónicas* se contaban desde el nacer del Sol, conforme se estila aun hoy dia en Norimberga. Las de los Egypcios y Romanos empezaban á media noche; y esto se estila aun hoy dia en las mas de las Naciones de Europa.

Todos los Astrónomos empiezan el dia á medio dia, conforme se estilaba en otros tiempos entre los Umbros, y se estila hoy dia entre los Arabes; los Astrónomos cuentan tambien hasta 24 horas; así, quando por el estilo comun decimos el dia 2 de Enero á las 8 de la mañana, los Astrónomos dicen el dia primero de Enero á 20 horas, y este es el tiempo que llamamos *tiempo astronómico*.

Los Judios y Romanos distinguian en el dia artificial, contandole desde que el Sol nace hasta que se pone, quatro partes principales, *Prima*, *Tercia*, *Sexta* y *Nona*. Prima empezaba al nacer el Sol; Tercia, tres horas despues; Sexta empezaba á medio dia; y Nona, tres horas antes de ponerse el Sol; pero estas horas duraban mas ó menos, conforme el Sol estaba mas ó menos tiempo sobre el orizonte; los mismos nombres se usan todavia en

el

el Breviario de la Iglesia Romana. Estas son las horas Judaicas, planetarias ó desiguales.

269 Los Atenienses contaban las horas desde que el Sol se ponía; lo mismo se practíca en Italia, y se practicaba tiempos pasados en Polonia, Austria y Bohemia; pero ya no hay en Praga mas que dos reloges de esta especie. Los Italianos cuentan las 24 horas desde media hora despues de puesto el Sol.

270 En la mas remota antiguedad ya se estilaba dividir el tiempo en semanas de siete dias; parece que lo estilaban los pueblos mas antiguos del oriente, y los Indios del Perú. Hay quien afirma que los Griegos fueron la única Nacion que no tuvo semanas de siete dias; pero muchos Escritores son de parecer de que este modo de dividir el tiempo solo se practicaba entre los Judios. Como quiera, no se puede negar que el número siete fue muy notable y distinguido entre los Antiguos.

Por lo que toca al origen de esta práctica, es muy probable que viene de las fases de la Luna que no se deja ver sino por espacio de quatro semanas ó 28 dias, y esto sirvió de norma á todas las Naciones para dividir el tiempo; estas fases varían con corta diferencia cada siete dias, y si las semanas se hubiesen hecho de ocho dias, hubieran sobrado tres dias al cabo de un mes. Fuera de esto, los años solares de 365 dias se dividen, con diferencia de un dia, en semanas de siete dias, siendo así que hubieran sobrado cinco dias, si se le hubie-

biesen dado ocho dias á cada semana. Parece, pues, que el estilo de contar por meses y años debia dar origen á la semana de siete dias.

Años de los Antiguos.

271 En los tiempos mas remotos, todos los Pueblos, y los Egypcios tambien, hacian el año de un mes lunar de 30 dias. Hubo despues años de dos meses, de tres, de quatro, y finalmente de doce. Dentro de poco hablaremos de los años lunares, que se estilan entre los Turcos y los Arabes, cuyos años son de 354 y 355 dias; pero la primera regla constante que se ha seguido acerca de los años, fue la de los años de 365 dias, que eran todos iguales; estos son los años llamados años Egypcios. El Sol atrasaba cada año Egypcio seis horas, y el equinoccio se verificaba un dia mas tarde cada quatro años en el año Civil; este atraso componía un año cabal al cabo de 1461 años Civiles, ó de un periodo canicular. Los años Egypcios se estilan todavía en Persia.

272 Entre nosotros el año Civil unas veces es de 365 dias, y otras de 366; y empieza el dia 1 de Enero; los Antiguos Romanos le empezaban el dia 1 de Marzo en el Reynado de Rómulo; los Griegos, por el mes de Septiembre: Numa Pompilio mandó que empezase en Enero.

273 Parecia natural que el año empezára por la primavera. Pero el motivo que tuvieron los antiguos para empezarle desde el mes de Enero fue sin duda que desde el sols-

solsticio de invierno el sol vuelve á subir á nuestro emisferio boreal; parecióles que este principio de elevacion é incremento de los dias debia ser el principio del año.

274 El año que hoy dia se divide en 12 meses solares de 30 ó 31 dias, le dividió Rómulo en diez meses no mas, y constaba de solos 304 dias. El primer mes se llamaba *Marte* en obsequio del Dios, cuyo descendiente se llamaba Rómulo; los meses de Julio y Agosto se llamaban *Quintil* y *Sextil*; el mes de Diciembre era, como lo dá á entender su mismo nombre, el décimo y último mes del año. Numa añadió 50 dias al año lunar de los Romanos, haciéndole de 354 dias. Los meses de los Romanos eran entonces de 29 y 30 dias alternadamente, para que correspondiesen á los meses lunares que son de $29\frac{1}{2}$; Numa formó el año de 12 meses, mudó los seis meses que tenian 30 dias para hacerlos ímpares; estos seis dias, con los 51 que añadió antes, eran 57, con los quales hizo dos meses, el uno de 29 dias, y el otro de 28.

Es opinion de varios Escritores que Numa puso estos dos meses al principio del año, para que empezára en el invierno, por ser esta la estacion en que los dias empiezan á crecer. Estos meses de 29 y 30 dias componian un año lunar de 355 dias, que tiene 10 dias menos que el año solar, por manera que al cabo de tres años el invierno yá no empezaba á principios de Enero, sino de Febrero. Practicó, pues, Numa, del mismo modo que los Griegos, una intercalacion, mediante la qual el invierno siempre debia empe-

pezar á principios de Enero, pero distribuyó los dias intercalados de un modo particular; despues de pasados dos años, se añadieron 22 dias; despues de pasados quatro años, se añadieron 23 dias; en el sexto año 22 dias; en el octavo 23; de suerte que en ocho años se intercalaban 90 dias.

No repararon desde luego los Romanos que este modo de intercalar daba 8 dias de mas; porque su año lunar tenia un dia mas que el de los Griegos. Sucedió, pues, que al cabo de 30 años el invierno no empezaba con Enero, sino con Diciembre, fue por consiguiente preciso reformar despues este método, y al cabo de dos octavas de años se contentaban con añadir *66* dias en lugar de *9*0 á la tercera octava; esto estaba al cargo de los Sacerdotes. Los Griegos añadian los dias intercalares al fin del año; muchos Autores son de sentir, que siguiendo su egemplo hicieron lo mismo los Romanos; porque el mes de Febrero era como el fin del año antiguo que empezaba por Marzo; y añaden que aquel fue el último mes del año de Numa, hasta el tiempo de los Decemviros, 450 años antes de J.C. Esta opinion tiene algun fundamento en estos versos de Ovidio:

Qui sequitur janum veteris fuit ultimus anni,
Tu quoque Sacrorum, Termine, finis eras.

Estos versos esplican tambien porqué los dias intercalares se añadian no al último de Febrero, sino despues del dia 24 del mismo mes, llamado *VI° Calend. Martii*, por causa de la fiesta del Dios *Término*, que se celebraba á 23 de

de Febrero (VII° Cal. Martii). Estos dias intercalares que eran 22 ó 23 componian cada dos años, como un tercer mes que segun Plutarco se llamaba *Merkedonio*, ó mas comunmente *Intercalar*.

Pero estas intercalaciones, que estaban al cuidado de los Sacerdotes, padecieron alguna alteracion; hubo tiempos en que por supersticion omitieron las intercalaciones; y sucedió tambien que los Sacerdotes, con algunos fines particulares, hicieron años mas ó menos largos.

Julio Cesar se empeñó, 46 años antes de Christo, en remediar el desorden de este Calendario, y aclarar su confusion. Quiso que los años civiles se correspondiesen con los años astronómicos, con el fin de que en una misma estacion siempre se contasen los mismos meses, y la primavera cayera en los mismos meses del año. Julio Cesar era aficionado á la Astronomía, y habia escrito obras sobre algunos puntos de esta Ciencia.

275 Se habia hecho indispensable en tiempo de Julio Cesar reformar enteramente el Calendario. Hallábase Cesar Dictador y Pontífice, y á él tocaba principalmente este cuidado. Para evacuar su encargo con mas acierto llamó á Roma á Sosígenes, Matemático de Egypto, que se dedicó con sumo empeño á esta grande obra. Dió á entender á Cesar, que para determinar una forma constante en los años era forzoso abandonar la Luna, y acudir á los movimientos del Sol; pero como el año solar era de 365 dias y un quarto, era preciso por razon de este quarto,

dar-

darle un dia mas al año donde se juntasen estos quatro quartos de dia.

Discurrió, pues, Sosígenes hacer tres años de 365 dias, y el quarto de 366, y no se tocó á la correspondencia que habia entre el principio del año, y el principio del invierno, y del mes de Enero, ó por mejor decir, de la Luna nueva que se siguió aquel año al solsticio de invierno, por no apartarse demasiado del uso de los Romanos. Egecutóse esta reforma el año 45 antes de J. C. y el año de 44 antes de Christo fue el primer año Juliano; el equinoccio se verificó el dia 25 de Septiembre; se alargó el año 90 dias hasta la Luna nueva que se siguió al solsticio de invierno, de modo que el año tuvo por aquella vez no mas 444 dias, y se le llamó el *Año de confusion*.

276 El año de Numa no tenia mas de 355 dias, fue, pues, menester añadir diez; Cesar, siguiendo el egemplo de Numa, repartió estos diez dias de modo que no se tocase á los meses de Marzo, Mayo, Quintil (ó Julio), y Octubre, porque Rómulo les habia dado 31 dias; añadió dos dias á cada uno de los meses de Enero, Sextil (Agosto), y Diciembre que eran de 29 dias, con lo que fueron de 31; añadió un dia al mes de Abril, Junio, Setiembre y Noviembre que tenian 29, para que fuesen de 30 dias. No añadió nada al mes de Febrero: *Ne Deûm inferûm religio immutaretur*, dice Macrobio; porque el mes de Febrero estaba consagrado á los muertos, y la voz *Febrero* viene de *Februus*, Dios de las lustraciones ó de los sacrificios que

que se celebraban en obsequio de los Dioses Manes.

277 Hasta entonces el mes intercalar habia sido el mes de Febrero, y al mes de Febrero dió tambien Cesar el dia intercalar, que añadia cada quatro años, despues del dia 23 de Febrero, ó el dia 7 de las Calendas de Marzo, y antes del regifugio ó de la fiesta que se celebraba en memoria de la expulsion de Tarquino, que caía al dia VI de las Calendas; este dia, en vez de ser el 24, era entonces el 25, y el 24 que era el dia intercalar, se llamaba *Bis sexto Calendas Martias*, porque el dia del regifugio guardaba su nombre de *Sexto Calendas*, y caía al 25. De aquí provino llamarse *Bisiestos* los años en que el mes de Febrero tenia 29 dias, y el 24 de Febrero se llamaba *Bis sexto Calendas.* Todos los años de la Era vulgar, así antes como despues de J. C. cuyo número es divisible por quatro son bisiestos.

278 Julio Cesar habia nacido el dia 4 de los Idus del mes *Quintil*; despues de su muerte, Antonio su colega en el Consulado, promulgó una ley mandando que á este mes se le diera el nombre de Julio Cesar, y se ha llamado *Julio* desde el segundo año de la reformacion Juliana (275). Al mes Sextil le llamaron despues *Augustus*, Agosto, por un decreto que dió el Senado despues de la batalla de Acio; no porque Augusto hubiese nacido en el mes Sextil, pues el dia de su nacimiento era el IX Cal. Octob. ó el 23 de Setiembre; sino porque en aquel mes obtuvo el Consulado, triunfó tres veces, conquistó

el

el Egypto, y puso fin á las guerras civiles, por cuyos motivos contemplando el Senado aquel mes como el mas dichoso del Imperio de Augusto, mandó que en adelante se le llamase con el nombre de este Emperador.

279 Despues de muerto Julio Cesar hubo alguna leve alteracion en las intercalaciones. Como los Pontífices no entendian la regla que acerca de esto les habia dado, añadian un dia al principio del año en vez de añadirle al fin; hacian bisiesto el quarto año contando el bisiesto antecedente, por manera que no habia sino dos años comunes, siendo así que debe haber tres entre dos años bisiestos; se advirtió este error al cabo de 36 años, habia habido entonces 12 bisiestos, siendo así que no debia haber habido mas que 9. Para remediarlo mandó Augusto que en los 12 años siguientes no hubiese ninguna intercalacion, á fin de quitar con esto tres dias á la serie y al orden de los años que Julio Cesar habia dispuesto. Desde aquel tiempo no ha habido interrupcion alguna en el Calendario Juliano, por lo menos esta es la opinion comun.

280 A pesar de la ventaja que el Calendario Juliano llevaba al de los años Egypcios, era todavía imperfecto, porque haciendo el año de 365 dias 6 horas, habia una equivocacion de 11′ cada año (VII. 554), y los 11′ habian ocasionado una diferencia de diez dias; esto dió motivo á la correccion Gregoriana, de que vamos á hablar.

De la Correccion Gregoriana para los años solares.

281 La correccion del Calendario habia sido propuesta muchas veces desde que se habia notado que los equinoccios anticipaban muchos dias (280). El Papa Sixto IV formó determinadamente la resolucion de ponerla por obra; llamó á Roma á Regiomontano, cuya fama é inteligencia en estos asuntos le hacian acreedor á la confianza de aquel Pontífice; pero aquel célebre Astrónomo falleció en Roma en el año de 1476 antes de desempeñar la comision para la qual se le habia llamado. El Concilio de Trento, al concluir sus sesiones en 1563, dejó al cuidado del Papa la correccion del Calendario. Finalmente el Papa Gregorio XIII logró concluir esta grande obra en 1582; y el Calendario que dispuso se llama *Calendario Gregoriano.* En 1577 envió á todos los Príncipes Christianos un resumen de los motivos que le empeñaban en la correccion del Calendario, rogándoles los comunicasen con todos los Matemáticos, de cuya inteligencia pudiesen prometerse ó pensamientos nuevos ó expedientes acomodados. Despues de recibidas varias disertaciones sobre este asunto, formó el Papa en Roma una junta de los hombres de mayor habilidad para llevar á su conclusion esta importante obra. Este Calendario Gregoriano que se ha hecho yá el Calendario Civil en todos los Paises de Europa, consiste en un modo de contar los años, tal que las estaciones siempre caen en unos mismos tiempos del año.

282 Se tomó por fundamento de la correccion del Calendario la decision del Concilio Niceno, celebrado en el año de 325, que pone el equinoccio al dia 21 de Marzo, y manda que la Fiesta de Pasqua de Resurreccion se celebre el Domingo *despues* del XIV de la Luna del primer mes, esto es, de la Luna cuyo 14 cae ó *al dia mismo, ó despues del dia del equinoccio.*

En tiempo del Concilio Niceno se creía que el año era con corta diferencia de $365^{d}\ 5^{h}\ 55'$, conforme á la opinion de Ptolomeo (VII. 553); se supuso, pues, que el equinoccio que caía entonces á 21 de Marzo siempre caería al mismo dia, ó que si no fuese así, con el tiempo se remediaría. Pero como la verdadera duracion del año solar tiene seis minutos menos (VII. 554), el equinoccio caía cada año seis minutos antes de lo que se pensaba, y en tiempo de Gregorio XIII por el año de 1577, cayó á 11 de Marzo; para que el dia 21 de Marzo se hallase constantemente inmediato al verdadero equinoccio, hubiera sido preciso desechar tres dias del año cada 400 años.

283 El dia 24 de Febrero de 1581 se publicó el Breve de Gregorio XIII, en el qual manda guardar los tres artículos, cuya observancia nos habia de poner siempre conformes con la mente del Concilio Niceno. Manda el Breve 1.° Que pasado el dia 4 de Octubre se le quiten diez dias á dicho mes, de modo que el dia despues de S. Francisco que cae á 4 de Octubre, se llame no el 5, sino el dia 15 de Octubre, y la letra dominical *G* se mude en *C*:

Pa-

2.° Para que en adelante el equinoccio de la primavera no se pueda apartar del dia 21 de Marzo, manda el Breve que los años bisiestos que ocurrian de quatro en quatro años, no se verifiquen en los años de 1700, 1800, 1900, sino en el año 2000, y perpetuamente á este tenor; de modo que haya siempre tres años seculares comunes, y el quarto sea bisiesto por el orden que sigue.

1600, bis.	2100, com.	2600, com.	3100, com.
1700, com.	2200, com.	2700, com.	3200, bis.
1800, com.	2300, com.	2800, bis.	3300, com.
1900, com.	2400, bis.	2900, com.	3400, com.
2000, bis.	2500, com.	3000, com.	3500, com.

3.° Para hallar con mas seguridad el catorce de la Luna Pascual, y los dias de la Luna en todo el discurso del año, se omite en el Calendario el Número de Oro, y en su lugar se substituye el Cyclo de las Epactas, por cuyo medio la Luna nueva siempre guardará su verdadero lugar en el Calendario. Este punto le trataremos dentro de poco con toda individualidad.

El Papa manda despues á todos los Eclesiásticos sigan la nueva forma del Calendario; exhorta y ruega al Emperador y demás Príncipes Christianos la hagan seguir en sus Estados.

284 De la supresion que se hizo en 1582 de diez dias en los Estados de los Príncipes Católicos no mas, se

originó una diferencia que ha durado mucho tiempo en Europa en el modo de contar los dias. Por egemplo, siempre que se contaba en Inglaterra el dia 2 de Enero, se contaba el 12 en España, esto es, diez dias mas; los que temian resultase de aquí alguna equivocacion ponian la fecha de este modo $\frac{2}{12}$ de Enero, es á saber, el 2 estilo antiguo ó estilo Juliano, y el 12 estilo nuevo ó estilo Gregoriano. Quando se hubo suprimido en 1700 un año bisiesto por la regla del Calendario Gregoriano, la diferencia fue de 11 dias; porque en el Calendario Juliano se habia hecho el año de 1700 un dia mas largo; por cuyo motivo se contaba despues un dia menos.

285 Esta distincion del estilo antiguo y nuevo ha subsistido mucho tiempo entre los Paises Protestantes y Católicos. La reformacion se ha admitido por fin en Inglaterra, donde se ha empezado á seguir el estilo nuevo desde el año de 1752; los Ingleses suprimieron entonces 11 dias, y se hallaron conformes en su modo de contar con el Calendario Gregoriano. El Calendario Gregoriano está admitido hoy dia de todas las naciones civilizadas de Europa; y solo en Rusia se cuentan todavía 11 dias menos que en los demás Paises.

Del Cyclo Solar, y de las Letras Dominicales.

286 En algunas ocasiones se hace uso del Cyclo Solar que es un intervalo de 28 años, al cabo de cuyo tiempo los dias de la semana caen en los mismos dias del mes, y

se

se siguen por el mismo orden, mientras que los años son bisiestos de 4 en 4 años. Por el método que seguimos actualmente en contar los años de este Cyclo, empiezan 9 años antes de la Era Christiana.

Así, para hallar en qué año del Cyclo Solar estábamos en 1763, se añaden 9 á 1763, la suma 1772 se divide por 28, el cociente 63 nos está diciendo que el Cyclo Solar ha empezado 63 veces desde la Era Christiana; pero la division deja la resta 8, hay, pues, 8 años mas que los 63 Cyclos completos, y estamos en el año octavo, quiero decir, que en 1763 estábamos á 8 de Cyclo Solar.

287 En todos los libros de Rezo hay una forma de Calendario perpetuo, donde los 12 meses del año están señalados con letras al lado de cada dia; sirven estas letras para señalar los dias de la semana que corresponden al dia del mes, por un orden que vuelve á empezar cada 28 años. Se pone una *A* enfrente del dia primero de Enero; *B*, enfrente del dia 2, y se prosigue á este tenor; si el año empieza en Domingo, como sucedió en 1758, la letra *A* será la letra Dominical, y todos los Domingos del año estarán señalados con una *A*, en cada mes del Calendario perpetuo. Despues que hubieren ocurrido 52 veces las siete letras *A*, *B* &c. en el Calendario, quiero decir al cabo de 52 semanas que componen 364 dias, el dia 365^mo del año empezará otra vez con una *A*, y será tambien un Domingo, porque el año comun empieza y acaba en un mismo dia del mes, pues 52 veces 7 son 364:

Con esto el año siguiente empezará en Lunes, y su primer Domingo caerá á 7 del mes; pero en el Calendario perpetuo la letra que corresponde al 7 del mes es una *G*, y por lo mismo la letra Dominical de este segundo año será la *G*, la del tercer año sería una *F*, y se proseguiría del mismo modo ácia atras.

Pero quando el año es Bisiesto, el mes de Febrero tiene 29 dias, la letra *D* que empieza el mes de Marzo denotará por consiguiente un dia de mas: si hubiere sido Dominical en los dos primeros meses del año, señalará despues el Lunes, y la letra antecedente se halla ser Dominical. Esta es la razon porque en los años Bisiestos siempre hay dos letras Dominicales, la una sirve para el mes de Enero y Febrero, hasta el dia de S. Mathias esclusive, la otra sirve para los diez meses restantes.

En 1756 el Cyclo Solar era 1, y las letras Dominicales *D* y *C*; en los 27 años siguentes tenemos *B*, *A*, *G*, *F* (y *E*); *D*, *C*, *B*, *A* (y *G*); *F*, *E*, *D*, *C*, (y *B*); *A*, *G*, *F*, *E* (y *D*); *C*, *B*, *A*, *G* (y *F*); *E*, *D*, *C*, *B* (y *A*); *G*, *F*, *E*, y despues se empieza otra vez por *D* y *C* por el mismo orden en los 28 años siguientes que forman otro Cyclo Solar.

288 En este siglo se puede hallar de dos modos la letra Dominical; añádasele, por egemplo, 5 al número de los años de este siglo con tantas unidades mas quantos Bisiestos hubiere en este intervalo; divídase la suma por 7, el residuo señalará la letra Dominical del año,

lla-

llamando *G* la primera, *F* la segunda &c. Para manifestar la razon de esta práctica, sépase que las letras Dominicales de 1696 eran *A* y *G*; era, pues, 1 la letra Dominical de 1696, y hubo cinco antes de 1701. Desde entonces todos los años han tenido una letra, luego se han de tomar tantas letras quantos son los años desde 1700, y cinco mas; y como los años Bisiestos tienen dos letras, se han de añadir todavía tantos números quantos Bisiestos ha habido; por egemplo, en 1763 se sumarán 63 con 5 y 15, se dividirá 83 por 7, y quedará el residuo 6, y quiere decir que la sexta letra *B* era la letra Dominical de 1763.

El segundo método para hallar la letra Dominical es como sigue. Divídase el número del año desde 1700, mas su quarta parte por 4, réstese el residuo de 3 ó de 10, se sacará el guarismo que indica la letra Dominical en la tabla siguiente. Supongamos que se trate del año de 1757, añadiremos á 57 su quarta parte 14, dividiremos la suma 71 por 7, quedará el residuo 1, le restaremos de 3, y saldrá 2 que por el orden de la tabla manifiesta que *B* era la letra que buscamos para el año de 1757.

A,	*B*,	*C*,	*D*,	*E*,	*F*,	*G*
1	2	3	4	5	6	7

Estas dos reglas solo servirán hasta 1799 inclusive, porque los años de 1800 y 1900 no serán Bisies-

tos, conforme lo son los demas años de 4 en 4, de donde resultará una interrupcion en el curso ordinario de las letras Dominicales; porque el año de 1800 no tendrá mas que la letra *E* en lugar de las dos letras *E* y *D* que la corresponderían por la regla antecedente. Los números que van puestos debajo de cada letra tambien sirven para averiguar qual será el primer Domingo del año; por egemplo, quando la letra Dominical es *A*, el primer Domingo cae á 1 de Enero, quando es *B*, cae á 2 &c.

289 Para hallar la letra que corresponde á cada dia del mes en un año qualquiera, se divide por 7 el número de los dias que se han pasado desde el principio del año; el residuo de esta division será el número correspondiente á esta letra, porque las letras se siguen sin interrupcion en todo el discurso del año; si este número fuere 1, tendremos *A*, si fuere 2, tendremos *B* &c. del mismo modo que en la tabla antecedente. Para averiguar mas facilmente el número de los dias que se han pasado desde el principio del año, pondremos aquí una tabla para los primeros dias, y los dias décimos y vigésimos de cada mes, acerca de la qual prevendremos que quando el año es Bisiesto, se debe indispensablemente añadir la unidad despues del mes de Febrero, porque estos años siempre tienen un dia mas, que se coloca en el mes de Febrero donde compone el dia 29.

Me-

Meses del año	Dias corridos desde el principio del año			
	á 1	á 10	á 20	
Enero	1	10	20	
Febrero	32	41	51	
Marzo	60	69	79	En los años Bisiestos se ha de añadir 1.
Abril	91	100	110	
Mayo	121	130	140	
Junio	152	161	171	
Julio	182	191	201	
Agosto	213	222	232	
Septiemb.	244	253	263	
Octub.	274	283	293	
Noviemb.	305	314	324	
Diciemb.	335	344	354	

290 Para saber en qué dia de la semana cae un dia señalado del mes, como por egemplo el dia 20 de Febrero de 1762; á 1761 completo añádasele el número de Bisiestos que incluye, es á saber 440, réstense 12 dias, y añádanse 51 dias, esto es, los dias que ván ya desde principio del año, divídase la suma 2240 por 7, no hay residuo ninguno; esto prueba que el dia propuesto caía en Sabado, si restára 1, caería en Domingo &c.

Si se quisiera averiguar lo mismo en el antiguo Calendario, no se debería restar mas que 1 en lugar de 12, porque en el estilo antiguo se cuentan 11 dias menos.

291 Pondremos aquí otra tabla que sirve para averiguar qué dia de la semana corresponde á cada dia del mes, quando es conocido el año del Cyclo Solar, ó la letra Dominical. Los números que están en la parte superior de la tabla espresan el orden de los meses en el supues-

puesto de que el mes de Marzo sea 1; los demas números de la tabla indican los dias del mes que corresponden á uno de los dias de la semana, señalado por la letra Dominical puesta en la parte inferior de la tabla. Así, quando la letra Dominical es *G*, como en 1770, el Domingo cae por Abril y Julio en los dias 1, 8, 15, 22 y 29; por Septiembre y Diciembre en los dias 2, 9 &c. por Junio á 3, 10 &c. Quando la letra Dominical es *F* como en 1771, todos los números de la tabla señalan el Lunes; porque el número 1 que corresponde á los meses 5 y 2, esto es, á Julio y Abril, señala con efecto que estos dos meses empiezan en Lunes; el número 2 que está debajo de 7 y 10, esto es, de Septiembre y Diciembre, está diciendo que en estos dos meses el 2 cae en Lunes &c. Quando los nombres de los meses no están gravados en las dos primeras lineas, y solo hay 5, 7 &c. 2, 10 &c. se debe tener presente que 2 es el mes de Abril, 3 el mes de Mayo &c.

Ta-

Tabla para saber qué dia del mes corresponde á cada dia de la semana, una vez conocida la letra Dominical.

Julio. 5	Sept. 7	Junio. 4	Febrer. 12	Agost. 6	Mayo 3	Enero. 11
Abril. 2	Dic. 10		Marzo. 1			Octub. 8
			Nov. 9			
1 8 15 22 29	2 9 16 23 30	3 10 17 24 31	4 11 18 25	5 12 19 26	6 13 20 27	7 14 21 28
G Dom.	*F* Lun.	*E* Mart.	*D* Mierc.	*C* Juev.	*B* Viern.	*A* Sab.

Del Cyclo Lunar y del Número de Oro.

292. El *Cyclo Lunar* es un espacio de 19 años solares, ó de 6939 dias que coge 235 lunaciones, por manera que al cabo de 19 años las lunas nuevas se verifican en el mismo grado del zodiaco, y por consiguiente en el mismo dia del año que 19 años antes. Llámase año primero de un Cyclo lunar, aquel en que la Luna nueva es el dia 1 de Enero, por lo menos, segun el Calendario Gregoriano; de estas 235 lunaciones se le dan 12 á cada año, y esto compone 228 lunaciones, de 29 y 30 dias alternadamente; restan 7 que se llaman lunaciones em-

embolísmicas ó intercalares, hay seis de 30 dias cada una; pero la séptima no es mas que de 29 dias, se la pone al último del Cyclo ó del 19^{no} año, donde forma una irregularidad. Este Cyclo le inventó Meton unos 430 años antes de Christo; y se tuvo en Grecia en tanta estima este invento, que se grababa su cálculo con letras de oro, y de aquí proviene que se llama todavía *Número de Oro* el año del Cyclo lunar en que estamos.

Siempre que la Luna nueva se verifica el dia 1 de Enero, se empieza otro Cyclo lunar, y es 1 el Número de Oro. La regla general para hallar el número de Oro en todos tiempos es la siguiente; se añade 1 al año de nuestra era, porque en el año 1 de J. C. el Número de Oro hubo de ser 2, se divide la suma por 19; el residuo, si le hay, señala el año del Cyclo lunar en que estamos, esto es, el Número de Oro que corresponde al año propuesto. Por egemplo, para hallar el Número de Oro correspondiente al año de 1764, añadiremos 1, y dividiremos 1765 por 19, el cociente será 92, porque el Cyclo lunar ha vuelto á empezar 92 veces desde J. Christo; pero habrá el residuo 17, y esto nos está diciendo que el Número de Oro en 1764 era 17. Si no dejare la division resta alguna, será señal de que estamos en el año último del Cyclo y que el Número de Oro es 19.

293 Para averiguar con toda puntualidad quanto el Cyclo lunar que seguimos, discrepa de 19 años Julianos de $365^d \frac{1}{4}$ cada uno, ó de $6939^d\ 18^h$; todo se redu-

ce

ce á multiplicar por 235 la revolucion synódica de la Luna que es de $29^d\ 12^h\ 44'\ 3''\ 10'''\ 48''''$ segun las tablas Prusianas que sirvieron para el Calendario, y se sacarán, segun dice Clavio, $6939^d\ 16^h\ 32'\ 27''\ 18'''$; hay, pues, un exceso de $1^h\ 27'\ 32''\ 42'''$; luego al cabo de los 19 años las lunas nuevas se verificarán $1^h\ \frac{1}{2}$ antes, pues el Cyclo acabará con corta diferencia $1^h\frac{1}{2}$ antes de acabarse los 19 años, cuya cantidad compondrá al cabo de $312\frac{1}{2}$ años el valor de $23^h\ 59'\ 52''49'''$, esto es, un dia menos $7''\ 11'''$; porque $1^h\ 27' : 19 :: 24^h : 312$. Haciendo el cálculo con mas rigor, se sacará la anticipacion cabal de un dia en $312\frac{1}{2}$ años mas $23^d\ 17^h$; los $312\frac{1}{2}$ años componen, 1.° una equacion de un dia cada 300 años; 2.° cada 2400 años, hay 100 años de atraso, y la equacion de un dia se atrasa un siglo, porque los 12 años $\frac{1}{2}$ omitidos cada 300 años, componen un siglo al cabo de 2400 años. Por este último resultado de $312\frac{1}{2}$ años se ha arreglado la equacion lunar de un dia entero para cada espacio de 300 años, menos un tercio de dia, al cabo de 2400 años por razon de los $12\frac{1}{2}$ años de mas; tambien se podría decir menos un tercio de dia, al cabo de 481436 años, por razon de los $23^d\ 17^h$, que componen entonces con corta diferencia cien años; pero como en el uso civil la equacion no se puede hacer sino de un dia, se ha acordado que al cabo de cada 2400, se dejasen pasar 100 sin llevar en cuenta la equacion lunar. Se desprecia la diferencia que habria

al

al cabo de 481436 años, porque este periodo excede al de 300000 años, para el qual se formó principalmente el Calendario.

294 Quando se hizo la correccion Gregoriana, hubo muchos Astrónomos que siguiendo el cálculo de Hyparco, aseguraban que se le habia de añadir un dia al Cyclo lunar al cabo de 304 años, y no al cabo de $312\frac{1}{2}$. Si admitimos con Mayer que el mes lunar fuese ácia el año de 1700 de $29^d\ 12^h\ 44'\ 2''\ 8921$, sacaremos para 235 lunaciones $6939^d\ 16^h\ 31'\ 19''\ 6435$, esto es, respecto de los 19 años ó 6939^d y 18^h, como $1^h\ 28'\ 40''\ 3565$ de menos. Esta cantidad es á 6939^d 18^h, como 24^h son á 308 años $278^d\ 3^h$; por consiguiente el error del Cyclo lunar sería de un dia en 308 años y $278^d\ 3^h$, y no en $312\frac{1}{2}$ años. Pero como aquí no llevamos otra mira que dar á conocer el Calendario Gregoriano qual se nos ha propuesto, supondremos con sus Autores que la revolucion de la Luna es puntualmente qual se halla en las tablas Prusianas de Erasmo Reinhold, que tuvieron presentes los Matemáticos que egecutaron la correccion.

No ha habido en mucho tiempo otro medio para hallar las lunas nuevas de cada mes que el Cyclo lunar; pero por razon de la imperfeccion que le acabamos de notar, se le ha substituido el de las epactas, que declararemos muy en breve.

295. Las combinaciones del Cyclo Solar y del Cyclo

clo Lunar, forman un período que ha de dar las lunas nuevas en los mismos dias de la semana, y del mes, porque al fin de cada Cyclo Solar, los dias del mes caen en unos mismos dias de la semana, y al cabo de cada Cyclo Lunar, las lunas nuevas caen en unos mismos dias del mes. Si multiplicamos 19 por 28, ó el Cyclo Solar por el Cyclo lunar, saldrán 532 años; este es un período del qual se valió Dionysio el Exiguo en el año de 527, el mismo que al corregir el Calendario, tomó por época el nacimiento de Christo. A este período tambien se le llamó periodo Victoriano, y grande Cyclo Pascual, porque al cabo de este intervalo de 532 años, las lunas nuevas caen en unos mismos dias de la semana y del mes, así como las letras Dominicales, Pascua de Resurreccion y las fiestas movibles se hallan en el mismo orden. Para hallar en qué año estamos de este período se añadirán 457 al año corriente, se dividirá la suma por 532, y el residuo será el año de la época Dionysiana; pero desde la correccion Gregoriana no se hace uso ninguno de este período.

Del Cyclo de Indiccion, del Período Juliano, y otros períodos.

296 Las *Indicciones* ó especies de emplazamientos que se estilaban en los Tribunales en tiempo de Constantino y de los Emperadores que se le siguieron, formaron un período ó cyclo de 15 años que se ha perpetuado sin motivo, y como una forma arbitraria de numeracion; las indicciones empezaron el dia 25 de Septiembre de 312.

Los

Los Emperadores Griegos, y la Iglesia de Constantinopla empezaban desde 1 de Septiembre; los Sumos Pontífices que tambien la usan, empiezan desde 1 de Enero de 313.

Si se prolonga este período ácia atrás, se hallará que empezaría 3 años antes de la era Christiana; basta, pues, añadir 3 al número del año, y dividir la suma por 15, el residuo de la division será el número del cyclo de indiccion que corresponde al año propuesto. Respecto del año de 1763, por egemplo, dividiremos 1766 por 15, el cociente 117 nos dirá que desde el principio de nuestra era ha habido 117 revoluciones de este cyclo, y el residuo 11 de esta division será el número de indiccion que corresponde á 1763.

297 El *Período Juliano* es el producto de los tres cyclos, solar, lunar y de indiccion, ó de 28, 29 y 15; quiero decir un espacio de 7980 años, en los quales no puede haber dos años que tengan unos mismos números para los tres cyclos; pero al cabo de este intervalo los tres cyclos vuelven á empezar por el mismo orden. Para saber quanto ha que este período empezó, se añaden 4713 años al año de la era Christiana, y la suma es el año del periodo Juliano que corresponde al año en que estamos.

Joseph Escalígero propuso el período Juliano como una medida universal en la Cronología; á él reduciremos mas adelante todas las épocas. Kepler y Bouillaud le usaron en sus tablas Astronómicas.

Quan-

298 Quando respecto de un año cuyo Cyclo Solar, Número de Oro é Indiccion son conocidos, se busca el período Juliano, es preciso resolver una cuestion indeterminada arisméticamente, pero determinada cronológicamente, que se puede proponer en estos términos.

Hallar un número tal que si se le divide por 28 *dé la resta* a, *si se le divide por* 19 *dé la resta* b, *y si se le divide por* 15 *dé la resta* c.

Llamemos x, y, z los cocientes de las tres divisiones, el número que buscamos será $28x + a = 19y + b = 15z + c$, y teniendo presente lo dicho (II. 144 y sig.), para resolver en números enteros la equacion $28x + a = 19y + b$ ó $y = x + \frac{9x + a - b}{19}$, supondremos $m = \frac{9x + a - b}{19}$, $x = 2m + \frac{m - a + b}{9}$; igualaremos esta fraccion con n, y sacaremos $m = 9n + a - b$, luego $x = 2m + \frac{m - a + b}{9} = 19n + 2a - 2b$; $28x + a = 532n + 57a - 56b = 15z + c$. Para resolver esta equacion la daremos esta forma $z = 35n + 3a - 3b + \frac{7n + 12a - 11b - c}{15}$, igualaremos la fraccion con p, y sacaremos $n = 2p - a + b + \frac{p - 5a + 4b + c}{7}$, y haciendo esta fraccion $= q$, saldrá $p = 7q + 5a - 4b - c$, luego $n = 2p - a + b + q = 15q + 9a - 7b - 2c$; y $532n + 57a - 56b$ que es el valor de $15z + c$ será $= 7980q + 4845a - 3780b - 1064c$; y este es tambien el valor del número que buscamos ó el año del período Juliano. De aquí se saca esta regla general; restando los productos del Número de Oro por 3780

y de la Indiccion por 1064 del producto de 4845 por el Cyclo Solar (despues de añadirle si fuere menester 7980), se dividirá la diferencia por 7980, si se pudiere, y el residuo de la division será el número que se busca, ó el año del período Juliano.

Por egemplo. En 1770 los Cyclos eran 15, 4 y 3, los productos 72675, 15120 y 3192, el cociente 6, y el residuo de la division 6483; este es el año del período Juliano que corresponde á 1770.

299 Aunque el Cyclo lunar sea el período mas sencillo entre los que espresan con alguna puntualidad el regreso de la Luna al Sol, hay sin embargo otros muchos períodos que han tenido algun nombre, como el de 8 años que usaron Cleostrato y Harpalo, el período Caldaico de 18 años y diez dias, del qual hemos hablado bastante (VII. 827). El de 59 años propuesto por Philolao y OEnopides, y finalmente el período de Calippo.

Calippo Cyziceno, Astrónomo Griego, vivia 330 años antes de Christo, fue el primero que propuso el período de 76 años quadruplo del Cyclo lunar de Meton, porque con quitar un dia de los quatro Cyclos le hacia mas puntual. Se asegura que él fue quien descubrió el error del Cyclo de Meton, con motivo de un eclipse de Luna que hubo 6 años antes de la muerte de Alexandro Magno. Este Cyclo ó período de Calippo empieza en el Otoño del año de 4383 del período Juliano, 330 años antes de Christo.

Los antiguos tambien hacen memoria del período de 82 años propuesto por Demócrito, del de 247 años que propuso Gamaliel, y del de 304 años del qual se valió Hyparco para los años civiles.

300 Hállase tambien en los antiguos alguna noticia de un período de 600 años que Casini propuso como el mas exacto de todos los períodos lunisolares. *Josefo lib.* 1. *cap.* 4. *art.* 15. de sus Antiguedades Judaicas, dice, que los Patriarcas no hubieran podido perficionar la Astronomía, si hubiesen vivido menos de 600 años, *porque el año Grande no se acaba sino despues de la revolucion de seis siglos.* Previene tambien Casini que 600 años Solares cada uno de $365^d\ 5^h\ 51'\ 37''\frac{1}{2}$, y 7421 meses lunares synódicos (siendo cada uno (VII. 788) de $29^d\ 12^h\ 44'\ 3''$) componen dos sumas iguales una con otra, es á saber, 219146 dias $12^h\ 15'$ ó $18934258500''$; para la Luna solo hay $3''$ mas. Estos períodos discrepan poco de los que hemos hallado, esto es, para el año, $365^d\ 5^h\ 48'\ 45''\frac{1}{2}$, y para el mes lunar, dos mil años ha $29^d\ 12^h\ 44'\ 2''\ 95$. Así, al cabo de 600 años la Luna se ha de hallar otra vez en conjuncion con el Sol en el mismo punto del cielo.

Si se toma el año qual le conocemos, y el mes synódico qual le dejamos indicado, habrá $28^h\ 33'\ 51''$ de mas en los 7421 meses lunares, y la Luna atrasaría mas de un dia al cabo de los 600 años; pero en aquellos tiempos tan remotos no se podia conocer el año Solar con tanta precision.

P 2 Hay

301 Hay quien diga que el *Neros* de los Caldeos era este período de 600 años, pero son muy varios los pareceres de los Escritores acerca del valor de los tres períodos antiguos conocidos con los nombres de *Sosos*, *Neros* y *Saros*. Halley ha llamado Saros al período Caldáico de 18 años y once dias ó de 223 lunaciones (VII. 827) bien que sin prueba alguna.

302 El año lunar compuesto de 12 meses synódicos (VII. 788) es de 354 dias 9^h; porque no son de ninguna consecuencia los once minutos, que faltan para las 9 horas; así el tiempo que debe tardar el principio del año lunar en concordar con el principio del año Solar es de 2835 años Solares trópicos, que componen 2922 años Lunares cabales. Este se llama el período Lunar de los Egypcios.

303 La precesion de los equinoccios formaba otro período llamado de los Antiguos Ἀποκατάστασις ó *restitutio*, por restituirse las estrellas á las mismas situaciones respecto de los círculos de la esfera, cuyo período es de 25972 años.

De las Epactas ó de la Correccion Gregoriana para los años lunares.

304 El fin principal á que se dirigía el Calendario que Gregorio XIII mandó seguir en 1582, era arreglar los años civiles de modo que el equinoccio de la Primavera siempre cayese cerca del dia 21 de Marzo, para procurar que las mismas estaciones cayesen perpetuamente en los

los mismos dias del mes; este fin se logró por medio de las intercalaciones que dejamos declaradas (283).

Pero la correcion abrazaba otro punto mas de suma importancia atendidos los fines del Sumo Póntífice; este punto consistía en restituir las lunas nuevas y sobre todo el catorce de la Luna Pascual al mismo estado en que se hallaron en el año de 325 al tiempo que se celebró el Concilio Niceno, y de cuyo estado se hallaban distantes mas de 4 dias.

305 El Concilio Niceno manda que se celebre la fiesta de Pascua de Resurreccion el primer Domingo *despues* del 14 de la Luna, si este 14 cae á 21 de Marzo ó despues del 21 de Marzo; por consiguiente la fiesta de Pascua jamás puede celebrarse antes del dia 22 de Marzo, porque la regla dice que se celebre el primer Domigo *despues* del catorce. Tampoco se puede celebrar mas tarde que el diá 25 de Abril; porque si la Luna llena cae á 20 de Marzo, no será esta la Luna llena Pascual, se esperará la que se sigue al dia 21 de Marzo ó la del dia 18 de Abril; y si el 18 de Abril cae en Domingo, el dia de Pascua será el Domingo siguiente ó el dia 25 de Abril.

El P. Natal Alejandro dá noticia en su Historia Eclesiástica del cuidado que ha puesto la Iglesia desde el Concilio Niceno en que no se cometiese algun error acerca del dia en que se debe celebrar Pascua de Resureccion; en varios siglos llamó su atencion este asunto; pero la correccion del Calendario acerca de este punto no se con-

cluyó hasta el año de 1582 en el pontificado de Gregorio XIII. Uno de los primeros que la contemplaron objeto digno de su desvelo, fue S. Hipolyto Obispo y Martyr que vivia en el año de 228.

306 El Cyclo Pascual de S. Hipolyto era de 112 años, componíase de 7 Cyclos de 16 años; no se hallaba en los Autores ninguna noticia de él; pero en 1551 cavando en un campo de las inmediaciones de Roma en el camino de Tivoli, se encontró en las ruinas de una Iglesia antigua de S. Hipolyto una estatua sentada, que tenia á su lado este Cyclo con letras griegas desde el año de 222 hasta el año de 333.

Los Sumos Pontífices pensaron varias veces en egecutar esta correccion (281). Gregorio XIII. llamó á Roma desde el año de 1576 sabios de diferentes Naciones; un Médico llamado *Aloisius Lilius* presentó entonces á su Santidad un proyecto de Calendario con este título: *Compendium novæ rationis restituendi Calendarii*, que pareció muy bien discurrido, por lo que el Papa le remitió en 1577 á todos los Príncipes Christianos y á todas las Universidades de algun nombre para que le hicieran examinar, y por fin fue admitido en el Breve de la Correccion.

307 La *Epacta* en su principio es lo que se debe añadir al año Lunar (302) para componer el año Solar (VII. 554); la serie de las epactas es la serie de las diferencias que van del uno de estos años al otro. Hay epac-

epactas astronómicas, cuyo destino es facilitarnos hallar puntualmente los Sicygies astronómicos medios en horas, minutos, y segundos (VII.935). Las epactas del Calendario solo sirven para hallar, segun la mente de la Iglesia, y la regla dada en 1582, los dias de las lunas nuevas Eclesiásticas; digo segun la mente y la regla de la Iglesia, porque las lunas nuevas Eclesiásticas no concuerdan del todo con las lunas nuevas medias de la Astronomía, conforme se verá mas adelante.

La Epacta que se le señala á cada año en el Calendario es el número que indica la edad de la Luna, al principio de dicho año, segun el Calendario Eclesiástico; síguese de aquí que si la luna nueva cae á 1 de Enero, la epacta es cero para aquel año; pero el año siguiente será de 11^{d}, porque el año lunar solo tiene 354^{d}, y el año solar 365; de donde resulta que cayendo la Luna nueva á 20 de Diciembre, la Luna tendrá 11 dias el dia 1 de Enero del año siguiente; igualmente el año despues de la epacta es de 22; el tercer año sería de 33 á no ser que se restan 30 para formar un mes cabal, se queda, pues, en 3. Con esto las epactas de años siguen el orden natural de los multiplos de once restando siempre 30; esto es, 11, 22, 3, 14, 25, 6, 17, 28, 9, 20, 1, 12, 23, 4, 15, 26, 7, 18, 29. Este es el orden natural y primitivo de las epactas quando se suponen los meses lunares de 29 y 30 dias, y los años civiles de 365 dias, con un bisiesto cada 4 años.

308 Con la mira de que la epacta del año sirva para indicar la Luna nueva, todos los meses, se colocan en el Calendario perpetuo (287), esto es, en el Calendario de las letras Dominicales, que hay en todos los libros de rezo, las 30 epactas al lado de los dias del mes, ácia atras por este orden, 30, 29 28 &c. Si la Luna nueva cae á 2 de Enero, la señalará la epacta 29, que se hallará igualmente ácia 1 de Febrero, 2 de Marzo, y ácia todos los demas dias del año en que deberá haber Luna nueva: se dirá que la epacta de aquel año es 29. El año siguiente la epacta tendrá 11 dias mas, porque las Lunas nuevas vienen once dias antes; restando, pues, 30 de la suma, sacaremos 11 para la epacta siguiente, y siempre que la Luna adelantare un dia se la deberá añadir una unidad á la epacta, para que la Luna nueva esté señalada un dia antes en el Calendario perpetuo. Así, al cabo de 19 años se añade 12 en lugar de 11, y esta adicion se egecuta siempre que el Número de Oro pasa de 19 á 1, porque la última lunacion de cada Cyclo Lunar no es mas que de 29 dias, y no de 30 (292), y esto es causa de adelantarse un dia las Lunas nuevas.

309 Este orden primitivo y regular es el que se supone en tiempo del Concilio Niceno; pero al apartarnos de esta época notamos dos defectos en esta regla, ó dos interrupciones, que se llaman *equacion lunar* y *equacion solar*. La primera proviene de que el Cyclo Lunar de 19 años, es defectuoso en cerca de $1^{h} \frac{1}{2}$ (293);

por-

porque las 235 lunaciones no componen 19 años, por manera que al cabo de 312 años las Lunas nuevas se verifican un dia antes, y es preciso tomar la epacta una unidad mayor. La segunda equacion proviene de haberse suprimido tres Bisiestos en el intervalo de 400 años (283), de donde resulta que la Luna nueva es mas tarde, y se debe disminuir la epacta. De estas dos desigualdades se origina que para cada siglo se necesita una nueva orden de epactas; hay 30 succesiones diferentes que componen la tabla de las epactas; estas 30 succesiones suplen por 30 Calendarios que hubieran sido precisos, y componen un todo tan cabal, como convenía para las reglas de la Iglesia y de la sociedad civil.

Estas 30 lineas van señaladas con 30 letras del abecedario que bajan por orden retrogrado; pero se ha escusado usar ciertas letras que podían ocasionar confusion en los caractéres.

310 En la parte superior de la tabla están los 19 números del Cyclo Lunar, empezando desde 3, que en tiempo del Concilio Niceno se ponía enfrente de 1 de Enero. La primera linea orizontal de la tabla, señalada *P*, no es otra cosa que la succesion de los números que hemos indicado arriba (307), empezando desde 0 ó * sin otra interrupcion que la de un dia de mas, quando el Número de Oro llega á ser 1 (308); la segunda linea señalada *N* es la succesion de los números que tienen una unidad menos que la antecedente, esto es, 29, 10,

21 &c. La tercera linea *M*, empieza desde 28, y así de las demas hasta la última linea que empieza desde 1, 12 &c.

El progreso de los números de cada linea siempre es de XI como el de la primera linea; hay en cada una 19 guarismos que corresponden igualmente á los 19 Números de Oro, que crecen continuamente XI, quitando 30 cada vez que se hallan, excepto en el Número de Oro 1, que es el penúltimo de todos, porque entonces la epacta crece 12, por no tener mas que 29 dias la última Luna del año, bien que sea una de las 7 lunaciones intercalares, es la única exceptuada (308).

Tabla de la equacion de las Epactas para saber qué linea de la tabla general de las Epactas se ha de tomar en cada siglo.

Años	Linea de Epactas.	Años	Linea de Epactas.	Años	Linea de Epactas.
1582	*D*	2500	*u*	3500	*p*
Bis. 1600	*D*	2600	*t*	Bis. ☾ 3600	*q*
1700	*C*	☾ 2700	*t*	3700	*p*
☾ ☾ 1800	*C*	Bis. 2800	*t*	3800	*n*
1900	*B*	2900	*s*	☾ 3900	*n*
Bis. 2000	*B*	☾ 3000	*s*	Bis. 4000	*n*
☾ 2100	*B*	3100	*r*	4100	*m*
2200	*A*	Bis. 3200	*r*	4200	*l*
2300	*u*	☾ 3300	*r*	☾ ☾ 4300	*l*
Bis. ☾ 2400	*A*	3400	*q*	Bis. 4400	*l*

En la tabla de las epactas hay 8 columnas desde el Número de Oro 12, hasta el Número de Oro 19, donde se ha se-

señalado la epacta con números árabes, 25, en lugar de XXV números romanos, son las 8 succesiones de epactas que contienen veinte y cinco y veinte y seis, y en las quales se hubiera podido indicar dos veces la Luna nueva en 19 años para el mismo dia, sin variar los caractéres, conforme lo declararemos con motivo del Calendario perpetuo.

311 Solo falta enseñar como se conoce qual de las 30 líneas ha de servir para cada siglo, pues la interrupcion se hace á fines de cada siglo, en virtud de la equacion solar y de la lunar. (309). La primera linea señalada *P* se atribuyó al siglo sexto quando se corrigió el Calendario; supúsose que los Números de Oro indicaban puntualmente para aquel siglo las Lunas nuevas; tomóse por época del Calendario el año de 550, posterior al año en que se celebró el Concilio, porque se quiso que las Lunas nuevas del Calendario atrasasen respecto de las Lunas nuevas astronómicas medias, por el recelo de que llegase el caso de celebrarse Pascua de Resurreccion antes del XIV de la Luna Pascual, contra la mente de la Iglesia (282 y 283); pero las Lunas nuevas medias caen algunas veces antes de la Luna nueva verdadera, por la qual se gobernaban los Judios; ha querido, pues, la Iglesia tener en su Calendario Lunas nuevas medias que nunca se verificasen antes sino despues de las verdaderas.

312 Se ha tomado por raiz el año de 550 en el reynado del Emperador Justiniano; entonces los Números de Oro indicaban las Lunas nuevas como unas 16 horas

mas

mas tarde que en tiempo del Concilio Níceno, conforme lo prueban las tablas Astronómicas, y no se corría ningun riesgo de que fuesen indicadas antes que las Lunas nuevas verdaderas. Al año de 500 y á todo el siglo sexto se le dá la primera linea de la tabla general de las epactas, que está señalada *P*; pero como al cabo de 300 años, esto es, en el año de 800, hay una equacion lunar, y la Luna adelanta un dia en el Calendario, porque las Lunas nuevas son un dia antes, el número precedente es el que indica las Lunas nuevas, y se debe tomar la última linea *a*, cuyas epactas son un dia mayores. Al cabo de otro intervalo de 300 años, esto es, en el año de 1100, hay otra equacion lunar, la Luna adelanta tambien un dia, es, pues, preciso subir una linea para el siglo doce, y tendremos la linea *b* que empieza en II, XIII &c. Asimismo en 1400, tendremos la linea señalada *c*.

En 1582 se le quitaron al año diez dias (284), por consiguiente las Lunas nuevas cayeron diez dias mas tarde, y por lo mismo es menester bajar diez lineas en la tabla general, y pasar á la linea *D* para 1583; llamamos esto bajar, porque de la linea *c* á la linea *a*, bajamos desde luego dos lineas, y si se le quita una unidad mas á la epacta, se encuentran los números de la linea *P* que se considera todavía mas baja; porque la tabla general de las epactas es como un círculo en el qual se vuelve á empezar por el mismo orden y sin interrupcion, despues que se le ha andado todo entero.

En

En 1600, no hubo ni equacion lunar, ni equacion solar, pues la primera sirvió en 1400, y la segunda solo se habia de verificar en 1700, 1800 y 1900 (283), se ha quedado, pues, la misma linea *D*, que empieza desde XXIII.

313 En 1700, hubo una equacion solar, porque se omitió un año Bisiesto (283), y el año tuvo un dia menos; por este motivo habian de caer las Lunas nuevas un dia mas tarde, y para indicarlas un dia mas tarde, es preciso que sea la epacta una unidad menor (308); por consiguiente en 1700 fue preciso bajar una linea en la tabla y tomar la serie de las epactas que corresponde á la letra *C*, y empieza desde XXII. Así debe suceder siempre que se omite un dia, ó un año Bisiesto, y esto es lo que llamamos equacion solar. En el año de 1700 habia de haber una equacion lunar, luego diremos por qué se la trasladó al año de 1800.

314 Ya que la equacion lunar habia servido para el año de 1400, y se habian pasado 300 años hasta 1700, debía haber otra equacion lunar (323); sin embargo como la Luna anticipa un dia en el Cyclo Lunar, no en 300 años, sí en $312\frac{1}{2}$, estos $12\frac{1}{2}$ años se habian omitido 4 veces desde el año de 500; es á saber, en 800, 1100, 1400, 1700; se habia, pues, anticipado 50 años la equacion lunar. Por otra parte, empezando desde el año de 550, la equacion lunar debía servir en los años de 850, 1150, 1450, 1750; añadiendo, pues, á

1750

1750 los 50 años que había de atraso, se saca que en 1800 se deberá hacer uso de la equacion lunar, de donde resultaría un aumento en la epacta (308). Pero en 1800 se omitirá un dia intercalar, del mismo modo que en 1700, y por consiguiente se debería rebajar uno del orden de las epactas, y bajar una linea en la tabla general. Estos dos efectos se destruirán, las Lunas nuevas ni subirán ni bajarán, se quedarán en los mismos dias, la misma linea *C* de la tabla general servirá para todo el siglo 19 que empieza en 1800, del mismo modo que sirvió para el siglo antecedente.

En 1900 tambien se omitirá un dia intercalar, las Lunas nuevas bajarán un dia, y será preciso bajar á la linea *B* de la tabla general. El año 2000 no mudará de linea, porque aquel año ni hay equacion lunar, ni se omite ningun dia intercalar. En 2100 se omitirá un dia intercalar, y servirá la equacion lunar, porque habrán pasado 300 años desde 1800, en el qual se hizo la última equacion; por consiguiente para el siglo 22 que empieza en 2100, servirá la misma letra *B* que para el siglo antecedente, conforme hemos dicho respecto del año de 1800.

En 2200, se omitirá un intercalar, y no habrá equacion lunar, se bajará, pues, á la linea *A* de la tabla general, y por la misma razon en 2300 se bajará á la linea señalada *u*.

En 2400 habrán pasado 300 años desde la última equacion lunar de 2100, habrá por consiguiente una equa-

equacion lunar ; pero no habrá equacion solar, luego las Lunas nuevas subirán un dia (308), y se volverá á la linea *A* de la tabla general.

2500, Equacion solar, se bajará á la linea *u*.

2600, Equacion solar, se bajará á la linea *t*.

2700, Equac. sol. y lun. servirá la misma linea *t*.

2800, No hay equac. servirá tambien la linea *t*.

Por consiguiente es muy facil de proseguir al infinito, por los principios de Lilio, la tabla de la equacion de las epactas, si se atiende al intercalar que se debe omitir tres veces en 400 años, y á la equacion lunar que se debe verificar cada 300 años, primero siete veces de seguida, y despues al cabo de 400 años no mas. Proviene esta diferencia de que los $12\frac{1}{2}$ años que se omiten cada 300 años, componen 100 años al cabo de 8 veces 300 ó de 2400 años, entonces se debe trasladar la equacion lunar al año secular siguiente, conforme lo hemos indicado, quando llegados á 1700 hemos trasladado la equacion lunar á 1800. Sucederá, pues, siempre que se dilatará la equacion lunar al cabo de 2400 años empezando desde 1800, esto es, en los años de 4300, 6800, 9300, 11800, y prosiguiendo á este tenor de 2500 en 2500; entonces en lugar de servir cada 300 años, no servirá sino al cabo de 400 por aquella vez; por este motivo la Luna no sube en el Calendario sino 8 dias en 2500 años ; siendo así que habia de subir 8 dias en 2400 años. Estos años de atraso los hemos seña-

ñalado así ☾☾ en la tabla de antes (310).

315 Sin embargo, advierte Clavio que despues del año de 8100, ha de haber un error en el método de Lilio para hallar la equacion, de modo que en el año de 8200 será menester bajar de la linea *F* á la linea *D*, esto es, dos lineas, y no una sola conforme enseña la regla antecedente, y dá un método para construir de otro modo la tabla de las epactas desde el del año de 8100 en adelante. Escusaremos declararle por convenir su autor en que nos basta tener una regla segura para un espacio tan dilatado de tiempo.

Si se quisiera proceder con mas escrupulosidad todavía, se debería añadir otra equacion lunar al cabo de 481436 años, porque ademas de los $312\frac{1}{2}$ años habia 23^h y $17'$ (293) que entonces componen 100 años; pero como este espacio de tiempo era mayor que el cyclo de trescientos mil años que se ha mirado como el cyclo grande que renueva el Calendario, Lilio despreció esta última equacion lunar, muy seguro de que no habia cálculo alguno astronómico exacto para un período tan largo de tiempo.

316 Bueno será dar aquí la razon del grande Cyclo de 300 mil años que restituye las epactas á las mismas letras y por el mismo orden. Considero desde luego que al cabo de diez mil años ó 100 siglos, se repararà la misma variedad en las letras de la tabla general, pero no las mismas letras. Despues de 1600, los dos años seculares que se siguen, 1700 y 1800 tienen la misma le-

letra *C*, los tres años siguientes 1900, 2000, 2100 tienen la misma letra *B*; el año 2200 tiene la letra *A*, el año 2300 la letra *u*, el año 2400 la letra *A*, el año 2500 la letra *u*, los tres años 2600, 2700 y 2800 tienen la misma letra *t* &c. Y lo mismo sucederá al cabo de 10 mil años ó de 100 años seculares; por egemplo, empecemos desde el año de 11600, y tendremos las letras siguientes.

Despues de 11600 los dos años de 11700 y 11800 tendrán la misma letra .... *i*

Los 3 años de 11900, 12000, 12100 tendrán la misma letra .... *b*

El año de 12200 tendrá la letra .... *g*

El año de 12300 tendrá la letra .... *f*

El año de 12400 tendrá la letra .... *g*

El año de 12500 tendrá la letra .... *f*

Los tres años de 12600, 12700, 12800 tendrán la misma letra .... *e*

Si empezáramos diez mil años mas tarde, ó en el año de 21700, hallaríamos el mismo orden en la variedad de las epactas; la razon es esta. En el discurso de 100 años seculares, hay 32 equaciones lunares, pues hemos visto que la Luna en 25 seculares sube 8 dias en el Calendario; luego los diez mil años que preceden á una época, y los diez mil que vienen despues tienen el mismo número de equaciones lunares, tienen tambien de menos un mismo número de Bisiestos, esto es 25; así en un mismo

espacio de diez mil años siempre se verifica una misma interrupcion de epactas; si tomáramos un espacio menor, no se hallaría á un tiempo un número de años seculares divisible por 25 y 4, por 25 para formar un número completo de equaciones lunares, y por 4 para formar un número cabal de Bisiestos omitidos.

En el discurso de 300 mil años, no solo habrá la misma variedad, mas tambien las mismas letras volverán por el mismo orden. Para probarlo, empecemos desde el año de 1700, donde está la linea *C* de la tabla general. En el discurso de diez mil años, habrá una mudanza de 43 letras hasta *k*, conforme se puede comprobar prosiguiendo el cálculo antecedente por 100 siglos; si de las 43 restamos las 30 que componen toda la tabla, habrá una mudanza de 13 letras; al cabo del segundo espacio de diez mil años se habrán mudado 26. Prosiguiendo á este tenor de 13 en 13, y restando siempre 30, quando sobraren, lograremos hallar por último una mudanza de 30 letras, pero esto solo se verificará despues que se hubiere practicado 30 veces esta adicion, porque no hay ningun número menor que multiplicado por 13 pueda dar un múltiplo de 30. Por consiguiente solo al cabo de 30 intervalos de diez mil años cada uno puede volver la misma letra, y seguirla el mismo orden y las mismas variedades en las letras de la tabla general.

317 Nos toca hablar ahora de algunos artificios que se reparan en los Calendarios por lo tocante al orden de las epac-

epactas. Hemos dicho que en el Calendario perpetuo de las epactas y de las letras dominicales (308) se hallan al lado de los dias del mes la epactas 30, 29, 28 &c. y las 7 letras *G*, *F*, *E*, *D*, *C*, *B*, *A* empezando desde primero de Enero. En este Calendario todos los dias á los quales corresponde la epacta del año, son los de las Lunas nuevas de aquel año; pero hay tres cosas notables á que atender acerca de tres artículos particulares de este Calendario perpetuo.

En lugar del número 30, se pone una ✻ que supone por 30 y por cero; con efecto, los años en que hay Luna nueva los dias 1 y 31 de Diciembre, la epacta que señala la edad de la Luna quando el año acaba, debería ser 30, porque la Luna tiene 30 dias quando el año acaba; pero debería ser cero si se considerára la Luna nueva del 31, por esto se pone un signo ambiguo que suple por uno y otro, y se aplica á estos dos casos.

318 En el Calendario perpetuo se han hecho seis interrupciones, donde se han puesto juntas las epactas XXIV y XXV; si no fuera por esto las 12 succesiones de epactas que son de 30 cada una, compondrían 360 dias, y no 354 como es menester para que concuerden con el año Lunar, que tiene 11 dias menos que el año Solar (307); estos 6 dias omitidos se han repartido en la segunda treintena, la 4ª, la 6ª, la 8ª, la 10ª y la 12ª, y los dias en que cae son el 5 de Febrero, 5 de Abril, 3 de Junio, 1 de Agosto, 29 de Setiembre y 27 de No-

viembre; estos seis dias, que por la disposicion precedente deberian tener 25 de epacta, tienen á un tiempo XXV y XXIV; con esto se gana un número cada vez, y se halla que á fines de Diciembre quedan 11 dias conforme debe ser, pues el año Lunar no tiene mas que 354 dias (302).

Las 12 lunaciones de cada año son alternadamente de 30 y 29 dias (292), por este motivo se ponen alternadamente 30 epactas y 29, primero las 30 en el mes de Enero, despues 29, solo con juntar dos en un mismo dia, despues 30, y prosiguiendo á este tenor; la epacta XXIV en Febrero, y todas las que se siguen se hallan un escalón mas arriba de su lugar natural ácia principios del mes, por razon de las dos epactas XXV y XXIV que se hallan juntas en 5 de Febrero. Por consiguiente las lunaciones que empiezan por las 30 epactas que preceden á las dos epactas acumuladas en 5 de Febrero, esto es, por las epactas XXV, XXVI, XXVII, XXVIII, XXIX, *, I, II, &c. hasta la epacta XXIV inclusive, no tienen mas de 29 dias. Lo mismo diremos de las lunaciones que corresponden á las 30 epactas semejantes que en otros cinco parages del Calendario preceden á la union de XXIV y XXV.

319 En los meses que tienen dos epactas en un mismo dia, XXV y XXIV, se podría temer hubiese dos Lunas nuevas indicadas en el mismo dia, en el discurso de 19 años, es á saber, la una quando la epacta del año fue-

fuese XXV, y la otra quando fuese XXIV, pero en los 29 años no puede haber dos Lunas nuevas que caigan en un mismo dia del mes, porque no vuelven al mismo dia del mes hasta al cabo de los 19 años cumplidos (292). Para escusar este inconveniente en la disposicion de las epactas de la tabla dilatada, se ha puesto 25 en lugar de XXV en todas las series de epactas, ó en todas las líneas donde los dos números 24 y 25 se hallan juntos y pueden volver en el discurso de 19 años; este número 25 está en el Calendario al lado de XXVI, porque en estas mismas lineas de epactas los números 25 y XXVI no pueden hallarse juntos en el discurso de 19 años, una vez que se hallan 24 y 25.

En los meses que tienen 25 y XXVI de epacta en un mismo dia, tampoco puede suceder que la Luna nueva esté indicada dos veces en un mismo dia en el discurso de 19 años, porque 25 no se halla en las ocho series de epactas que tienen veinte y cinco y veinte y seis, en estas solo se ha puesto el número Romano XXV, que en el Calendario está al lado de XXIV, pero XXV y XXIV no están juntos en dichas ocho series. Así, se ha puesto cuidado en que las dos figuras que están juntas en el Calendario en un mismo dia, nunca se hallasen en una misma serie de epactas; verdad es que están los mismos números, pero el uno está en números Romanos y versales chicas, el otro en números Arabes, y basta esta diferencia de figura para distinguirlos; algunas veces se ponen los 25 de co-

lorado, como en los Breviarios, ó en los libros estampados con dos colores.

320 Quando en un Cyclo de 19 años la epacta XXV concurre con un Número de Oro mayor que once, esto es, con los Números de Oro 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, siempre hay en el mismo Cyclo una epacta XXIV; pero si entonces se toma la epacta 25 que es de un caracter ó color diferente, la qual en seis lugares del Calendario está colocada al lado de XXVI, jamas podrá haber dos Números de Oro ó dos Lunas nuevas en un mismo dia, porque esta epacta 25 señalada con otros caractéres ó con otro color corresponde en todas partes á un dia distinto del que tiene la epacta XXIV.

Quando en un Cyclo de 19 años se encuentra la epacta XXV con un Número de Oro menor que 12 ó con los Números de Oro, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 y 11, no es posible que en el mismo Cyclo sirva la epacta XXIV con la epacta XXV. Entonces se tomará la epacta XXV, que en seis parages está señalada en el mismo dia que la epacta XXIV, y yá que la epacta XXIV no estará en dicho Cyclo, no se correrá el riesgo de encontrar en un mismo Cyclo dos Lunas nuevas en un mismo dia.

Del mismo modo, aunque la epacta 25 que está con caracter ú color distinto, se halle seis dias del año al lado de la epacta XXVI, no hay que temer se encuentren dos Lunas nuevas en un mismo dia en los 19 años, porque quan-

quando la epacta XXV se halla con un Número de Oro mayor que 11 (y estos son los únicos casos en que sirve el caracter 25), la epacta XXVI jamas se verifica en el mismo Cyclo, para indicar las Lunas nuevas.

Esto se entiende facilísimamente por medio de la tabla dilatada de las epactas; porque en las 8 lineas señaladas *N*, *E*, *B*, *r*, *n*, *k*, *e*, *b*, cada una de las quales corresponde á un Cyclo lunar entero de 19 años (310), se ve la epacta 25 señalada con números Arabes debajo de los ocho Números de Oro, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19; la epacta XXIV debajo de los otros once, y nunca la epacta XXVI. Pero en las otras 22 lineas orizontales de la tabla donde la epacta XXV se halla debajo de los once números menores de Oro, desde 1 hasta 12, se halla alguna vez la epacta XXVI, pero no se halla XXIV. Por consiguiente si se toma unas veces la epacta XXV, que está en el Calendario al lado de XXIV, y otras veces la epacta 25 que es de otro caracter ó color, y vá puesta en el Calendario al lado de XXVI, atendiendo á los Números de Oro, grandes ó chicos, con los quales concurre, jamás sucederá que en el mismo Cyclo de 19 años haya dos Lunas nuevas en el mismo dia del mes, bien que en los seis lugares señalados antes, haya en un mismo dia XXV con XXIV, y XXVI con la epacta 25 del caracter distinto.

Por consiguiente la epacta XXIV no se puede verificar quando la epacta XXV concurre con uno de los once primeros Números de Oro, esto solo sucede quando concur-

re con un Número de Oro mayor que 11, y la epacta XXVI jamas se verifica quando la epacta 25 de caracter diferente concurre con un Número de Oro mayor que 11.

321 Se han escogido las epactas XXV y XXVI para juntarlas, bien que se hubieran podido escoger otras dos epactas qualesquiera; pero estos eran con poca diferencia los dias en que se usaba la equacion de la Luna en el antiguo Calendario de los Números de Oro, del Concilio Niceno, de cuya disposicion se ha procurado no apartarse sino lo menos que fuese posible en la disposicion del nuevo Calendario. Estos números XXV y XXIV que se ponen juntos, se han escogido de intento á fin de conseguir que todas las lunaciones pascuales fuesen de 29 dias, conforme querian los Padres del Concilio Niceno, y empezasen siempre entre 8 de Marzo y 5 de Abril. En el Calendario nuevo no hay mas que dos excepciones de la primera regla, que se verifican quando tenemos por epacta 25 y XXIV, y 25 concurre con un Número de Oro mayor que 11, y esto sucede muy rara vez, no hay mas Lunas pascuales que estas dos de 30 dias. Quando los Padres del Concilio Niceno dieron 29 dias á las Lunas nuevas pascuales, desde 8 de Marzo hasta 5 de Abril, era facil concordasen con esta disposicion 19 Números de Oro, de modo que todos diesen lunaciones de 29 dias; pero como hay 30 epactas, no es posible disponerlas todas en 29 dias, á no ser que se pongan dos á un tiempo en un mismo

dia,

dia, conforme sucede el dia 5 de Abril; este es el motivo porque la lunacion de la epacta XXIV tiene 30 dias, y por consiguiente los tiene tambien la de la epacta 25 puesta encima de XXIV.

Si la equacion de la Luna en vez de hacerse el dia 5 de Abril, se hiciera á fines de Enero ó Marzo, conforme lo practicó Aloysio Lilio, primer autor de este Calendario, en el Compendio que Gregorio XIII envió en 1577 á los Príncipes Christianos (306), habría 7 lunaciones pascuales de 30 dias en lugar de 2, de modo que en este punto nos habríamos apartado mas del estilo antiguo de la Iglesia, al qual se ha procurado respetar todo lo posible. Se hallan tambien en el Calendario Gregoriano las Lunas nuevas, particularmente las de Pascua, trasladadas para el tiempo del Concilio Niceno á los mismos dias en que se supusieron entonces, en virtud de los Números de Oro del Calendario antiguo.

322 El tercer artificio que se ha usado en la disposicion de las epactas del Calendario perpetuo, consiste en que se ha puesto al fin de Diciembre al lado de la epacta XX, una epacta estraordinaria 19, que tambien está con caractéres ó color distinto; no tiene mas destino que señalar la Luna nueva el dia último de Diciembre, quando la epacta XIX concurre con el Número de Oro 19, y esto no se volverá á verificar hasta despues del año de 8200, y quando de los treinta Cyclos de la tabla, el que tiene la letra *D* estará en uso, conforme lo ha esta-

tado desde la Correccion Gregoriana hasta el año de 1700 exclusive; solo en esta linea *D* se halla la epacta XIX debajo del Número de Oro 19. La epacta 19 puesta á 31 de Diciembre, debe señalar entonces una Luna nueva, conforme sucedió en 1595, 1614, 1633, 1652, 1671, 1690. Con efecto, así que el Número de Oro es 19, se deben añadir 12 á la epacta del año para formar la del año siguiente (308), siendo así que no se añadían sino 11 en los demas casos; este es el motivo porque á la epacta XIX, quando se verifica con el Número de Oro 19, se deben añadir 12, y se saca 1 de epacta para el año siguiente. Pero el uso de la epacta 1 no se halla en el Calendario sino en el dia 30 de Enero, luego si la epacta 19 no estuviera puesta en el Calendario al dia 31 de Diciembre con el fin de señalar en él una Luna nueva, como entonces la lunacion de Diciembre no tendria mas que 29 dias (292), no se hallaría indicada en el Calendario ninguna Luna nueva desde 2 de Diciembre hasta 29 de Enero. Porque en el mes de Diciembre no hay otra epacta XIX que la de 2 de Diciembre, y en el mes de Enero no hay epacta XIX antes del 30. Sin embargo en el caso de que vamos hablando hay una Luna de 29 dias que empieza el dia 2 de Diciembre, y otra que empieza el dia 31 de Diciembre; el cálculo prueba que hay con efecto aquel dia una Luna nueva media, quando el Número de Oro 19 concurre con la epacta XIX.

Pero la excepcion de que se trata ó la adicion de la epac-

epacta 19 estraordinariamente acumulada con la epacta XX en 31 de Diciembre, no causa ninguna confusion en el Calendario, porque está al lado de la epacta XX que jamás se verifica en el cyclo donde la epacta XIX concurre con el Número de Oro 19. Con efecto, se puede ver en la tabla dilatada de las epactas que la linea *D* que se verifica en el caso previsto no incluye la epacta XX. Este número no se halla en las 19 epactas de este cyclo; no puede, pues, servir dos veces, ni haber dos Lunas nuevas indicadas en el mismo dia en el espacio de 19 años, bien que haya dos epactas en el mismo dia.

323 Las epactas solo pueden indicar las Lunas nuevas medias, esto es, las Lunas nuevas que se verificarian si la Luna y el Sol se moviesen con movimiento uniforme, y su longitud media fuese constantemente igual con su longitud verdadera. Esto bastaría para el uso del Calendario civil, porque siempre hay seguridad de que no resulta de aquí una equivocacion de un dia, aun quando nos ciñamos á los movimientos medios; pero hemos de prevenir que sobre no ser las Lunas nuevas que las epactas señalan en el Calendario, las Lunas nuevas astronómicas verdaderas que observamos, y se hallan en las Efemérides, tampoco concuerdan puntualmente con las Lunas nuevas medias; ocurren muy amenudo diferencias que se hacen reparables; por egemplo, en 1700 la Luna llena media cayó en Sábado 3 de Abril ácia las 11^{h} de la tarde en Roma; debia, pues, celebrarse Pasqua de Resurreccion

el

el dia siguiente por lo dicho (305); pero el Calendario indicaba la Luna llena para el dia 4, y con esto se trasladó la fiesta al dia 11 del mismo mes. Quando se hizo la Correccion Gregoriana se llevó la mira de restituir las Lunas nuevas á los lugares donde estaban al tiempo del Concilio Niceno por medio del cyclo de 19 años; pero como al cabo de 625 el cyclo trahe la Luna nueva dos dias antes (293), habia entónces una diferencia de 4 dias entre las Lunas nuevas astronómicas y las del cyclo. En la egecucion solo se llevaron en cuenta 3 dias y no 4, de aquí resulta que la Luna llena astronómica viene algunas veces un dia antes de la Luna llena pasqual, y que no tiene acerca de este punto el Calendario toda la perfeccion que se pensó darle; de lo mismo nace tambien la contradiccion aparente que se repara algunas veces entre los cálculos rigurosos de la Astronomía, y los cálculos mucho menos exactos del cómputo eclesiástico.

Por consiguiente en la egecucion del proyecto de la correccion no se siguió de todo punto la intencion de la Bula de Gregorio XIII, hubiera debido haber una equacion lunar en 1700 (313); desde 1700 como la epacta corresponde al Número de Oro 1, hubiera debido ser 1, siendo así que no se la dá mas que 0 ó *, de modo que no se han aumentado mas de tres dias las epactas lunares desde el Concilio hasta ahora, en lugar de aumentarlas 4 dias. Este error de un dia ha sido causa de que en 1704 Pascua cayese á 23 de Marzo, en vez de caer, como correspon-

pondia á 20 de Abril, porque aquel año la Luna llena debia señalarse en 20 de Marzo, y no se señaló sino en 21; pero el 20 de Marzo no es del mes Pascual, y eslo el 21. La razon de este defecto consiste en que la mira de los autores de la correccion antes era adelantarse que atrasarse respecto de las verdaderas Lunas nuevas, para obviar que las epactas señalasen la Luna nueva antes de lo que se verifica realmente, y se celebrase la fiesta de Pascua el XIV de la Luna, y aun antes, esto es, al mismo tiempo que entre los hereges quartodecimanos; con este fin se ha atendido mas á la Luna llena que á la Luna nueva; no se tuvo recelo de que la fiesta de Pascua se celebrase mas tarde que el XXI de la Luna; pero se temia la celebracion que hubiera podido caer en XIV de la Luna, quando cae en Domingo, porque este es el dia en que los Judios celebran la Pascua.

Método para hallar la Epacta, y las Fiestas movibles para un año qualquiera.

324 El que quiera valerse en esta averiguacion de las tablas, cuya construccion hemos indicado arriba, buscará primero el Número de Oro (292), porque se han tomado los Números de Oro que siempre siguen un progreso uniforme para remediar con ellos las irregularidades de las epactas. Este Número de Oro tomado en la parte superior de la tabla, señalará la columna donde debe estar la epacta que se busca.

Para saber en qué línea de la tabla, y enfrente de qué

qué letra se debe buscar la epacta, se tomará en la tabla de equacion (310) la letra que conviene al siglo en que estamos, y en esta linea se deberá tomar la epacta correspondiente al Número de Oro.

325 Para sacar una regla particular en este siglo y el siguiente, se multiplicará por 11 el Número de Oro del año corriente, porque cada año la epacta tiene 11 dias de aumento, se añadirá 19, porque la epacta es 18 cada último año del cyclo lunar; se dividirá la suma por 30, y la resta será la epacta del año.

Así, para sacar la epacta de 1762, se multiplicará el Número de Oro 15 por 11, saldrá el producto 165, se le añadirá 19, y se dividirá la suma 184 por 30, el residuo de la division 4 será la epacta que se busca. Tambien se puede hallar de otro modo; se multiplica por 11 el número 62, sale el producto 694; se añaden 9 al producto (es la epacta de 1700), y tantas unidades mas quantas veces el Número de Oro 1 ha vuelto desde 1700, lo que ha sucedido en 1710, 1729 y 1748, dividiendo la suma 694 por 30, sale el cociente 23, y la resta 4, que es la epacta que se busca. Esta regla solo sirve para el siglo 18.

326 El Calendario perpetuo del qual yá hemos hablado (287 y 308), en el qual se señalan las epactas enfrente de cada dia, rebajando siempre una unidad, y las letras dominicales *A*, *B*, *C* &c. basta; quando es dada la epacta del año actual (324), para hallar la fiesta de

Pas-

Pascua de Resurreccion, y todas las demás fiestas movibles. La epacta del año indica todos los dias de Luna llena en el Calendario perpetuo; así, para determinar la Luna nueva pascual, que no puede verificarse hasta despues del dia 7 de Marzo, es preciso ver á qué dia corresponde la epacta del año, contando desde 8 de Marzo inclusive, y este será el de la Luna nueva pascual; el dia catorce, contando desde la Luna nueva inclusive, será el de la Luna nueva pascual, y el primer Domingo despues de esta Luna llena exclusive, esto es, el primer dia en que se hallará la letra dominical del año (288), será el dia de Pascua.

327 Los límites pascuales son el dia 22 de Marzo y el dia 25 de Abril (305); así en 1598, 1693 y 1761; la fiesta de Pascua cayó á 22 de Marzo; y lo mismo sucederá en 1818, 2285, 2437, 2505 &c. Por el contrario, esta fiesta no ha caido á 25 de Abril sino en 1546, 1666, y 1734, y lo mismo sucederá en 1886, 1943, 2038, 2190 &c.

Septuagésima siempre cae nueve semanas antes de Pascua, ó 64 dias antes, incluyendo en estos al mismo dia de Pascua. El Miércoles de Ceniza cae 47 dias antes de Pascua, contando uno y otro.

La fiesta de la Ascension se halla contando 40 dias despues de Pascua; Pentecostés, contando 50; la Trinidad, contando 57 dias, y el Corpus 61 despues de Pascua; el dia del Señor siempre cae el mismo dia del mes que el Sabado Santo.

El

El primer Domingo de Adviento solo puede caer entre 27 de Noviembre inclusive, y 3 de Diciembre inclusive; por consiguiente siempre será el Domingo que cayere entre este intervalo.

De las Epocas mas celebradas, y del modo de contar sus años.

328 No hablamos aquí de las épocas inciertas acerca de las quales no concuerdan los Cronologistas. Petavío pone la *Epoca de la Creacion del Mundo*, segun los cálculos del Génesis, en el año 730 del período Juliano, 3984 años antes de Christo, que son 3983 segun nuestro modo de contar; pero hay Padres Griegos, como S. Clemente Alejandrino, que cuentan 5624 años desde la Creacion del mundo hasta Jesu-Christo; ó por mejor decir hasta el principio de nuestra Era vulgar, que no empieza puntualmente desde el Nacimiento de Christo.

La *Era de las Olympiadas* empieza en el año 3938 del período Juliano, 776 años antes de Christo, ó 775 segun nuestro modo de contar (VII. 728). El Cyclo Solar era 18, el Cyclo Lunar 5, la Indiccion 8. Los Athenienses contaban estos años desde la Luna nueva mas inmediata al solsticio de estio, esto es desde uno de los dias de los meses de Junio y Julio; y acerca de este punto hay alguna variedad entre los pareceres de los Crónologistas; bien que no la hay acerca del año de esta data.

329 La *Fundacion de Roma*, segun Varron, se refiere á 21 de Abril 3961 del período Juliano, 753 años an-

antes de Christo, ó 752 segun nosotros. Muchos sabios, y aun los mismos Emperadores siguieron este modo de contar, que compone los años Varronianos de la fundacion de Roma, bien que segun Tarrucio Roma fue fundada el año antes, y segun los Fastos del Capitolio el año despues; el año 752 antes de Christo tenia 13 de Cyclo Solar, 9 de Cyclo Lunar, y 1 de Indicion.

330 La *Era de Nabonasar*, célebre por los cálculos de Hyparco y Ptolomeo, es la época de la fundacion del Reyno de Babylonia, ó de la quarta y última Monarquía del Imperio de los Asirios, quando Nabonasar se apoderó de la Ciudad de Babylonia que era de los Asirios ó Medas. Este suceso no fue muy notable al principio, pero un siglo despues en tiempo de Nabopolasar y de Nabucodonosor, este Reyno se hizo célebre. La Era de Nabonasar empieza en el año 3967 del período Juliano; 747 años antes de Christo, segun el modo de contar de los Cronologistas, ó 746 segun nuestro método. El principio del mes Thoth cae á 26 de Febrero á mediodia en el meridiano de Alejandría, ó una hora 52′ antes de mediodia en el meridiano de París. Aquel año el Cyclo Solar era 19, el Cyclo Lunar 15, el Cyclo de Indiccion 7. Desde esta época se cuentan los años Egypcios de 365 dias; y al cabo de 1460 años cumplidos, se halla que el año 1461 empieza en 26 de Febrero.

331 El segundo año de Nabonasar empezó tambien en 26 de Febrero de 745, y el tercero en 26 de Fe-

brero de 744, porque los dos primeros años eran de 365 dias en el Calendario Juliano, del mismo modo que en el Calendario Egypcio. Pero como el año Juliano 744 antes de Christo fuese bisiesto, y tuviese un dia mas que el año 3 de Nabonasar, el quarto empieza un dia antes, ó en 25 de Febrero 743 años antes de Jesu-Christo. Los tres años siguientes tambien empiezan en 25 de Febrero; pero el octavo empieza en 24 de Febrero de 739, el duodécimo en 23 de Febrero de 735; y así de los demás.

Siguiendo esta progresion que es muy sencilla se ha formado una tabla de ochocientos ochenta y ocho años, que hay hasta el año 140 de Jesu-Christo, en que cae la última observacion de Ptolomeo; daremos aquí un extracto para uso de los Astronómos que quieran reducir las observaciones de Ptolomeo; y lleva tambien una tabla de los meses Egypcios, y del número de dias que tienen.

Ta-

Tabla del principio de los años de Nabonasar, reducidos al Calendario Juliano, y de los meses Egypcios.

Años de Nabonas.	Años Jul. antes de J. C.	Años de Nabonas.	Años Jul. antes de J. C.	Meses Egipcios.	Dias.
1	26 Feb. 746	468	1 Nov. 280	Θωθ ...... Thoth	30
2	26 Feb. 745	484	28 Oct. 264	Φαωφὶ ... Paophi ó	
3	26 Feb. 744	508	22 Oct. 240	Phaophi......	60
4	25 Feb. 743	592	1 Oct. 156	Ἀθὺρ...... Athyr ó Athir.	90
8	24 Feb. 739	596	30 Sept. 152	Χοιὰκ .... Chœac, Kiak,	
12	23 Feb. 735	600	29 Sept. 148	ó Chiach.....	120
16	22 Feb. 731	712	1 Sept. 36	Τυβὶ...... Tybi............	150
26	20 Feb. 723	716	31 Ag. 32	Μεχὶρ .... Mechir ó	
100	1 Feb. 647	744	24 Ag. 4	Mekir	180
104	31 En. 643	748	23 Ag. 0	Φαμενὼθ.. Phamenoth.....	210
224	1 En. 523			Φαρμουθὶ. Pharmuthi ó	
227	1 En. 520			Pharmouthi.	240
228	31 Dic. 520		Despues de	Παχὼν ... Pachon ó	
232	30 Dic. 516		J. C.	Pakon........	270
348	1 Dic. 400			Παῦνι ... Payni ó Pauni.	300
		752	22 Ag. 4	Ἐπιφὶ .... Epéphi ó	
		840	31 Jul. 92	Epiphi	330
		864	25 Jul. 116	Μεσορὶ ... Mesori ó	
		872	23 Jul. 124	Messori	360
		888	19 Jul. 140	Cinco dias intercalares.....	365

332 Por medio de esta tabla se reducen facilmente al Calendario Juliano las observaciones que están en Ptolomeo. La mas antigua es un eclipse de Luna que empezó en Babylonia el primer año de Mardocempado, ó el 27 de Nabonasar, el dia 29 del mes Toth una hora entera despues del nacer de la Luna. El año 27 de Nabonasar empezaba en 20 de Febrero; así el 29 del mes Thoth sería el 48 de Febrero; se han de restar 29 dias que tiene Febrero, porque el año de 720 era bisiesto (277); queda el 19 de Marzo del año de 720, segun nuestro

 mo-

modo de contar; porque los mas de los Cronologistas le llaman año de 721.

Supongamos que se nos pregunte ¿á qué dia corresponde el 17 del mes Kiak del año 486 de Nabonasar, en cuyo dia se hizo la segunda observacion de Mercurio? La tabla antecedente manifiesta que el año 486 empezaba en 28 de Octubre, 262 años antes de Christo, y la tabla de los meses que el 17 del mes Kiak era el 107 dia contando desde 28 de Octubre inclusive; porque el dia 28 era yá del año 486; se tomarán, pues, quatro dias que quedan del mes de Octubre, es á saber, 28, 29, 30, 31, treinta del mes de Noviembre, 31 del mes de Diciembre, 31 del mes de Enero, 261 años antes de Jesu-Christo. La suma es 96, faltan 11 para llegar á 107, luego el dia 107 era el 11 de Febrero de 261; este es el dia que corresponde al dia 17 del mes Kiak del año 486 de Nabonasar. En la espresada observacion hecha el dia 18 por la mañana para los que cuentan desde media noche, Ptolomeo previene que es entre el 17 y el 18, esto es, el 17 contando desde mediodia, ó el 18 si fue ácia el nacer del Sol, porque en tiempo de Ptolomeo el día civil empezaba al nacer del Sol.

333 La *Muerte de Alejandro Magno* sucedió el día 19 de Julio, el año 4390 del período Juliano, 324 años antes de Christo, ó 323 años segun nosotros, y el año séptimo de la primera época Calíppica. Sirve esta época para reducir las observaciones de Hyparco, que reduce

Pto-

Ptolomeo á los años de la muerte de Alejandro. Por egemplo, Hyparco observó un equinoccio el dia 27 del mes Mechir por la mañana, el año 32 del tercer período Calíppico, el año 178 desde la muerte de Alejandro, ó el 602 desde Nabonasar (VII. 728), y los Cronologistas le refieren á 24 de Marzo, 146 años antes de Jesu-Christo, ó 145 segun nuestro modo de contar.

334 El *año primero de la Era Christiana*, ó Era vulgar es el año 4714 del período Juliano, el año del mundo 3984, segun Petavio; aquel año el Cyclo Solar era 10, el Cyclo Lunar 2, la Indiccion Romana 4, es el año 46 de los años Julianos, esto es, el año 46 contando desde la correccion del Calendario por Julio Cesar; concurre desde 1 de Enero hasta 21 de Abril con el año de Roma 753, y despues con el año 754. Antes de la Luna nueva mas inmediata al solsticio de verano, concurre con el año 4 de la Olympiada 194, y lo restante del año fue en el primero de la Olympiada 195. Hasta el dia 23 de Agosto á mediodia concurrió con el año de 748 de Nabonasar, y con el año 324 de la muerte de Alejandro; pero en lo restante de aquel año se contó 749 y 325. El nacimiento efectivo de Christo cae á fines del año 2 antes de la Era Christiana ó 4710 del período Juliano, segun Baronio y Escalígero; y aun dos años antes segun algunos Autores; pero Petavio prueba que hay en esto bastante incertidumbre. El Padre Alejandro en su Historia Eclesiástica, le pone en el año 4709 ó 4 años antes de Christo.

335 *La Época de los Turcos*, llamada *Hegira*, empieza desde la salida de Mahoma de la Meca; cae en Viernes 16 de Julio de 622, ó 5335 del período Juliano. Hay otra secta de Arabes, y se sigue en las tablas Alfonsinas, que pone el principio de la Hegira en Jueves 15 de Julio. Los años Arabes son de 354^{d} 8^{h} $48'$, y los años civiles son años lunares de 354 y de 355 dias; así 12 años Julianos componen 12 años 130 dias 14 horas. Dividen sus años en cyclos de 30 años, en los quales hacen 19 años comunes de 354 dias, y 11 de 355, es á saber, los años 2, 5, 7, 10, 13, 15, 18, 21, 24, 26 y 29 de cada cyclo; su cyclo empezó en 1757 el dia 14 de Septiembre, con el año 1171 de la Hegira.

ELE-

REGORIO XIII.

BRIL.			MAYO.			JUNIO.		
e las tas.	Dias del mes.	Letr. Domin.	Ciclo de las Epactas.	Dias del mes.	Letr. Domin.	Ciclo de las Epactas.	Dias del mes.	Letr. Domin.
	1	G	XXVIII	1	B	XXVII	1	E
	2	A	XXVII	2	C	25. XXVI	2	F
	3	B	XXVI	3	D	XXV. XXIV	3	G
VI	4	C	25. XXV	4	E	XXIII	4	A
XXIV	5	D	XXIV	5	F	XXII	5	B
	6	E	XXIII	6	G	XXI	6	C
	7	F	XXII	7	A	XX	7	D
	8	G	XXI	8	B	XIX	8	E
	9	A	XX	9	C	XVIII	9	F
	10	B	XIX	10	D	XVII	10	G
	11	C	XVIII	11	E	XVI	11	A
	12	D	XVII	12	F	XV	12	B
	13	E	XVI	13	G	XIV	13	C
	14	F	XV	14	A	XIII	14	D
	15	G	XIV	15	B	XII	15	E
	16	A	XIII	16	C	XI	16	F
	17	B	XII	17	D	X	17	G
	18	C	XI	18	E	IX	18	A
	19	D	X	19	F	VIII	19	B
	20	E	IX	20	G	VII	20	C
	21	F	VIII	21	A	VI	21	D
	22	G	VII	22	B	V	22	E
	23	A	VI	23	C	IV	23	F
	24	B	V	24	D	III	24	G
	25	C	IV	25	E	II	25	A
	26	D	III	26	F	I	26	B
	27	E	II	27	G	*	27	C
	28	F	I	28	A	XXIX	28	D
	29	G	*	29	B	XXVIII	29	E
	30	A	XXIX	30	C	XXVII	30	F
			XXVIII	31	D			

GREGORIO XIII.

OCTUBRE.			NOVIEMBRE.			DICIEMBRE.		
lo de las Epactas.	Dias del mes.	Letr. Domin.	Ciclo de las Epactas.	Dias del mes.	Letr. Domin.	Ciclo de las Epactas.	Dias del mes.	Letr. Domin.
I	1	A	XXI	1	D	XX	1	F
	2	B	XX	2	E	XIX	2	G
	3	C	XIX	3	F	XVIII	3	A
	4	D	XVIII	4	G	XVII	4	B
II	5	E	XVII	5	A	XVI	5	C
I	6	F	XVI	6	B	XV	6	D
	7	G	XV	7	C	XIV	7	E
	8	A	XIV	8	D	XIII	8	F
	9	B	XIII	9	E	XII	9	G
	10	C	XII	10	F	XI	10	A
	11	D	XI	11	G	X	11	B
	12	E	X	12	A	IX	12	C
	13	F	IX	13	B	VIII	13	D
	14	G	VIII	14	C	VII	14	E
	15	A	VII	15	D	VI	15	F
	16	B	VI	16	E	V	16	G
	17	C	V	17	F	IV	17	A
	18	D	IV	18	G	III	18	B
	19	E	III	19	A	II	19	C
	20	F	II	20	B	I	20	D
	21	G	I	21	C	*	21	E
	22	A	*	22	D	XXIX	22	F
	23	B	XXIX	23	E	XXVIII	23	G
	24	C	XXVIII	24	F	XXVII	24	A
II	25	D	XXVII	25	G	XXVI	25	B
I	26	E	XXVI	26	A	25. XXV	26	C
	27	F	XXV	27	B	XXIV	27	D
V	28	G	XXIV	28	C	XXIII	28	E
	29	A	XXIII	29	D	XXII	29	F
	30	B	XXII	30	E	XXI	30	G
	31	C					31	A

Epactas de las Lunas nuevas.

OS DE ORO.

IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX
ACTAS.										
xviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij
xvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	25	vj	xvij
xvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj
xv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv
xiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv
xiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij
xij	iij	xiv	25	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xii
xj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj
x	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x
ix	*	xj	xxij	iij	xiv	25	vj	xvij	xxviij	ix
viij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij
vij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij
vj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	25	vj
v	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v
v	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv
ij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij
	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij
	xxij	iii	xiv	25	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j
	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*
	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix
j	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	25	vj	xvij	xxviij
	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij
	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij	iv	xv	xxvj
	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij	iij	xiv	25
	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj	ij	xiij	xxiv
	xiv	xxv	vj	xvij	xxviij	ix	xx	j	xij	xxiij
	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix	*	xj	xxij
	xij	xxiij	iv	xv	xxvj	vij	xviij	xxix	x	xxj
	xj	xxij	iij	xiv	25	vj	xvij	xxviij	ix	xx
x	x	xxj	ij	xiij	xxiv	v	xvj	xxvij	viij	xix

Fig.

ELEMENTOS DE GEOGRAFÍA.

336 AUnque la voz *Geografia* significa lo mismo que descripcion de la Tierra, no es esta descripcion el asunto de este tratado; nuestro ánimo es dar á conocer la figura y magnitud no mas del globo que habitamos, y los fundamentos matemáticos en que estriban las representaciones que de su superficie, ó alguna de sus partes se hacen con el nombre de *Mapas Geográficos*. Pero antes de declarar este último punto nos será forzoso manifestar cómo se determina la longitud de un punto dado, sea el que fuere, de la superficie de la Tierra; bien que primero trataremos de la longitud del péndulo con un motivo que dejamos apuntado (I. 678 y sig.) tiempos ha, y daremos una prueba mas de la gravitacion general, manifestando la perfecta correspondencia que se repara entre sus leyes y los fenómenos del flujo y reflujo del Occéano.

De la figura y magnitud de la Tierra.

Por dos métodos distintos, y que se corroboran mutuamente, determinarémos la figura y magnitud de la Tierra; es á saber, por las observaciones, y por los principios de la atraccion.

Fig.

Determínase la figura de la Tierra por las observaciones.

337 Si la Tierra fuese redonda y perfectamente esférica, bastára medir un grado de uno de sus circulos máximos, pongo por caso del meridiano, y multiplicarle por 360, el producto sería el valor de su circunferencia. Este es el rumbo que han seguido los Matemáticos de diferentes siglos y naciones que tomaron á su cargo averiguar este punto.

38. Para determinar el valor de un grado terrestre, basta saber quántas leguas, toesas, ó varas hay desde el lugar *P* que vé una estrella *E* á su zenit, y el lugar *A* donde la misma estrella parece un grado distante del zenit, y desde el qual se vé el Sol á mediodia un grado mas alto ó mas bajo que en el lugar *P*.

338 La primera medicion que se ha practicado con exactitud para averiguar la magnitud de la Tierra, la que se ha repetido y verificado con mas cuidado, fue la que executó Picard en el año de 1669 para saber quantas toesas habia en linea recta entre París y Amiens, cuyas ciudades distan un grado una de otra, y de quantos minutos y segundos de la circunferencia del meridiano terrestre era la diferencia de su latitud. Abraza, pues, esta medicion dos operaciones principales, es á saber, la medida en toesas, y la medicion astronómica en grados.

339 Por lo que mira á la medicion en toesas, como sería sumamente prolijo y penoso medir toesa por toesa des-

desde un estremo á otro un espacio de 25 leguas, Picard prefirió acudir á la Trigonometría, contentándose con medir muy escrupulosamente un trecho de 5663 toesas, del camino de *Villejuive* á *Juvisy*, que estaba empedrado en linea recta, infiriendo despues todo lo demás de la resolucion de varios triángulos. Desde entonces se han levantado en *Villejuive* y *Juvisy* dos pirámides que están á 5717 toesas cabales una de otra, conforme aseguran los Académicos que en 1756 han medido su distancia. Fig.

340 La figura representa la disposicion de los primeros triángulos de Picard; despues de medida la distancia que hay desde *Villejuive* á *Juvisy*, midió en los dos estremos de esta base los ángulos de un triángulo cuyo vértice era el campanario de *Brie-Comte-Robert*. Puesto en *Juvisy* con un quadrante de círculo de 3 pies de radio, armado de dos anteojos el uno fijo y el otro mobil, dirigió el uno ácia el molino de *Villejuive*, donde empezó su medicion, y el otro ácia el campanario de *Brie*; el ángulo formado por los dos anteojos se halló de 95° 6′ 55.″ Pasó despues á *Villejuive*, donde dirigió el uno de los anteojos á la torre de *Juvisy*, que era el término de su base, y el otro ácia el campanario de *Brie*, sacó un ángulo de 54° 4′ 35.″ Por medio de estos dos ángulos y el lado conocidos halló que *Villejuive* distaba de *Brie* 11012 toesas, 5 pies; y para comprobar su operacion midió inmediatamente el tercer ángulo. 39.

341 La distancia que infirió de la resolucion del primer

Fig. mer triángulo sirvió de base al triángulo siguiente, cuyo vértice era la torre de *Montlberi.* Midiendo, pues, los ángulos de este segundo triángulo, 77° 25′ 50″ en *Villejuive*, y 47° 34′ en *Brie*, sacó que de *Brie* á *Montlberi* habia 13121$\frac{1}{2}$ toesas de distancia, observó tambien la direccion de estos triángulos ó el ángulo que formaba el primer lado con la meridiana, por medio de las amplitudes del Sol (VII.445).

342 Por consiguiente el primer triángulo que formó Picard sobre la base de *Villejuive*, remataba en el campanario de *Brie-Comte-Robert*; el segundo cuya base era la distancia de *Villejuive* á *Brie-Comte-Robert*, remataba en la torre de *Montlberi*; por medio de este segundo triángulo sacó que de *Brie* á *Montlberi* habia 13121$\frac{1}{2}$ toesas; esta se halla hoy dia de 13108 toesas, porque la toesa es una milésima mas larga que la de Picard. Los triángulos tercero y quarto se formaron sobre esta base, y remataban ácia el mediodia en la cumbre de la torre de *Malvoisine*, y ácia el norte en la cumbre de la torre de *Montjay*, de donde infirió Picard, que de *Montlberi* á *Malvoisine* habia 8870$\frac{1}{2}$ toesas, y 21658 desde *Montlberi* á *Montjay*. El quinto triángulo formado sobre esta última base remataba en el altillo de *Mareuil*; por esta serie de triángulos el citado Autor halló que desde *Malvoisine* á *Mareuil* habia 31897 toesas; y verificó tambien esta misma distancia por medio de un triángulo formado entre *Malvoisine*, *Montlberi* y *Mareuil*, cuyos tres ángulos midió inmediatamente

con

con el mismo quadrante de círculo de tres pies de radio. Fig.

343 Con motivo de este gran triángulo que cogía 15 leguas de largo, Picard se vió muchas veces en la precision de mandar encender fuego en *Mareuil*, *Montlberi* y *Malvoisine*, para que sirviese de señal; un fuego de 3 pies de ancho hecho en *Mareuil*, y visto desde *Malvoisine* parecia á la vista sola como una estrella de tercera magnitud; no se le vía efectivamente sino en un ángulo de $3''\frac{1}{4}$, sin embargo mirado con el anteojo parecia que tenia $8''$ de diámetro. Esto es una prueba de que los cuerpos luminosos parecen algo mayores de lo que son en la realidad (VII.533), y que los fuegos son muy del caso para servir de señales en las operaciones geométricas á distancias muy grandes.

344 Picard prosiguió con otros ocho triángulos hasta el campanario de nuestra Señora de *Amiens*, que halló 78907 toesas mas septentrional que la torre de *Malvoisine*, y se reducían á 78850 entre los dos puntos de observaciones; y como la diferencia de latitud era $1^{\circ}\ 22'\ 55''$, infirió que 57057 toesas componian un grado de diferencia en latitud. Esta medicion se volvió á egecutar en este siglo con mas precauciones y mejores instrumentos, y solò se hallaron $17\frac{1}{2}$ toesas mas.

345 La distancia de *Montlbery* á *Brie-Comte-Robert* que Picard halló de 13121, toesas, se halló de 13108 toesas no mas quando la Real Academia de las Ciencias de París la verificó en 1756, por manera que todas las dis-

Fig. distancias que Picard determinó venian á tener una toesa mas en cada mil, sea porque la toesa que sirvió en la comprobacion fuese algo mayor que la suya, sea porque no hubiese medido Picard con toda la exactitud que cabe la base de *Villejuive* á *Juvisy* que es el fundamento de todas las demas distancias.

346 La distancia entre los centros de las dos pirámides levantadas en *Villejuive* y *Juvisy* es de 5717 toesas, medida con la toesa que sirvió en 1736 para medir el grado de Laponia, quando el termómetro señalaba 11 ó 12 grados mas arriba de la congelacion. Esta distancia la midieron cinco veces de seguida en 1740 Casini y la Caille, y en 1756 la midieron dos veces, ocho individuos de la Real Academia de las Ciencias. De la última medicion que da 5717 toesas resulta que hay 13108 toesas de distancia entre *Montlhery* y *Brie*, cuya cantidad no discrepa dos pies de las mediciones egecutadas en 1740 por Casini y la Caille.

Despues de continuadas estas mediciones por una serie de triángulos hasta *Amiens*, se ha sacado que el arco del meridiano terrestre comprehendido entre la cara meridional del observatorio de París y la aguja de la Cathedral de *Amiens* es de 60390 toesas.

347 Con observar con todo cuidado la distancia al zenit de las mismas estrellas en París y Amiens se saca $1^{\circ}\ 1'\ 13''\ 1$, de diferencia en todas las alturas entre dos puntos cuya distancia reducida era de 58233 toesas. Todo

do está, pues, en hacer esta proporcion: $1^\circ\ 1'\ 13''$ 1 es Fig.
á 58233 toesas, como $1^\circ\ 0'\ 0''$ es á un quarto término que será de 57074 toesas; y son las que coge el arco terrestre desde París á Amiens, esto es á la latitud de $49^\circ\ 23'$, medido con la toesa que sirvió en Laponia, y en el tiempo que el termómetro de Reaumur señala 10 ó 12 grados. Este grado se reduciria á 57072 toesas si sirviera la medida de la base sacada en 1756, y aun á 57069 egecuntádola con la toesa del equador, de la qual hablaremos mas adelante.

348 La 25^{na} parte de este grado ó 2283 toesas, es la cantidad que dan los Franceses á la legua media de Francia. Una vez averiguado el valor del grado, se saca el valor de la circunferencia, multiplicándole por 360, y se halla que es de 9000 leguas, dando 25 al grado. Se sacará tambien que el diámetro es de 2865 leguas, por la razon de la circunferencia al diámetro.

349 El grado medido entre París y Amiens hubiera bastado para determinar la magnitud de la Tierra en el supuesto de que sea esférica; pero si la Tierra no es redonda, los 360° han de ser diferentes unos de otros, y el grado de las inmediaciones de París no será la 360^{ma} parte de la circunferencia de la Tierra.

350 La diminucion de la gravedad debajo del equador (30) dió á conocer que la tierra daba vueltas

al

Fig. al rededor de su ege, de aquí infirió Huyghens que siendo mayor (35) la fuerza centrífuga de los cuerpos en el equador que en París, las partes de la tierra serían allí mas altas, de donde resultaba que la tierra es un esferoide aplanado ácia los polos.

351 Declararémos, pues, como los Astrónomos podían verificar este aplanamiento, con medir los grados de la tierra en distintas latitudes; si la tierra no es redonda, sus grados se deben medir distintamente que si fuera un globo.

40. Sea *EPQO* la circunferencia aplanada de la tierra; *EDFQ*, la de un círculo circunscripto, que tiene el mismo diámetro *ECQ*. Si tomamos un arco *DF* de este círculo, que sea $\frac{1}{360}$ de la circunferencia entera, el ángulo *DCF* será tambien de un grado; pero el arco *GH* de la tierra no será un grado de la tierra, bien que esté comprehendido entre las lineas *DGC* y *FHC* que forman un ángulo de un grado en el centro de la tierra.

352 El plomo que en los instrumentos astronómicos señala la linea del zenit, y al qual referimos la altura de los astros, es perpendicular á la superficie de la tier-
41. ra; y si un observador en *P*, por egemplo, en París, vé que una estrella, como la clara de Perseo, atraviesa el meridiano cabalmente en el zenit, la verá en la linea *BPZ*, que es perpendicular á la superficie de la tierra, y no vá á parar al centro *C* de la tierra, á no ser que la tierra sea perfectamente esférica. Otro observador *A* que esté, pongo por caso en Amiens, vé una estrella en un rayo *AS*, pa-

paralelo á *PZ* por razon de la suma distancia (VII. 531) de las estrellas; esta estrella parece distante de su vertical *XAB* la cantidad de un ángulo *SAX*. Si con los instrumentos exactos que sirven para estas observaciones, se halla que la clara de Perseo pasa un grado lejos del zenit de Amiens, se sigue que el ángulo *SAX* es de un grado, por consiguiente el ángulo *PBA* que es igual á *SAX* será tambien de un grado; entonces diremos que el arco *AP* de la tierra comprehendido entre París y Amiens, es un grado de la tierra. Luego 41.

353 *El grado del esferoide terrestre, sea la que fuere su figura, es el espacio que es preciso andar en la tierra para que la linea vertical varie un grado.* Síguese de aquí que los grados que medimos por observacion, son ángulos *B* que no tienen su vertice en el centro *C* de la tierra, sí en el punto de concurso de las verticales *ZPB*, *XAB* perpendiculares á la tierra en *A* y *P*.

354 De esto se infiere que en los parages mas aplanados de la tierra los grados han de ser mas largos. Con efecto, quanto mas convexo fuere un arco *PA*, suponiendo que el ángulo *F* sea siempre de un grado, tanto mas corto será dicho arco. Si en lugar de *PA* tomamos el arco *PD*, mas convexo y curvo que *PA*, siendo *DG* paralela á *AF*, y el ángulo *PGD* de un grado, igualmente que *PFA*, dicho arco *PD* será mas corto, bien que tenga una misma amplitud, y sea tambien de un grado, y por lo mismo cogerá menos toesas que *PA*. En una elipse y todas 42.

Fig. das las curvas que se le parecen, la curvatura mayor está en el estremo del ege mayor, y la menor en el estremo del ege menor; luego si la tierra es aplanada ácia los polos, el arco de un grado cogerá mas toesas si se le midiere mas cerca de los polos donde el aplanamiento es máximo.

355 Por consiguiente con medir un grado en parages que están á diferentes distancias de los polos, se podia decidir si la tierra era redonda. La Academia de las Ciencias de París propuso que se midiese un grado debajo del equador y otro ácia los polos. Por el método declarado (340) hallaron los Académicos enviados al norte que la distancia de los dos observatorios puestos en Torneo y Kittis, reducida al meridiano, era de $55023\frac{1}{2}$ toesas. Despues hallaron por las distancias α y δ del dragon al zenit de cada lugar, que la amplitud del arco del meridiano comprehendido entre los paralelos de los dos obersvatorios era de $57' 28''\frac{2}{3}$; de donde resulta que la longitud del grado del meridiano que corta el círculo polar es de 57438 toesas, del qual se han de rebajar 16 toesas por razon de la refraccion que Maupertuis no llevó en cuenta, será, pues, el grado de 57422 toesas, 350 toesas mayor que el grado de París. Este aumento del grado entre 49° y 66° de latitud, demostró el aplanamiento ácia los polos.

356 Los Académicos enviados al equador midieron un arco de 176950 toesas, cuya amplitud hallaron de $3^\circ\ 7'\ 1''$ entre los dos observatorios de Cochesqui y Tarqui;

quí; por consiguiente la longitud del grado era de 56775 toesas. Pero reduciéndole al nivel de la mar, Condamine infirió, despues de examinadas todas las observaciones de sus compañeros, que el primer grado del meridiano es de 56753 toesas. Este primer grado del meridiano, suponiéndole de 56753 toesas tiene 321 toesas menos que el de París á Amiens, 57074, y 669 toesas menos que el grado medido debajo del círculo polar 57422. Fig.

357 Si suponemos que la figura de la tierra sea regular y elíptica, qual debe ser en virtud de la pesantez natural en un influido homogeneo, basta medir dos de sus grados para determinar todas sus dimensiones.

Sea *CLE* el radio del equador; *ZPLB*, la vertical de París; *L*, su punto de interseccion; el ángulo *PLE* es igual á la latitud de París qual la dan las observaciones; con efecto, nosotros no formamos juicio de la latitud sino por la diferencia de altura entre una estrella puesta en èl equador, esto es, en la linea *CLE*, y otra estrella que pasa por nuestro zenit; por lo menos á esto se reducen nuestras observaciones; pero el ángulo en que vemos la distancia de las dos estrellas, es igual al ángulo *ZLE*; luego este ángulo de la vertical con el radio del equador es igual á la latitud del lugar *P*. En todo lo que vamos á decir suponemos esta esplicacion: 41.

358 Cuestion. *Dados dos grados de una elipse, determinar todas sus dimensiones.*

Sea *APB* la elipse del meridiano; *CA*, el radio del 43.

Fig. 43. equador; CP, el semiege; Ee, un arco de un grado, esto es, un arco tal que las perpendiculares EG, eG formen un ángulo EGe de un grado (351); Ff, otro arco tambien de un grado; EKA, FLA, las latitudes de los puntos E y F; EM, la ordenada al punto E.

Hagamos

$CA =$ 1
$CP =$ .... m
$CM =$ x
$EM =$ .... y
sen EKA .... s
sen $FLA =$ .... t
$Ee =$ .... N
$Ef =$ .... M

Por la propiedad de la elipse tenemos $y = m\sqrt{(1-xx)}$; la normal $EK = m\sqrt{(1-xx+mmxx)}$ (VII.80), y el radio de la evoluta $EG = \frac{1}{m}(1-xx+mmxx)^{\frac{3}{2}}$ (VII.82). Hemos de substituir en la expresion de EG un valor de xx, donde no haya mas que el seno de la latitud, esto es, del ángulo EKA.

En el triángulo EKM rectángulo en M, el radio es al seno del ángulo K, como EK es á EM, esto es, $1 : s :: m\sqrt{(1-xx+m^2x^2)} : m\sqrt{(1-xx)}$, de donde se saca $xx = \frac{1-ss}{1-ss+mmss}$; substituyendo este valor de xx en la expresion del radio de la evoluta, sacaremos $EG = \frac{1}{m}\left(\frac{mm}{1-ss+mmss}\right)^{\frac{3}{2}}$. Por la misma razon $FH = \frac{1}{m}\left(\frac{mm}{1-tt+mmtt}\right)^{\frac{3}{2}}$.

Por

Por ser de un grado cada uno los ángulos G y H, los sectores EGe FHf son semejantes, por consiguiente los radios son proporcionales á los arcos; luego $Ee : EG ::$ $Ff : FH$, luego $N : M :: \left(\frac{1}{1 - ss + mmss}\right)^{\frac{3}{2}} : \left(\frac{1}{1 - tt + mmtt}\right)^{\frac{3}{2}}$, dividiendo los dos valores de EG y FH por las cantidades que se hallan en ambos. Resolveremos estas dos fracciones en series, elevando $1 - ss + mmss = 1 + (mm - 1)ss$, y $1 + (mm - 1)tt$ á la potencia $+\frac{3}{2}$, y sacaremos N: Fig. 43.

$M :: \frac{1}{1 + \frac{3}{2}(mm - 1)ss} : \frac{1}{1 + \frac{3}{2}(mm - 1)tt}$; luego $N + \frac{3}{2}N(mm - 1)ss = M + \frac{3}{2}M(mm - 1)tt$; $N - M = \frac{3}{2}M(mm - 1)tt - \frac{3}{2}N(mm - 1)ss = \frac{3}{2}N(1 - mm)ss - \frac{3}{2}M(1 - mm)tt$; luego finalmente $1 - mm = \frac{2(N - M)}{3(Ns^2 - Mt^2)}$. La diferencia de las lineas CA y CP, que son 1 y m, es la mitad de la diferencia de sus quadrados (129 *en la nota*); luego el aplanamiento $= \frac{N - M}{3(Ns^2 - Mt^2)}$. En el denominador que debe ser muy grande en comparacion del numerador, podemos omitir la diferencia entre N y M que es muy corta, y suponer $M = N$, entonces el aplanamiento será igual á $\frac{N - M}{3M(ss - tt)}$.

359 Si el uno de los grados M estuviese debajo del equador, será $t = 0$, siendo nula la latitud del punto F, luego el aplanamiento que buscamos será $\frac{N - M}{3Mss}$. Manifiesta esta espresion que en la hypótesi de la tierra elíptica, los incrementos de los grados son con corta diferencia como los quadrados de los senos de las latitudes, porque $N - M$ es proporcional á ss, una vez que la fraccion $\frac{N - M}{3Mss}$ es constante.

Fig. 43. Si estando debajo del equador el uno de los grados M, el otro grado N está cabalmente en el polo, será $\frac{N-M}{3M}$ el aplanamiento; por consiguiente la diferencia de los diámetros no es mas que el tercio de la diferencia de los grados; por egemplo, como los dos grados estremos discrepan uno de otro $\frac{1}{77}$, los diámetros de la tierra solo discrepan $\frac{1}{231}$.

360 Si en la fórmula hallada substituimos los grados medidos en Francia y el Perú, se sacará que el aplanamiento de la tierra es de $\frac{1}{304}$; pero comparando el grado del norte con el del Perú solo se saca $\frac{1}{210}$. Se indicia de estos diferentes resultados que la tierra no tiene una figura regular y perfectamente elíptica, ó que hay en los grados medidos otra razon de desigualdad, porque de otra manera estas dos comparaciones diferentes deberian dar un mismo resultado.

361 Una vez averiguada la cantidad del aplanamiento es facil de calcular el ángulo de la vertical (VII. 898). Supongamos el semiege menor $= 1$, el semiege mayor $= 1 + \beta$, su quadrado será $1 + 2\beta$ (129 *not.*), por razon de la pequeñez de β. Sea la abscisa $CM = x$; la subnormal MK será (VII. 80) $x \cdot \frac{1}{1+2\beta} = x(1-2\beta)$ (II. 110); luego $CK = 2\beta x = 2\beta$. cos latit. La perpendicular KD bajada á $CE = CK$. sen $KCD = CK$. sen latit $= 2\beta$. cos lat. sen lat $= \beta$. sen 2 lat. (II. 378), y el seno del ángulo $KED = \frac{DK}{DE}$ ó $\frac{DK}{CE} = \beta$. sen 2 lat.

Su-

Suponemos *ED* sensiblemente igual al semiege menor, Fig.
porque solo discrepa de él una cantidad que no alteraría la fórmula. De este modo se ha calculado la segunda columna de la tabla LXXXIV.

362 Por los mismos principios se demuestra que en la hypótesi de la tierra elíptica, los excesos que los radios de la tierra llevan al ege menor son como los quadrados de los senos de las latitudes; quiero decir, que *OA* 40.
es á *KM*, como el quadrado del seno total es al quadrado del seno del arco *EL*, suponiendo siempre sumamente cortas las diferencias de los grados. Con efecto, por la propiedad de la elipse (VII.64) $OA : KL :: CA : BL$ ó $\beta : KL :: 1 :$ sen lat; luego $KL = \beta.$ sen lat; pero por razon de los triángulos semejantes *BKC*, *MKL*, tenemos $KL : KM :: CK : BK$ ó $\beta.$ sen lat $: KM :: 1 :$ sen lat. Luego $KM = \beta.$ sen lat^2, esto es, que la diferencia entre el radio del equador, y el radio *CK* correspondiente á una latitud dada, es igual al aplanamiento multiplicado por el quadrado del seno de la latitud. Tenemos, pues, $CK = 1 + \beta - \beta$ sen^2 lat ó $CK - 1 = \beta - \beta.$ sen^2 lat $= \beta.$ cos^2 lat (porque (II.384) $1 -$ sen$^2 =$ cos^2); luego el exceso que *CK* lleva á *CO* es como el quadrado del coseno de la latitud.

363 Veamos ahora como se esplica el aplanamiento y se representan los tres grados de que hemos hecho mencion.

El grado de Francia medido á la latitud de $49^\circ \frac{2}{5}$ tiene 321 toesas mas que el grado del equador, y el del

Fig. círculo polar tiene 669 ó 675 toesas (356) mas que el del equador; estos excesos de 321 y 669 toesas deberian ser como los quadrados de los senos de las latitudes, esto es, como los quadrados de los senos de $49^\circ \frac{2}{5}$ y $66^\circ \frac{1}{3}$ si la tierra fuese elíptica (359); pero vienen á ser como las quartas potencias de los senos de las latitudes. Aplicando esta hypótesi á todos los demas grados de la tierra, resulta una curva cuya naturaleza vamos á determinar para poder calcular sus radios y los ángulos de las verticales con los radios.

364 Hemos de determinar desde luego el último grado de latitud, haciendo esta proporcion: la quarta potencia del seno de $66^\circ \frac{1}{3}$ es á la del seno total, esto es, á la unidad, como el exceso 675 toesas es al exceso que el último grado lleva al primero. De aquí infirió Bouguer que el último grado de latitud ó el que está debajo del polo, es de 57712 toesas, y tiene 959 toesas mas que el primer grado.

En conociendo el exceso del último grado, 959 toesas, se hallará el exceso de un grado qualquiera, pongo por caso el del grado de París, con decir: la quarta potencia del radio, que siempre es 1, es á 959, como la quarta potencia del seno de la latitud de París es al exceso del grado medido ácia París respecto del primer grado. Se reduce esta proporcion á multiplicar 959 toesas por la quarta potencia del seno de la latitud dada para sacar el exceso del grado.

Una

365 Una vez averiguada la longitud de un grado, Fig.
es facil de determinar la longitud del radio que corresponde á dicho grado; porque el radio equivale á un arco de 57° (III.487); por consiguiente si multiplicamos por 57° la longitud de un grado, sacaremos la longitud del radio. Para mayor facilidad, se añade el logaritmo constante 1,7581226 al del grado en toesas, y sale el logaritmo del radio. En esta operacion suponemos que un grado de la tierra siempre es un arco de círculo; pero sea la que fuere la figura de la tierra, discrepa tan poco del círculo, que podemos, sin error sustancial, suponer que un arco de un grado se confunde con el arco del círculo que tuviese la misma curvatura y el mismo radio que él. El que tuviere algun escrupulo acerca de esto, podrá valerse de la longitud de un minuto, y sacará el mismo resultado.

366 Sea *C* el centro de la tierra; *PEM*, la circun- 44.
ferencia de un meridiano de la tierra; *E*, el punto que está debajo del equador; *P*, el polo; *Eq*, el grado medido debajo del equador, cuyo radio *ED* es de 3251707 toesas; *Mm*, el último grado de latitud, cuyo radio *MG* es de 3306654 toesas (365); otro grado de la tierra medido en el punto *B* tiene por radio una linea *BI*, y la serie de todos los radios determina una linea curva *DIG*, que es (III.447) la *evoluta* de la curva *EM* del meridiano. Por consiguiente la longitud de la evoluta *DIG* es igual á la diferencia de los radios osculadores *ED* y *MG*,

 del

Fig. 44. del primero y último grado; esto es, á 54947 toesas, y un arco qualquiera de la evoluta, como DI, es igual á la diferencia de los radios ED y BI. Para inferir de aquí las dimensiones del meridiano PEM, tiraremos la línea bI paralela á EC, y otra ordenada infinitamente próxima á bI; en el triángulillo fIg tendremos el ángulo g igual al ángulo EKB, que es la latitud del punto B de la tierra, luego $If = Ig$. sen lat, y $gf = Ig$. cos lat.

367 Hemos dicho que la diferencia de los radios osculadores ED y MG, ó la longitud de la evoluta DIG es igual á 54947 toesas, ó á 57 veces el exceso 959 que el último grado lleva al primero. Del mismo modo sacaremos la longitud DI de la evoluta en una latitud qualquiera, multiplicando DIG por la quarta potencia del seno de la latitud (364). Por consiguiente, si tomamos por unidad la longitud DIG, y llamamos s el seno de la latitud de un punto qualquiera B de la tierra, y $\sqrt{(1-ss)}$ su coseno (II. 392); u, el arco DI de la evoluta, tendremos $u = s^4$; diferenciando esta espresion, saldrá $du = 4s^3ds$, este es el valor del arco elemental gI; luego $If = Ig$. sen lat $= 4s^4ds$, y $gf = 4s^3\sqrt{(1-ss)}.\, ds$, las integrales de estas dos cantidades darán las lineas Db y bI. Pero la integral de $4s^4ds$ es $\frac{4}{5}s^5$, este es el valor de la abscisa Db; y si hacemos $s = 1$, ó al seno total, sacaremos toda la abscisa DQ ó $CG = \frac{4}{5}$ de la evoluta.

El valor de la ordenada Ib ó la integral de fg que es $4s^3\sqrt{(1-ss)}.\, ds$, es $\frac{4}{5}(1-ss)^2\sqrt{(1-ss)} - \frac{4}{3}(1-ss)$

$.\sqrt{}$

$\surd(1-ss)+\frac{8}{15}$, despues de completada (III. 501); y si hacemos $s=1$, sacaremos *GQ* ó *DC* $=\frac{8}{15}$; estos dos valores de *DQ* y *GQ* nos proporcionarán hallar los de *KH*, *KC*, *CH*, y de los dos diámetros de la tierra. Fig. 44.

368 La tangente *KH* es igual á $\frac{8}{15}+\frac{4}{15}ss$, y lo probaremos. En el triángulo *HIZ* tenemos esta proporcion; el seno del ángulo *IHZ* (igual al coseno de la latitud, ó $\surd(1-ss)$), es al radio, como *IZ* $(=QG-bI)$ es á *HI*, esto es, $\surd(1-ss): 1 :: -\frac{4}{5}(1-ss)^2\surd(1-ss)+\frac{4}{3}(1-ss)\surd(1-ss): \frac{8}{15}+\frac{4}{15}ss-\frac{4}{5}s^4$, este es el valor de *HI*. Para hallar la otra parte *IK* de la tangente, haremos esta proporcion: el seno de *IKk* es al radio, como *Ik* (ó *Db*) es á *KI*, esto es, $s: 1 :: \frac{4}{5}s^5 : \frac{4}{5}s^4$; este es el valor de *KI*, el qual añadido á *IH* da el valor total de $KH=\frac{8}{15}+\frac{4}{15}ss$, tomando siempre por unidad toda la evoluta *DIG* (367), esto compone 29305 toesas + 14653 . *ss*. Quando *s* fuere $=1$, la parte *KI* será igual á *GC*, y será $\frac{4}{5}$ de la evoluta; luego $GC=\frac{4}{5}GID=43958$ toesas.

369 Si desenvolvemos la curva *DIG* empezando desde el punto *D*, trazaremos una curva *DON*, en la qual se echa de ver que las partes cortadas *DE*, *OB*, *NM* son todas iguales al radio *ED* del primer grado; la parte $KO=IO-KI=ID-KI=s^4-\frac{4}{5}s^4=\frac{1}{5}s^4$; por consiguiente para sacar *OK*, se multiplicará la quinta parte de la evoluta *GID* por la quarta potencia del seno de latitud.

La

Fig. 44. La linea *HB* ó la vertical comprehendida entre la superficie de la tierra *B*, y el punto donde esta vertical corta el ege, es igual á $BO + OK + KH$; luego es igual á la suma del radio del primer grado de latitud, de los $\frac{8}{15}$ de toda la evoluta, de $\frac{1}{5}$ de la evoluta multiplicada por la quarta potencia de sen lat, y de $\frac{4}{15}$ de la evoluta multiplicada por el quadrado del seno de la latitud, ó lo que viene á ser lo mismo, á 3281012 toesas, + 10989 multiplicado por la quarta potencia del seno, mas 14653 multiplicado por el quadrado del seno de la latitud.

Por medio de la tangente *KH*, se sacará facilmente la parte *CH*; porque en el triángulo rectángulo *KHC*, el ángulo *K* es la latitud (357), luego $CH = KH$. sen lat; y en el triángulo *HBR*, tenemos $HR = BH$. sen lat. Restaremos *CH*, y quedará *CR*; buscaremos tambien $BR = BH$. cos lat. Buscaremos la hypotenusa *CB*, que es el radio de la tierra, y el ángulo *CBR* el qual restado de la latitud del lugar *B* (igual al ángulo *RBH*) dará el angulillo *CBH* que forma la vertical con el radio de la tierra.

370 Averiguemos, por egemplo, la vertical *BH* que corresponde á la latitud de París, que es $48^{\circ} 50'$, por un lado hallamos 3529 toesas, por otro 8304 toesas que se han de sumar con 3281012, y sale la vertical $BH = 3292845$; de donde se saca $HR = 2478847$, y *BR* del qual basta conocer el logaritmo 6,3359632. La tangente $KH = 29305 + 8322 = 37627$, multiplicada por el seno de la latitud, da $CH = 28325$ que

que se restarán de *HR*, y saldrá *CR* = 2450522; si de Fig.
su logaritmo se resta el de *BR*, saldrá el de la tangente 44.
de *CBR*; este ángulo se hallará de $48^\circ\ 30'\ 24''$, esto es, $19'\ 36''$ menor que la latitud $48^\circ\ 50'$; este es el valor del ángulo *CBH* que forma la vertical con el radio correspondiente á París; finalmente *CR* dividida por el seno del ángulo *CBR* dará para París un radio *CB* de 3271581 toesas.

Por este método calculó Mr. de la Lande la tabla siguiente, para averiguar las paralaxes de la Luna en el esferoide aplanado (VII. 876, 896 y 898). Vá señalada en dicha tabla la magnitud absoluta de la tierra, y la cantidad de aplanamiento que resulta de los tres grados mencionados y de la hypótesi propuesta (363). El radio del equador ó la suma de *ED* y *DC* es 3281012 toesas, el semiege ó la diferencia entre *GC* y el radio *GM* del último grado es de 3262688 toesas; la diferencia 18325 toesas es el aplanamiento de la tierra, de 8 leguas comunes de Francia ó $\frac{1}{179}$ del radio del equador en lugar de $\frac{1}{230}$ que da la teórica de la atraccion (383) quando se supone la tierra homogenea. Este grado de aplanamiento de $\frac{1}{179}$ es el que hemos seguido en los cálculos de la paralaxe (VII. 896) = $\frac{1}{178}$ del ege de la tierra.

Grad.

Fig.

Grad. de latitud.	Angulo del. radio con la vertical.	Radios de la tierra, como *CB*, en toesas.	Angulos en el esferoide elíptico.
0°	0′ 0″	3281012	0′ 0″
10	5 20	3280572	6 36
20	10 27	3279263	12 26
30	14 58	3277155	16 44
40	18 17	3274377	19 4
50	19 37	3271202	19 4
60	18 22	3268017	16 44
70	14 18	3265252	12 26
80	7 50	3263396	6 36
90	0 0	3262688	0 0

Tabla de los diez grados medidos geométricamente por diferentes Astrónomos.

Latitud media de los grados medios.	Valor de los grad. en toesas.	Autores de donde se han sacado las medidas.
0° 0′	56753	Bouguer y Condamine (356).
33 18 A	57037	Abate de la Caille.
39 12	56888	Mason y Dixon.
43 0 S	56979	Abate Boscovich.
44 44	57069	El P. Becaria.
45 0	57028	*Merid.verif.* Mem.Acad.de Cienc.de París 1758
45 57	56881	Abate Liesganig, en Hungría.
49 23	57069	De París á Amiens (347).
66 20	57422	Debajo del círculo polar (355).
48 43	57086	Abate Liesganig, en Austria.

371 En virtud de las dimensiones de la Tierra espresadas en la primera tabla podemos dar á conocer su superficie, su solidez y su peso. Supongamos, para simplificar el cálculo, que se trace un esferoide sobre los dos diámetros de la Tierra, de los quales el uno es de 6562024 toe-

toesas ó de $2874\frac{2}{5}$ leguas, el otro de 6525376 toesas ó $2858\frac{2}{5}$ leguas, su volumen ó su solidez será (20) $\frac{2}{3}ca^2b$ ó 1236604400 leguas cúbicas. Fig.

Si suponemos un globo del mismo tamaño ó volumen, será menester que su radio sea de 1434,544 leguas, y su superficie será de 2586056o leguas quadradas; pero si se quiere determinar la superficie del esferoide sin acudir al supuesto de una esfera equivalente, nos valdremos de la fórmula $2pab + \frac{pae^2}{3b} - \frac{e^4pa}{20b^3} + \frac{e^6pa}{56b^5}$ (19), y sacaremos el primer término igual á 2580971 5 leguas, los demás son + 48456 — 82 + 0,3, la suma será 25858089 leguas quadradas, superficie total del esferoide elíptico trazado sobre los dos eges espresados.

Para formar juicio de la masa ó del peso total de la Tierra, supongamos que en su interior sea de una tierra análoga, con poca diferencia, á la arcilla, cuyo pie cúbico pesa unas 140 libras; la toesa cúbica pesará 30240, la legua cúbica 3597752000000000, y el peso de toda la Tierra será de 4448994000000000000000000 libras, cuyo número consta de 25 caracteres.

372 Hasta aquí solo hemos tratado de los grados del meridiano ó de los grados de latitud; sin embargo en algunos casos se ofrece determinar los grados de longitud ó los grados de los círculos menores paralelos al equador. Si se supone esférica la circunferencia PEM de la Tierra, el radio BR del paralelo que pasa por el punto B, es el coseno de la latitud EB; luego los grados de longitud son á 44.

los

Fig. 44. los grados de latitud, como el radio es al coseno de la latitud. Por consiguiente, como el grado de latitud en París es de 57074 toesas, si multiplicamos esta cantidad por el coseno de $48° 50' 14''$, sacaremos 37566 toesas, valor de cada grado del paralelo de París.

Pero como la Tierra es aplanada, esta regla dá grados de longitud menores de lo que son en realidad, porque *BI* es el radio del grado de latitud en *B* (366); pero *BH* es el que deberíamos tomar para que se verificase la proporcion antecedente, y diera la verdadera cantidad de *BR*. Hemos dicho antes (362 y 369) cómo se determina toda la vertical *BH*; dividiendo esta linea por 57 (365), sacamos el grado del círculo máximo de la Tierra que es perpendicular al meridiano en *B*, y este grado multiplicado por el coseno de la latitud dá el grado del paralelo en el esferoide aplanado. De aquí se sacará que para Paris el grado del círculo máximo perpendicular al meridiano es de 57471 toesas, 397 toesas mayor que el grado del meridiano; y el grado del paralelo, que es de 37833, tiene 265 toesas mas que si la Tierra fuese esférica.

Determínase la figura de la Tierra por los principios de la atraccion.

Hasta aquí hemos probado el aplanamiento de la Tierra por observacion; ahora le probaremos por los principios de la atraccion, para lo qual nos hacen al caso las proposiciones siguientes.

La

373 *La atraccion de una pequeña pirámide* BD *en el corpúsculo* B *puesto en su vértice, es igual á la base dividida por la altura; y esta atraccion resuelta en la direccion* BG, *es igual á la base dividida por la altura, y multiplicada por el coseno del ángulo* DBG. Fig. 45.

Sea X la superficie de la base de una pequeña pirámide BD; $\frac{X.Dd}{BD^2}$ será la atraccion del elemento de la pirámide (101), y $\frac{X.Dd.\cos GBD}{BD^2}$ será la atraccion del mismo elemento en la direccion BG (24). En lugar de la base X se puede substituir αBD^2, porque dicha base es proporcional al quadrado de la altura ó de la distancia BD; luego la atraccion elemental será $\alpha.Dd.\cos GBD$, cuya integral es $\alpha.BD.\cos GBD$, y restituyendo en lugar de α su valor $\frac{X}{BD^2}$, sacaremos que $\frac{X}{BD}.\cos GBD$ es la atraccion de dicha pirámide infinitamente pequeña en la direccion BG.

374 *Hallar la atraccion de un esferoide* PEp *en un corpúsculo* P *puesto en el polo.* 46.

Sea Mm una porcion infinitamente pequeña del meridiano EMp; despues de tirar las lineas PM, Pm, y el arco pequeño MA perpendicular á Pm, imaginaremos que la curva gira al rededor del ege PCp, una cantidad infinitamente pequeña; entonces PMA formará una pirámide que se puede considerar como uno de los elementos del esferoide entero que la curva PEp trazaría si diera una vuelta entera. Hagamos el radio $= 1$, y llamemos α el ángulo infinitamente pequeño que mide el movimiento del plano PEp; sea

Fig. sea el semiege $PC = 1$, el radio CE del equador $= m$, la abscisa $PQ = z$, la ordenada $QM = u$, el coseno del ángulo MPQ para el radio 1, $= s$, será $u\alpha$ igual al arco ó á la linea corta que traza el punto M, durante el movimiento infinitamente pequeño del plano $PEMp$ al rededor del ege, porque un arco pequeño es igual al radio multiplicado por el ángulo (VII. 44); con multiplicar este arco pequeño, que es uno de los lados de la base de la pirámide, por el otro lado MA, sacaremos la superficie de la base de dicha pirámide, $= u\alpha . MA$; luego la atraccion de la pirámide resuelta en la direccion PC, será $\frac{u\alpha s.MA}{PM}$ (373); pero $\frac{MA}{PM} = \frac{ds}{\sqrt{(1-ss)}}$ (III. 353); esto quiere decir que la diferencial de un arco es á la del coseno s, como el radio es al seno; luego la atraccion de la pequeña pirámide será $\frac{\alpha usds}{\sqrt{(1-ss)}}$, en la qual hemos de eliminar la letra u, para substituir s en su lugar, á fin de que no lleve esta diferencial mas de una incógnita. La propiedad de la elipse (VII. 62) dá $u^2 = 2mmz - m^2z^2$; por otra parte el coseno del ángulo $MPQ = \frac{PQ}{PM}$ (VII. 21.) $= \frac{z}{\sqrt{(zz+uu)}} = s$, de donde sacaremos $zz = sszz + ssuu$, ó $z = \frac{su}{\sqrt{(1-ss)}}$, $zz = \frac{s^2u^2}{1-ss}$; substituyendo estos valores de z y zz en la espresion de u^2; tendremos $u\left(1+\frac{m^2s^2}{1-ss}\right) = \frac{2mms}{\sqrt{(1-ss)}}$, y $u = \frac{2mms(1-ss)}{(1-ss+m^2ss)\sqrt{(1-ss)}}$; substituyendo nn en lugar de $mm - 1$, y substituyendo este valor de u en la espresion $\frac{\alpha usds}{\sqrt{(1-ss)}}$, se transformará

en

en $\frac{2am^2s^2as}{1+n^2s^2} = 2am^2s^2ds - 2an^2m^2s^4ds$ (II. 110), Fig. 46.
porque siendo muy pequeña n^2, se desechan los términos siguientes. La integral es $\frac{2}{3}am^2s^3 - \frac{2}{5}am^2n^2s^5$ (III. 472), y haciendo $s = 1$, $a = c$ (VII. 45) para hallar la suma de todos los elementos que componen el esferoide, dicha integral se reduce á $\frac{2}{3}cm^2 - \frac{2}{5}cm^2n^2$. En lugar de m que es el radio del equador, pondremos $1 + \delta$, de modo que sea δ el aplanamiento de la Tierra, que es un quebrado muy pequeño del semiege *CP*, cuyo quadrado y demás potencias podremos despreciar; con esto $m^2 = 1 + 2\delta$ (II. 99), y $nn = mm - 1 = 2\delta$. Substituyendo estos valores, la integral hallada poco ha se reducirá á $\frac{2}{3}c + \frac{8}{15}c\delta = \frac{2}{3}c\left(1 + \frac{4}{5}\delta\right)$; esta es la atraccion con la qual un esferoide cuyo semiege es 1, y el aplanamiento δ, obra en un corpúsculo puesto en el polo. Esta es la cantidad que llamamos *P* (381 y 383).

375 Si suponemos $\delta = 0$, conforme sucede en un globo, cuyo radio $CP = 1$, será $\frac{2}{3}c$ la fuerza con la qual este globo atrahe un corpúsculo colocado en su superficie. Síguese de aquí que esta atraccion es proporcional á la circunferencia ó al radio del globo atrayente; por manera que un globo de un radio duplo atrahería un cuerpo colocado en el polo con una fuerza dupla. Lo mismo diremos de dos esferoides semejantes, pues la cantidad de atraccion que pende de δ, crecería proporcionalmente á δ, y sería dupla en un esferoide, cuyo radio fuese duplo.

Fig. 376 Síguese de aquí que la atraccion del esferoide en puntos situados á diferentes distancias es en razon inversa de los quadrados de las distancias. Porque si llamamos r la distancia, é imaginamos un esferoide semejante que coja hasta allá, tendremos la atraccion proporcional á r ó á $\frac{r^3}{r^2}$, esto es, á la masa del esferoide que es r^3, dividida por el quadrado de la distancia.

47. 377 *Hallar la atraccion con que un mismo esferoide elíptico obra en un corpúsculo colocado en el equador.*

Sea PC el semiege; CE, el radio del equador; y EK paralela al ege PCR. Supongamos un plano que pase por la linea EK, y corte el esferoide; la seccion será una elipse (VII. 89) semejante á la elipse $EPAR$, porque siendo el espresado plano paralelo al ege PR de la Tierra es indispensablemente paralelo á alguno de los meridianos del esferoide, que todos se cortan en el ege PR. Si tomamos $EH = PR$, y suponemos sobre el diámetro EH una esfera cortada tambien con planos que pasan por la linea EK, estos planos formarán una infinidad de elementos ó rebanadas infinitamente delgadas girando al rededor de la linea EK. Se hallará la proporcion que hay entre la atraccion de uno de los elementos de la esfera y la atraccion del elemento correspondiente del esferoide, y se inferirá la atraccion del esferoide una vez que sabemos (375) qual es la de la esfera.

Hagamos

El semiege EC .... $= m$,

CP

CP .... $= 1$, Fig. 47.

$mm - 1$ .... $= nn$,

$CQ = EK$ .... $= u$,

NK .... $= z$,

Sen NEC .... $= s$,

Cos NEC .... $= \sqrt{(1 - ss)}$.

Esto supuesto, si la elipse $EPAR$ se mueve infinitamente poco, trazando un angulillo α al rededor del punto E y de la linea EK, formará una rebanada elíptica estremadamente delgada, cuyo elemento ó diferencial es una pequeña pirámide ENL; el punto N trazará en virtud de su movimiento en el mismo tiempo una linea recta, ó por mejor decir un arco pequeño, cuyo valor es el ángulo α multiplicado por el radio NK, ó αz (VII. 44), este es uno de los lados de la base de dicha pirámide pequeña, el otro lado es NL. Luego la atraccion de la pirámide será (373) $\frac{\alpha.NL}{EN}\sqrt{(1 - ss)}$ en la direccion EC; pero $\frac{NL}{NE}$ es el angulillo NEL (373) ó la diferencial del ángulo NEC, y la diferencial del ángulo multiplicada por el coseno es igual á la diferencial del seno (III. 352); luego tendremos $\frac{NL}{NE}\sqrt{(1 - ss)} = ds$, y la atraccion de la pirámide ENL se reducirá á $\alpha z ds$, en la qual hemos de eliminar la letra z.

Por la propiedad de la elipse (VII. 62) $PQ . QR : QN^2 :: PC^2 : CE^2$; luego $1 - uu : zz - 2mz + mm :: 1 : mm$; luego $uu = \frac{2mz - zz}{mm}$. El seno del ángulo NEC ó ENK es igual á $\frac{EK}{NE} = \frac{u}{\sqrt{(uu + zz)}} = s$; de estas dos equaciones sa-

Fig. sacaremos facilmente un valor de z en s. Porque como $s =$
47. $\frac{u}{\sqrt{(uu + zz)}}$, $uu = \frac{sszz}{1 - ss}$; luego igualando los dos valores de uu sacaremos $\frac{2mz - zz}{mm} = \frac{sszz}{1 - ss}$; $2m(1 - ss) - z(1 - ss) = m^2 s^2 z$; luego $z = \frac{2m(1 - ss)}{1 + mmss - ss}$, y como $mm - 1 = nn$, $z = \frac{2m(1 - ss)}{1 + nnss}$; substituyendo este valor de z en $azds$ se transformará en $\frac{2ma(1 - ss)ds}{1 + nnss}$. Si convertimos este quebrado en serie (II. 110), desechando el quadrado de nn, la atraccion de la pirámide elemental será $= 2ma(1 - ss)(1 - nnss)ds = 2ma(1 - ss - nnss + nns^4)ds$, cuya integral es (III. 472 y 494) $2ma\left(s - \frac{s^3}{3} - \frac{nns^3}{3} + \frac{nns^5}{5}\right)$, esta es la atraccion de la rebanada que traza el sector AEN, y si hacemos $s = 1$, la atraccion de la rebanada semieliptica que traza ERA, será $2ma\left(\frac{2}{3} - \frac{2}{15}nn\right)$; substituyendo en lugar de m su valor $1 + \delta$ (374), y en lugar de nn su valor 2δ, se transforma en $2a\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\delta\right)$. Si hacemos $\delta = 0$, tendremos la atraccion de una rebanada semicircular infinitamente delgada, que fuese trazada del mismo modo por el movimiento del semicírculo, cuyo diámetro fuese EH, y esta atraccion es $\frac{4}{3}a$.

La razon entre las atracciones de una esfera trazada sobre EH, y del esferoide $ERAP$, es la misma que hay entre sus elementos, porque se componen de un mismo número de elementos. Luego las atracciones totales son entre sí, como la atraccion de la rebanada semielíptica es á la de la rebanada semicircular, esto es, como $2a\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{5}\delta\right)$ es á $\frac{4}{3}a$, ó como $1 + \frac{3}{5}\delta$ es á 1. Luego bastará multi-

pli-

plicar la atraccion de la esfera que, según vimos (375), Fig.
es igual á $\frac{2}{3}c$ por $1 + \frac{3}{5}\delta$, para sacar la del esferoide, 47.
que por lo mismo será $\frac{2}{3}c\left(1 + \frac{3}{5}\delta\right)$, esta es la cantidad que llamamos E (381). Si supusiéramos que el punto atrahido E está fuera de la elipse á una distancia g del centro C, hallaríamos por el mismo método que la atraccion del esferoide mengua en razon inversa de g^2.

378 Esto supuesto, si la Tierra fuese una masa fluida y homogenea, su figura sería, conforme veremos (383), un elipsoide cuyo ege sería $\frac{1}{230}$ menor que el diámetro del equador. Pero hemos encontrado (263) un hecho del qual se sigue que la Tierra es heterogenea; pruébanlo tambien las observaciones hechas acerca de su figura, porque el grado de aplanamiento que se verificaría en el caso del esferoide homogeneo, y el aumento de pesantez desde el equador ácia los polos, que manifiesta el péndulo (30), no son puntualmente quales los observamos.

Para demostrar que la figura de la Tierra ha de ser elíptica, suponiendo una masa fluida que gira al rededor de su ege, hemos de averiguar si las atracciones que se esperimentan en distintos puntos de la superficie de un esferoide elíptico, son tales que en todos los puntos formen equilibrio con la fuerza centrífuga que se verifica en el mismo esferoide elíptico; porque si fuere así, podremos asegurar que la figura del esferoide dando vueltas al rededor de su ege, será constantemente una elipse.

379 *Sean dos elipses semejantes y concéntricas* AMBL 48.

Fig. 48. QSRHT, *y una linea* MQN *tangente en* Q *de la elipse interior. Figurémonos que el plano de estas dos elipses gire al rededor del ege* MQN *andando un ángulo infinitamente pequeño no mas. Las dos rebanadas ó sólidos infinitamente delgados y elípticos engendrados por las elipses* AMBN, QSRTQ *obrarán en la direccion* QB *del ege menor con una atraccion igual, el primero en el corpúsculo* N, *el otro en el corpúsculo* Q.

Supongamos, para probarlo, dos lineas QR y QT en la elipse menor, igualmente distantes del ege QB, y dos lineas NK y NL en la elipse mayor paralelas á QR y QT. Las lineas QR y QT con las lineas infinitamente próximas como Qt, trazarán en virtud del movimiento de dicho plano, dos pirámides que son los elementos del sólido originado del movimiento de la elipse menor $QSRTQ$. Asimismo, cada una de las lineas NK y NL, con otra linea infinitamente próxima, como Nk, trazará dos pirámides desiguales, cuya suma es patentemente igual á la suma de las dos pirámides QR y QT, pues $NK + NL = 2QR$ (VII. 25), y las pirámides son semejantes, porque son engendradas de un solo y mismo movimiento, y son paralelas entre sí. Las atracciones de las pirámides QR y QT en la direccion QH serán las mismas que las atracciones de las pirámides NK y NL en el punto N en una direccion paralela á QH, pues el ángulo RQM es igual al ángulo KNM y al ángulo LNZ, con esto las fuerzas resueltas serán iguales del mismo modo que las fuerzas ab-

so-

solutas; lo propio diremos de todos los demás elementos que componen la rebanada. Y quando *QR* y *QT* hubieren llegado á una inclinacion tan grande que *NL* pase al segmento *MAN*, se echará de ver que la atraccion de las pirámides que componen el sólido engendrado por la revolucion de *MANM*, restadas de las atracciones de las pirámides que las corresponden en el sólido engendrado por *MBN*, que las son contrarias, el residuo será todavía igual con las atracciones de las pirámides correspondientes en el sólido engendrado por la elipse *RQT*; luego la atraccion residua de la rebanada mayor en el punto *N*, en la direccion paralela á *QB*, será todavía igual con la atraccion de la rebanada menor en el punto *Q* en la direccion *QH*. Fig. 48.

380 Síguese de aquí que los dos esferoides elípticos semejantes, cuyos meridianos son *AMB*, *QSH*, y cuyos elementos son las rebanadas de que hemos hablado, obran con igual atraccion, el uno en el punto *Q*, en la direccion *QB*, el otro en el punto *N* en una direccion paralela á *QB*. Lo propio sucedería si la tangente *MQN* de la elipse menor fuese paralela al ege menor, en vez de ser paralela al mayor; quiero decir, si tomáramos *SD* en lugar de *QM*; la atraccion del esferoide menor en el punto *S* sería igual á la atraccion del esferoide mayor en el punto *D*, considerándolas ambas en una direccion paralela al ege mayor.

381 Basta esto para demostrar que la figura de una masa fluida que gira al rededor de su ege, es una figura

Fig. elíptica, para cuyo fin demostraremos primero que las atracciones que hemos determinado en un esferoide elíptico, combinadas con la fuerza centrífuga que siempre es paralela al ege mayor del meridiano, ó perpendicular al ege menor, causan una fuerza que es perpendicular á la superficie del esferoide.

46. Sea igual á E (377) la atraccion del esferoide en un corpúsculo E colocado debajo del equador; P, la atraccion (374) en un corpúsculo colocado en el polo; F, la fuerza centrífuga debajo del equador (35); N, un punto cuya pesantez hemos de determinar para averiguar ácia qué punto se dirige.

La atraccion en N resuelta en la direccion NR, será la misma que en el polo X de un esferoide semejante á PNE, cuyo semiege fuese CX (380); luego $P \cdot \frac{CX}{CP}$ será la fuerza que obra en N paralelamente al ege PC (375), porque yá que las atracciones de los cuerpos semejantes y homogeneos son (94) como las masas, y (98) en razon inversa de los quadrados de las distancias, han de ser como los radios; asimismo, la atraccion del esferoide PEp en el punto N en la direccion NX, será la misma que sobre el equador R de un esferoide semejante, de cuyo equador fuera CR el semidiámetro; luego (380) $E \cdot \frac{CR}{CE}$ ó $E \cdot \frac{NX}{CE}$ será la atraccion en el punto N, en la direccion NX. Hemos de restar de ella la fuerza centrífuga $F \cdot \frac{NX}{CE}$ que se verifica en el punto N (34); luego $(E - F)\frac{NX}{CE}$ será la fuerza total que obra en N en la direccion NX, á la qual po-

podremos dár por espresion la linea *NV*, siendo *NS* la de Fig. la fuerza que la es perpendicular. La fuerza compuesta que 46. de aquí resulta tendrá por espresion una diagonal *NT*, la qual prolongada encuentra en *G* el ege *Pp*; y si *XG* fuere igual con la subnormal de la elipse, esto es con $\frac{CE^2}{CP^2} . CX$ (VII. 80), se seguirá forzosamente que la fuerza total del punto *N* sigue la direccion de la normal, y será por lo mismo perpendicular á la superficie de la Tierra. Para esto basta que tengamos esta proporcion $VT : NV :: XG : NX$, porque de aquí inferimos que $P . \frac{cX}{cP} : \frac{NX}{cE}(E - F) :: \frac{cE^2}{cP^2} . CX : NX$, ó lo que viene á ser lo mismo, $P : E - F :: CE : CP$, y con esto la fuerza de un punto qualquiera yá no pende de su situacion, y las dos fuerzas que obran en *N*, se reducen á una fuerza *NT* perpendicular á la superficie del esferoide, y este girará sin mudar de figura (378); luego la figura natural de este fluido es una elipse cuyos eges son uno á otro como *P* es á $E - F$.

Por consiguiente siempre que los diferentes puntos de un círculo son solicitados de fuerzas paralelas entre sí, y proporcionales á las ordenadas del mismo círculo, se transforma dicho círculo en una elipse, cuyo ege mayor es paralelo á la direccion de dicha fuerza estraña. Y como los meridianos de la Tierra están en este mismo caso, se transforman todos en elipses, y la figura de la Tierra que de aquí se origina es la misma que engendraría un meridiano que girára al rededor del ege menor.

382 Para que la Tierra guarde la figura de una elip-

Fig. elipse, cuyos eges sean entre sí como $CE : CP$, es preciso que sea tal la velocidad de rotacion, que por medio de la fuerza centrífuga que de ella resulta tengamos esta proporcion $P : E - F :: CE : CP$, entonces todas las columnas pesarán igualmente; habrá en todas las partes del esferoide una presion perpendicular á la superficie, igual en todos los puntos, pues en la proporcion espresada no hay término alguno que penda de la situacion del punto M. No tendrá, pues, cada parte mas movimiento que el de la rotacion comun á todo la masa, y el esferoide elíptico girará al rededor de su ege sin mudar de figura.

383 Una vez probado que el esferoide es elíptico, hemos de averiguar qual será la cantidad de su aplanamiento en virtud de la velocidad de rotacion que es conocida, y de la fuerza de atraccion con la qual obra el esferoide en partículas de materia colocadas en el polo y debajo del equador; quiero decir, que hemos de determinar las razones entre las cantidades E y F.

Despues de dividido el esferoide en pirámides elementales, y de averiguada la atraccion de cada una (373), consideraremos los valores hallados de E y P. Para que el esferoide dé la vuelta al rededor de su ege sin mudar de figura, es preciso que se verifique esta proporcion (382) $P : E - F :: CE : CP$, ó $\frac{2}{3}c(1 + \frac{4}{5}\delta) : \frac{2}{3}(1 + \frac{3}{5}\delta) - F$ :: $1 + \delta : 1$, de donde se saca facilmente el valor de F. Despreciaremos el quadrado de δ, ó el producto de F por δ, que es mucho menor que F, y tendremos $F =$

$\frac{2}{3}c$.

$\frac{2}{3}c \cdot \frac{4}{5}\delta$; esta es la espresion de la fuerza centrífuga, suponiendo conocido el aplanamiento de la Tierra. La fuerza centrífuga debajo del equador es $\frac{1}{289}$ de la pesantez (35). Llamemos φ el quebrado $\frac{1}{289}$, tendremos $\varphi = \frac{F}{E-F}$; porque F es á $E - F$, como la fuerza centrífuga es á la diferencia que hay entre ella y la pesantez. Si substituimos los valores de E y F en δ, y omitimos las potencias de δ, sacaremos $\varphi = \frac{4}{5}\delta$, ó $\delta = \frac{5}{4}\varphi = \frac{5}{4} \cdot \frac{1}{289} = \frac{1}{231}$. Luego el aplanamiento de la Tierra ha de ser $\frac{1}{231}$, en virtud de las leyes de la atraccion, si la Tierra es homogenea, y fue fluida en sus principios. Esta cantidad de aplanamiento discrepa poco de la que se saca de la observacion (359 y 360), y parece que la diferencia proviene de ser la Tierra mas densa ácia su centro que en la superficie. Podemos, pues, mirar esta conformidad entre el cálculo y la observacion como otra prueba del movimiento de la Tierra, y de la doctrina de la atraccion. Fig.

384 Despues de determinada la figura de la Tierra, determinaremos el diámetro del orizonte visible, ó del círculo que por todas partes limita en la superficie de la Tierra la vista de un observador. Desde luego es constante que el radio del orizonte visible será tanto mayor, quanto mas elevado fuere el sitio donde está el observador, porque si está en la cumbre de una montaña descubrirá mayor estension que si estuviera al pie. Supongamos que el observador esté en A, mas alto la cantidad BA que la superficie de la Tierra; la tangente AD es el rayo visual AD que termina 49.

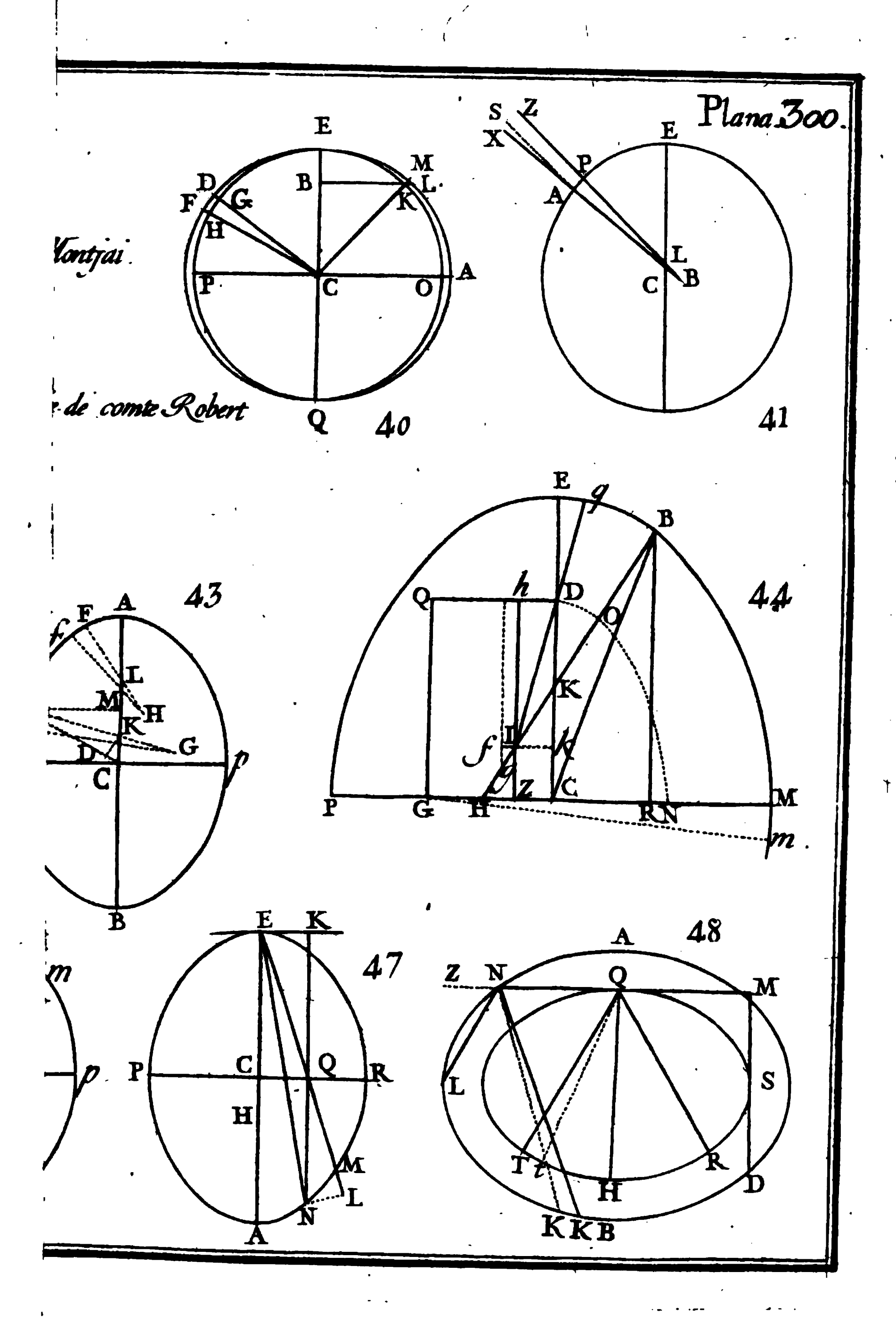
por

Fig. 49. por un lado el orizonte visible, cuyo semidiámetro es el arco *BD* que no discrepa sensiblemente de una linea recta por razon del mucho volumen de la Tierra. Se echa, pues, de ver que todo está en hallar el valor del ángulo *BCD*, cuya medida es el arco *BD*; y lo conseguiremos con resolver el triángulo *ACD*, rectángulo en *D* (I. 346), en el qual conocemos el lado *CD* igual al radio de la Tierra, y el lado *CA* igual al radio de la Tierra mas la altura donde está el observador; diremos (I. 664), pues, *CA* : *R* :: *CD* : sen *A*, cuyo complemento es el ángulo *C*, cuya medida es *BD*, arco de un círculo máximo de la Tierra. Se sabrá quantas toesas y leguas coge teniendo presente lo dicho (I. 505 y 786).

Se echa de ver que la resolucion rigurosa de esta cuestion pide, si lo mereciera, 1.° que se llevára en cuenta la refraccion; 2.° que se tomára el radio de la Tierra correspondiente á su aplanamiento, segun fuere la latitud del lugar donde está el observador.

De la longitud del Péndulo, y de una medida universal.

385 Este es el punto que dejamos pendiente en el Tomo Primero de este Curso (I. 679). Digimos allí que sería muy del caso una medida única é invariable que por razon de esta circunstancia mereciera hacerse universal, y que dejábamos para mas adelante manifestar lo que acerca de esto han discurrido varios Matemáticos. Quanto han propuesto se funda en la propiedad que gozan las vibra-


Plana 300.
Montjai.
de comte Robert
40
41
43
44
47
48

braciones de un péndulo (II. 252) de ser sensiblemente isócronas, porque siendo todas de igual duracion física, su número es muy á propósito para medir el tiempo y sus mas mínimos intervalos con suma precision. Con esta mira aplicó Huyghens el péndulo á los reloges, cuyo artificio los hizo mas perfectos, y les valió el nombre de reloges de péndola ó péndolas. Fig.

386 La esperiencia ha enseñado que no es una misma la longitud del péndulo de segundos en diferentes paralelos, que esta mengua desde los polos al equador, y que en París el péndulo ha de tener algo mas de 3 pies 8 líneas $\frac{1}{2}$ para que cada vibracion dure un segundo de tiempo. Despues de muchos esperimentos hechos con cuidadosa y sabia proligidad por Mr. de Mairan, Individuo y Secretario que fue de la Real Academia de las Ciencias de París, consta que la longitud del péndulo ha de ser allí de 3 pies 8 lin. $\frac{57}{100}$. La tabla siguiente dá á conocer su longitud en diferentes latitudes.

	Pulg.	lin.
Debajo del equador á 2434 toesas de altura	36	6,70
Debajo del equador á 1466 toesas	36	6,83
Debajo del equador á nivel de la mar	36	7,07
En Portovelo á 9° 34′ de latitud	36	7,16
En el Petit-Goave, Isla de Santo Domingo, 18° 27′	36	7,33
En el Cabo de Buena-Esperanza 33° 55′	36	8,07
En Ginebra 46° 12′, con el péndulo invariable	36	8,17
En París 48° 50′	36	8,57
En París, despues de hechas las reducciones	36	8,67
En Leyde 52° 9′	36	8,71
En Petersbourg 59° 56′	36	8,97
En Pello 66° 48′	36	9,17
En Ponoi, en Laponia 67° 47′	36	9,17

Las

Fig. Las observaciones del péndulo necesitan algunas correcciones por causa del calor que dilata los metales, de la resistencia del ayre, y de la altura donde se hacen respecto del nivel de la mar. Llevando en cuenta estas correcciones halló Bouguer que el péndulo debajo del equador ha de ser de 36 pulg. 7 lin. 21, y en París de 36 pulg. 8 lin. 67.

387 Sentado esto, si una medida determinada por este péndulo llegára á perderse, sería sumamente facil restituirla; todo se reduciría á colgar una bala de plomo de un hilo muy sutil, y buscar por medio de repetidos esperimentos quanto debería coger de largo este hilo para que siguiera con perfecto concierto las vibraciones de un relox de segundos bien arreglado. Se echa de ver que conseguida esta primera determinacion, sería igualmente facil y segura la de la espresada medida, aun quando ella y todos sus padrones se hubiesen perdido muchos siglos antes.

388 No se les escapó á los Matemáticos esta consecuencia, y les sugirió desde luego el pensamiento de buscar una medida fija é invariable. La Real Sociedad de Londres, Mouton y Picard, Astrónomos Franceses, y el célebre Holandés Huyghens, propusieron casi á un tiempo varios proyectos de una medida universal sacándola del péndulo de segundos. Pero no habia llegado todavía el tiempo de poner por obra ninguno de ellos, por carecer sus Autores de algunas luces indispensables para el acierto; creíase entonces que la longitud del péndulo de segundos

era

era una misma en toda la superficie de la Tierra. Richer, Individuo de la Real Academia de las Ciencias de París, notó el primero en la Isla de Cayena por el año de 1672 que en las inmediaciones del equador era indispensable acortar el péndulo para que señalára los segundos. La oposicion que entonces esperimentó la observacion de Richer, la han desvanecido enteramente las observaciones hechas en distintas latitudes de la zona tórrida por los sabios que pasaron allá á medir un grado terrestre, y las que hicieron en el círculo polar otros sabios enviados allá con el mismo destino (356). Quedó averiguado y constante que el péndulo de segundos es mas corto debajo del equador, y mas largo debajo del círculo polar que en París, y que por consiguiente un mismo cuerpo pesa en París menos que en Torneo, y mas que en Quito. Fig.

389 Una vez probada esta variacion de la longitud del péndulo de segundos segun se acerca ó aparta del equador, nos dá la naturaleza tantas medidas quantos círculos hay paralelos al equador, ó puestos en la circunferencia del meridiano; por consiguiente no hay motivo alguno para darle al péndulo del paralelo de París antes que al de otro lugar la preeminencia de medida universal. Esto se ignoraba quando se propusieron los primeros pensamientos; cada país, cada ciudad podría proponer con igual derecho el péndulo de su latitud. ¿En qué fundaremos, pues, la preferencia que nos es forzoso dar á alguno de ellos?

390 El lugar que en este punto merece la preferencia

Fig. cia es sin duda alguna el equador que está en medío de la Tierra, y es el término de la menor gravedad, el término desde el qual se cuentan las latitudes, término por otra parte único, y acerca del qual pueden conformarse las diferentes naciones. Verdad es que los polos son igualmente un término estremo; pero hasta el dia de hoy quedan burladas quantas tentativas han hecho los hombres para llegar á los polos, y tampoco sabemos si en ambos es una misma la longitud del péndulo. Y aun quando supusiéramos que lo sea, no podemos comprobarlo inmediatamente, solo podríamos inferirlo por analogía, y sin la seguridad que requiere tan esencial determinacion. Por consiguiente solo debajo del equador se puede observar con la correspondiente escrupulosidad la longitud del péndulo, y solo el equador dá al mismo tiempo un término fijo que no se puede confundir con otro ninguno.

391 La longitud del péndulo de segundos determinada en Quito por los espresados Matemáticos, se quedó depositada por acuerdo comun en aquella Ciudad, y estampada en un monumento duradero, con todas las precauciones imaginables, quales nunca se han tomado mayores para una operacion de esta naturaleza. La Condamine, uno de ellos, hizo empotrar y emplomar con unos gatillos curvos en una mesa de marmol blanco, de 5 pulgadas de grueso, una regla de bronce de un dedo de grueso, y de unos 3 pies y 1 pulgada de largo. La superficie esterior de esta regla, desbastada y limada á nivel del mar-

marmol, remata en cada estremo en un plano circular de Fig.
una pulgada de diámetro. Desde el centro del uno de los 50.
círculos al centro del otro se trazó en toda la longitud de la regla una linea profunda igual á la longitud del péndulo de segundos, qual se halló en Quito, es á saber, de 3 pies 6 lin. $\frac{83}{100}$. Como era indispensable, para dejar determinada con suma escrupulosidad esta medida, hacer muy sutiles, y al mismo tiempo muy perceptibles los dos puntos estremos, y era no menos indispensable resguardarlos del moho y del verdin; en el centro de cada uno de los dos círculos que terminan la regla de bronce, se encajaron dos clavos de plata de una linea de grueso, á manera de tornillo de cabeza perdida, y en el centro de cada tornillo de plata, una aguja de oro tambien atornillada. La aguja de oro, el clavo de plata de una linea, y el círculo de bronce de una pulgada, están limados á nivel de la piedra, y dejan ver el rastro de tres planos circulares y concéntricos de distintos metales y colores. Su centro comun que se podría hallar facilmente, aun quando llegára á borrarse, quedó señalado con un punzon de acero muy sutil. Por lo que mira á las alteraciones que el calor y el frio causan en los metales, no son de temer en Quito, cuyo clima es tan templado é igual, que el termómetro de Reaumur puesto al ayre y á la sombra señala comunmente todo el año á mediodía 14 ó 15 grados mas arriba del término de la congelacion, y muchas veces á la punta del dia, que es la hora del mayor frio, no

Fig. está sino tres grados mas bajo que á mediodia.

392 Aunque no se ha puesto hasta ahora en práctica el pensamiento de una medida universal única é invariable que acabamos de proponer, se han convenido los Matemáticos (I. 687) en mirar como tal el pie de Rey de París, ó la toesa que los Franceses llaman *del Chatelet de París*. Por este motivo, y porque nos hemos conformado con este convenio, daremos cuenta de las variaciones que se han notado en algunos tantos que de ella han sacado con toda la proligidad é inteligencia que caben, sabios de grandísimos créditos.

393 En el año de 1668 se reformó en París la antigua toesa de los Maestros de Obras, se la acortó 5 lineas, y se tuvo la precaucion de poner al pie de la escalera del gran Chatelet de aquella Ciudad un *Padron*, ó una barra de hierro terminada por dos eminencias ó redientes que se levantan perpendicularmente á la toesa, por entre los quales debia entrar ajustada una toesa; creyóse desde entonces que este era el medio mas seguro para que saliesen perfectamente iguales todas las toesas que se determinasen por este padron.

Auzout comparó con esta toesa las medidas estrangeras que en sus viages habia sacado por los originales. Picard en la obra que publicó el año de 1671 sobre la figura de la Tierra previene que la toesa que sirvió para sus operaciones, y á la qual ha dado la preferencia por ser la medida mas segura y usada en Francia, es la del gran Chate-

telet de París, sacada por el original restituido poco ha. Fig. Pero añade que para que no suceda con su toesa lo mismo que con todas las medidas antiguas, de las quales no queda mas que el nombre, la comparará con un original determinado por la misma naturaleza, y con este motivo habla de la longitud del péndulo que habia hallado, midiendola con la misma toesa, de 36 pulg. 8 lin. $\frac{1}{2}$. Finalmente concluye con decir: " La longitud del péndulo " de segundos, y la de la toesa del Chatelet de París, qua- " les las hemos señalado, quedarán custodiadas con cuida- " do en el magnífico observatorio, que de orden de S. M. " se está construyendo para promover los adelantamientos " de la Astronomía." No obstante, el padron del gran Chatelet, puesto, digámoslo así, á discrecion del público, se ha desgastado y alterado tanto, que desde el año de 1735 ya no podia determinar una medida fija y cabal. La toesa de Picard se habia perdido, la base que habia medido entre Villejuive y Juvisy (338), no estaba ya determinada como en otros tiempos, y el uno de sus estremos no se conocia, de modo, que no podia servir para dar á conocer la longitud de su toesa. Parece que podia suplirlo todo la longitud del péndulo que Picard habia hallado de 36 pulg. 8 lin. $\frac{1}{2}$; pero pudo padecer en esta determinacion una equivocacion de una milésima parte; no se buscaba entonces una precision tan particular, y parece con efecto que la toesa de que se valió Picard era como una milésima menor que la del dia de hoy, pues con esta se ha sacado la

Fig. distancia entre Brie-Comte-Robert y Montlhery 13$\frac{1}{2}$ toesas menor que quando la midió Picard (345). M. le Gentil le dijo en 1756 á Mr. de la Lande que habia visto una toesa de Casini algo mas larga que el padron del Chatelet; el padron de Canivet, famoso constructor de instrumentos de Matemática, que fue de su tio Langlois, artífice de igual reputacion, es tambien algo mayor que la toesa del Perú. El Abate la Caille tenia una toesa de Langlois, que le sirvió en el Cabo; pero se perdió en el año de 1756 quando la llevó á la Academia de las Ciencias para compararla con las demás toesas.

Quando se trató de hacer un viage á América para la medicion de un grado; la Condamine hizo hacer con muchísimo cuidado dos toesas de hierro por Langlois. Godin pasó á cotejar una de ellas con el padron del Chatelet con la exactitud que cabia en un modelo desfigurado al cabo de 65 años de servicio; la Condamine vió estas dos toesas en casa de Langlois, comprobadas con el mismo padron; y tambien se cotejaron en la misma Academia; se las aplicó, por medio de una lente, un compas de vara armado con dos puntas, bien que en este método se puede padecer una equivocacion de $\frac{1}{25}$ de linea; tambien se compararon una con otra, arrimándolas encima de una mesa, y las dos caras de cada estremo, tentándolas y mirándolas con una lente, siempre parecieron perfectamente continuas.

Mairan habia encargado á Langlois algunos meses antes una toesa para egecutar sus esperimentos acerca del pén-

du-

dulo simple; *es una regla* (son sus palabras) *en todo seme-* Fig.
jante á la que se ha llevado al Perú. Camus y Bouguer aseguraron en 1756 á la Academia, el primero como testigo de vista, el otro por habérselo oido cien veces á Godin, que la toesa del equador y del círculo polar se habian comparado exactamente con la de Mairan, despues que las hubo hecho todas tres Langlois, igualmente que otra que se envió á Londres. Sin embargo la Condamine no se acordaba, ni de que la toesa de Mairan se cotejase con la del Perú en la Academia en 1735, ni de haberle oido á Godin que las hubiese confrontado, pero tenia muy presente que la del Perú se cotejó con la que se habia de quedar en París.

Maupertuis se llevó algunos meses despues al norte esta vara que la Condamine destinó para que quedase depositada; no quedaba en París mas que la de Mairan que se suponia cabalmente igual con las otras dos, por haberlas hecho todas tres un mismo artífice.

394 Sin embargo, quando en el año de 1756, esto es al cabo de 20 años se juntaron otra vez y compararon unas con otras estas tres toesas, se halló que la toesa del equador era $\frac{1}{20}$ ó $\frac{1}{30}$ de linea mas larga que la del norte, y la de Mairan $\frac{1}{15}$ de linea mas corta, por manera que hay como unos $\frac{8}{75}$, ó mas de una décima de linea de diferencia, en 864 lineas, entre la toesa de Mairan y la del equador.

Para dar razon de esta diferencia se dijo que la embarcacion en que estaba la toesa del círculo polar, naufragó á la vuelta en el golfo de Bothnia; la toesa se cu-

Fig. brió de orin, y es de creer que al limpiarla se la acortó algo. No obstante, sostuvo Camus en la Academia el dia 3 de Julio de 1756 que esta toesa no habia padecido ninguna alteracion; pero confesó que habia puesto el padron á la lumbre; que la toesa no cabia en él, y que el dia 28 de Junio de 1756 se habia limado el padron, á fin de que entrára la toesa antes de valerse de ella en la medicion del dia 1 de Julio de 1756; hay, pues, motivo para creer que esta toesa del norte pudo en sus principios ser igual con la del equador.

La toesa de Mairan se ha conservado con todo cuidado y la mayor escrupulosidad, es constante que no se la ha acortado; es, pues, preciso que desde su principio no fuese igual con las demas. No hay apariencia de que el calor de la zona tórrida, ni los embates en los viages hayan hecho la toesa del equador mas larga de lo que era; se ha mantenido constantemente en un estuche muy sólido, y el calor es muy poco en Quito (392). Esta toesa se restituyó á París en 1748 dentro de un estuche de madera forrado de sarga; ha estado depositada mucho años en el Gabinete del Jardin Real de aquella Corte, hasta que el dia 8 de Agosto de 1770 se depositó en la Academia; se mantiene muy bien conservada y entera, y las esquinas no han padecido la mas leve alteracion.

El corte que determina la longitud de la toesa del equador no es puntualmente perpendicular á dicha longitud;

tud; estos cortes entran algun poco ácia el fondo donde Fig.
forman una toesa mas corta; pero su parte esterior es la que se ha escogido para la verdadera longitud de esta toesa; todos los padrones se han hecho de modo que el principio de dichas aristas entra en ellos rozando, pero sin violencia.

Por una Pragmática del Rey de Francia del día 16 de Mayo de 1766 se le mandaron hacer á Canivet unas 80 toesas parecidas á la del equador, que se enviaron á las principales Ciudades de aquel Reyno; se ha depositado en la Secretaría del Chatelet, se ha enviado á Viena donde el P. Liesganig la ha usado para sus medidas del grado en Ungria y Austria, el P. Becaria se ha servido de la misma para medir un grado terrestre en el Piamonte, y á ella ha reducido Mr. Maskelyne la medicion egecutada en la América Inglesa.

395 A esta toesa del equador la hacen recomendable el uso que de ella hicieron tres célebres Individuos de la Real Academia de las Ciencias de París, para medir los tres primeros grados del meridiano (353), y la longitud del péndulo en diferentes países (386). Como no hay ningun motivo para temer que haya padecido alteracion, habiéndose depositado el original en la Academia, y copiado mas de cien veces, cree Mr. de la Lande que debe servir de regla, y con ella compara las demas medidas en la tabla que copiaremos dentro de poco. Para este fin se deben rebajar 7 toesas del grado de Italia que se valuó por la

Fig. toesa de Mairan; se deberían rebajar 3 toesas del grado del norte, en el supuesto de que la toesa del círculo polar discrepase $\frac{1}{25}$ de linea de la del equador, al tiempo mismo que se egecutó la medicion del norte, cuyo supuesto no es verisimil; pero se han de rebajar 0,05 de la medida del péndulo que egecutó Mairan (386), que se reduce á 440 lin. 52, y 3 toesas del grado que en 1756 se infirió de la base de Villejuive (347).

Esta variedad é incertidumbre en la toesa no parecerá estraña á los que saben quan dificultoso es valuar cantidades tan cortas; la misma duda ha habido en Inglaterra donde el padron depositado en la Real Sociedad de Londres discrepa del de Mr. Bird, y mucho mas del que Graham comparó con la toesa Francesa.

396 A la toesa de París, medida tan conocida de todos los Sabios, referiremos las principales medidas de Europa.

Ta-

Tabla de las principales medidas de Europa antiguas y modernas, reducidas á toesas, pies, pulgadas, lineas y decimales de linea, medida de la Real Academia de las Ciencias y del Gran Chatelet de París.

	toesas		
La milla Romana que cita Plinio	757,5		
La milla Romana de Estrabon, segun Casini (*M. ac.* 1702)	766		
La milla moderna de Roma, segun el Ab^te^. Boscovich.	764		
La milla de Italia de 60 al grado	958		
La milla de Inglaterra	830		
El *Lí* de los Chinos que es la 193^ma^ parte del grado..	295		
El estadio de los antiguos Romanos, de 623 pies rom.	94,693		
El estadio Egipcio, segun Freret y Mr. le Roy (*Ruines des Monumens de la Gréce*)	114,13	pulg.	lin.
El pie de los antiguos Romanos (*Mem. Acad.* 1757)		10	10,90
El pie Griego sacado del Capitolio, por Auzout		11	3,80
El pie Griego, segun Mr. le Roy		11	4,56
El pie Arabe (*Antig. mém. de l'Acad. Tom. VI. pag.* 532)		9	10,72
El pie de Alejandría. *Ibid*		13	2,90
El codo de los Hebreos, segun Eisenschmid		19	10,40
El pie de Inglaterra (*Philos. trans.* 1768. *pag.*326)		11	3,1154
El pie del Rhin, de Leyde, y de Dinamarca, segun Lulofs....		11	7,183
El pie de Bolonia, decima parte de la *Percha*, segun Auzout..		14	0,60
El pie de Turín, segun el Padre Beccaria		18	11,70
El *Braccio da panno* de Florencia, segun el Ab. Ximenez		21	6,454
El pie de Venecia, segun Christiani (*Delle misure d' ogni genere*)..		12	10,0
El pie de Padua, segun Christiani		15	9,9
El pie de Viena, en Austria, segun el Abate Hell		11	8,117
La vara de Castilla (*Mém. Acad.* 1747)		30	11,0
El palmo romano moderno, segun el Abate Boscovich		8	3,033
El palmo de Napoles, segun Auzout		9	8,15
El pie de Suecia (*Mém. Acad.* 1714)		10	11,75
El arquin de Rusia, por los m. s. de del' Isle		26	6,30
El pie real de la China, *ing-cao-chi*, ó *ing-ts'ao-tchi* (*Observ. astron. Pekini factæ*, *Tom.I. pag.* 363)		11	9,9

Del

Fig.

Del Flujo y Reflujo del Mar.

397 Damos el nombre de *Flujo y Reflujo del mar* á un movimiento de sus aguas muy reparable, que por razon de tres circunstancias muy señaladas que le acompañan, distinguimos en movimiento diario, mensual y anuo. En virtud del movimiento diario las aguas del Occeano suben y bajan dos veces cada dia; quando suben se llama la *Plena mar* ó el *Flujo*, y quando bajan *Reflujo.* El flujo y reflujo son mayores en los sicygies que en las quadraturas; y este es el movimiento mensual. Finalmente, como las mareas son mayores en invierno que en verano, de esta circunstancia se origina el nombre de movimiento anuo que se les dá á las aguas del Occeano.

398 El movimiento diario del Occeano se concluye en el discurso de unas 24 horas solares y 48 minutos, que es el tiempo mismo que gasta la Luna en restituirse al meridiano de un lugar qualquiera de la tierra. De aquí proviene que la máxima elevacion de las aguas del Occeano se verifica quando la Luna vuelve á una situacion determinada respecto del meridiano; pero la hora solar en que se verifica la marea cada dia, se atrasa casi lo mismo que el regreso de la Luna al meridiano de dicho lugar. Hay, pues, tal correspondencia entre las mareas y el movimiento de la Luna, que segun las observaciones de Casini, se debe atender á la hora en que se verifica la verdadera conjuncion ú oposicion del Sol, y á la equacion del movi-

vimiento lunar, para determinar con toda puntualidad el Fig. tiempo que la marea será máxima el dia del novilunio ó plenilunio. Las dos mareas que hay cada dia no siempre son iguales; las de por la mañana son mayores que las de por la tarde en Invierno, y menores en el estío, particularmente en los sicygies de los luminares.

399 Acerca del movimiento mensual de las aguas del mar, hay tres circunstancias que notar: 1.° las mareas son máximas cada mes poco despues de los sicygies del Sol y de la Luna, menguan quando la Luna pasa á las quadraturas, y poco despues son mínimas. Es tanta la diferencia, que en un mismo mes la mayor elevacion de las aguas es á la mínima, segun algunas observaciones, como 9 á 5, cuya diferencia es á veces todavía mayor 2.° las mareas son tanto mayores, siendo todo lo demas igual, quanto menor es la distancia de la Luna á la tierra, y en razon mayor que la inversa de los quadrados de las distancias, segun consta de varias observaciones. En el año de 1713, por egemplo, el dia 26 de Febrero la marea fue en Bristol de 22 pies 5 pulgadas, y el dia 26 de Marzo de 18 pies 2 pulgadas. La declinacion de la Luna fue casi una misma en cada observacion; en la primera la distancia de la Luna era de 953 partes, y de 1032 en la segunda. El quadrado de 1032 es al quadrado de 953, como 22 pies 5 pulg. á 19 pies $1\frac{2}{5}$ pulg. y el flujo del mar en la segunda observacion no pasó de 18 pies 2 pulg. 3.° Las mareas son mas grandes, siendo todo lo demas

igual,

Fig. igual, quando la Luna está en la equinoccial, y menguan al paso que va creciendo la declinacion de la Luna.

400 Las mareas son tanto mas grandes, siendo todo lo demas igual, quanto menos dista el Sol de la tierra, y por consiguiente, siendo todo lo demas igual, mayores en invierno que en verano. Por egemplo, las distancias de la Luna perigea fueron las mismas el dia 19 de Junio de 1711, y el dia 28 de Diciembre de 1712; la marea fue el primer dia de 18 pies 4 pulg. y el segundo de 19 pies 2 pulg. siendo en la última observacion algo menor la declinacion de la Luna que en la primera.

Finalmente, las mareas son diferentes en parages distintos, segun su diferente latitud y situacion respecto del Oceano desde el qual se propagan, y segun la naturaleza de las orillas, de los estrechos, &c.

401 Qualquiera que considere siquiera con mediana atencion los movimientos de la mar, echará de ver que tienen mucho enlace con el movimiento de los luminares, y de la Luna en particular. El periodo del movimiento diario del Oceano es el mismo que el del regreso de la Luna al meridiano del lugar, el mismo que el del movimiento mensual de la Luna respecto del Sol: el influjo de los dos luminares en este fenómeno se manifiesta, porque las mareas son tanto mayores, quanto menos distan de la tierra los dos astros; por manera que hay muchísimo fundamento para discurrir que el movimiento del Oceano pende del movimiento de ambos. ¿Pero qual es la

la fuerza que desde el Sol y la Luna es causa de que las aguas suben y bajan dos veces al dia? hace que se auxilian una á otra en los sicygies de los dos luminares, y se destruyen en las quadraturas? son mayores en las menores distancias, y menores en las mayores distancias? mas poderosas quanto menor es la declinacion de la Luna, y menos eficaces quando es mayor esta declinacion y algunas veces causan una marea mayor quando el Sol? y la Luna están debajo del orizonte, que quando ambos están en la periferia superior del meridiano. Fig.

402 Algunos filósofos lo atribuyeron, en virtud de esta gran correspondencia entre las mareas y el movimiento de la Luna, á una presion con que este satélite obra en las aguas del Oceano. Pero no determinaron en que consistía esta presion, ni se atrevieron á calcular su actividad.

403 Lo primero que hemos de demostrar, es que la atraccion del Sol ó de la Luna considerada separadamente, obrando en una capa de fluido muy delgada que rodea un globo, ha de hacer que dicho fluido forme una figura elíptica (378); es muy facil de aplicar esta proposicion á las mareas, para lo qual basta atender á tres cosas. 1.° La fuerza de la Luna en los diferentes puntos de la tierra es proporcional á la distancia de cada punto, al plano perpendicular al rayo lunar (219); es por lo mismo proporcional á lineas paralelas al ege mayor de la elipse, que debe naturalmente dirigirse ácia la Luna; 2.° La fuerza centrífuga que consideramos quando

tra-

Fig. tratábamos de la figura de la tierra, era tambien paralela al ege mayor de la elipse del meridiano en los diferentes puntos de la tierra (34 y 381). 3.° Una fuerza que obra de este modo por lineas paralelas, en los diferentes puntos de una esfera, y cuya intensidad es proporcional á las mismas lineas, transforma la esfera en una elipse cuyo ege mayor es paralelo á la direccion de esta fuerza estraña (381).

Por este motivo las aguas se levantan no solo ácia el lado donde está el astro que las atrahe, mas tambien ácia el lado opuesto; porque si el astro atrahe las aguas superiores mas de lo que atrahe al centro de la tierra, tambien atrahe al centro de la tierra mas que á las aguas inferiores, y estas se quedan atrás respecto del centro, tanto como las aguas superiores se adelantan ácia el astro que las atrahe. Y como todos los círculos de la tierra cuya seccion comun se dirige ácia la Luna toman la misma figura, de aquí se origina un elipsoide prolongado.

El grado de elipticidad de este esferoide es igual á $\frac{5}{4}$ de la fuerza perturbatriz en el punto donde es máxima (383); por consiguiente, despues que tengamos determinada la fuerza atractríz, la multiplicaremos por $\frac{5}{4}$ para sacar el aplanamiento que esta fuerza causa, quiero decir, la diferencia de los semieges.

La fuerza perturbatriz del Sol en las aguas del Occeano en el punto donde es máxima, es igual á la masa del Sol multiplicada por 3, del mismo modo que en la teóri-

ca

ca de la Luna, y dividida por el cubo de la distancia del Sol, ó multiplicada por el cubo del seno de la paralaxe del Sol (219). Por consiguiente si suponemos la masa del Sol 307831 (107), su paralaxe 9″, y el radio medio de la tierra 3290200 toesas (370), hallaremos que el aplanamiento de este esferoide es de 22 pulgadas y $\frac{7}{10}$, esta es la cantidad que la fuerza del Sol puede por sí sola levantar las aguas del mar debajo del equador, conforme lo probaremos dentro de poco por cálculo. Veremos muy en breve que la Luna puede causar una elevacion tres veces mayor, y esto vendria á ser 8 pies de marea en un mar libre; pero esta elevacion suele ser menor por causa de la resistencia del fondo, porque no pasa de tres pies en la Isla de Santa Helena, en el Cabo de Buena Esperanza, en las Filipinas y las Malucas; y alguna vez es mayor por razon de la figura de las costas, pues en S. Maló se ven mareas de 70 pies y aun mas. Fig.

Elevacion total del agua.	
Masa.................	5488312
(sen 9″) 3..........	6919452
Radio de la tierra..	6517222
3..........	0477121
72..........	1857332
$\frac{3}{4}$..........	0096910
22p 7.......	1356349

404 El vertice de este élipsoide no se dirige puntualmente ácia el Sol ó la Luna, porque se ha observado que la marea no se verifica hasta $2\frac{1}{2}$ horas despues que los luminares han pasado por el meridiano en los mares libres. Así, quando habláremos en lo que sigue, del astro que causa la marea, lo que digeremos se deberá entender de un punto que esté como unos 35° mas orien-

Fig. oriental que el lugar verdadero del astro.

405 En una elipse poco aplanada los excesos de los radios respecto del semiege menor son como los quadrados de los senos de las distancias al ege menor (362); por consiguiente como el esferoide aqueo dá succesivamente con el Sol la vuelta á la tierra, los países situados debajo del ege mayor serán inundados, los que estuvieren debajo del ege menor tendrán la marea baja, y la diferencia entre el reflujo y la altura del agua para un momento qualquiera será el exceso de uno de los radios respecto del ege menor de la elipse.

Luego la altura de la marea respecto del reflujo, en un lugar qualquiera, es igual á la altura máxima del agua multiplicada por el quadrado del coseno de la distancia del observador al vertice del elipsoide, ó de la distancia entre el zenit del lugar y el astro que causa la marea, suponiendo el elipsoide dirigido al astro mismo; por consiguiente el reflujo se verifica quando el astro está en el orizonte, y el flujo quando el astro está en el meridiano.

Síguese de aquí que si el lugar propuesto y el astro que causa la marea están ambos debajo del equador, la altura de la marea será como el quadrado del coseno del ángulo horario; y la elevacion crecerá con corta diferencia como los quadrados de los tiempos en las inmediaciones del meridiano, y lo confirman las observaciones.

Si el lugar propuesto estuviere distante del equador, la

la altura de la marea será como el quadrado del coseno Fig.
de la latitud; pero asi que la latitud es tanta que la Luna no se pone en ciertos tiempos, no hay mas que una marea en las 24 horas; porque la Luna no se acerca mas que una vez al orizonte. Debajo del polo no hay marea diurna, pues la Luna se mantiene sensiblemente todo el dia á una misma distancia del zenit, y el esferoide aqueo dá la vuelta, sin levantarse á una hora mas que á otra. En los demas casos hay dos mareas, la una corresponde con poca diferencia al paso superior de la Luna por el meridiano, la otra al paso inferior; pero son desiguales.

Si el astro no está en el equador, la marea respecto de un país situado debajo del equador será como el quadrado del coseno de la declinacion, porque esta declinacion será la distancia misma del astro al zenit, ó la distancia del punto dado al vertice del elipsoide. Si el lugar dado no estuviere debajo del equador, la marea superior será la mayor, segun la teórica, quando el astro pasare mas cerca del zenit; quiero decir, quando la declinacion del astro fuere del lado del polo elevado; pero la marea inferior será menor que quando el astro estaba en el equador, porque el punto opuesto al astro estará mas distante del zenit que el equador, quando el astro estuviere en la parte inferior del meridiano.

Se observa sin embargo en Europa que las mareas son mayores en general en los equinoccios que en el solsticio estivo; esto proviene probablemente de algunas circuns-

Fig. tancias particulares. 1.° Los vientos del sur y oeste son entonces mas frecuentes y mas recios. 2.° la marea del solsticio está mas comprimida entre los continentes de Africa y América, que la de los equinoccios; puede, pues, ser menos sensible en nuestras costas. 3.° en los solsticios hay dos mareas, la una fuerte y la otra debil que se compensan mutuamente, siendo así que en el tiempo de los equinoccios hay dos mareas casi iguales, cuyo efecto total es mas reparable. Sin embargo no es generalmente cierto, como algunos aseguran, que las mareas de los equinoccios sean las mayores de todo el año.

406 Si la fuerza del Sol puede levantar la superficie de las aguas del Occeano en forma de esferoide prolongado cuyo vértice se dirige ácia el Sol, la Luna ha de obrar el mismo efecto; y esta es la razon por que las mareas que se observan van arregladas á los movimientos del Sol y de la Luna. En los sicygies, esto es, en los novilunios y plenilunios, el esferoide aqueo que causa la atraccion del Sol y el que causa la fuerza de la Luna, se dirigen ácia un mismo lado; por este motivo la prolongacion del esferoide es igual á la suma de las prolongaciones que el Sol y la Luna pueden causar separadamente. Pero en las quadraturas los eges de estos dos esferoides son perpendiculares entre sí, y el ege mayor del esferoide solar aumenta el ege menor del esferoide lunar. Por consiguiente las mareas de los sicygies son la suma de los efectos del Sol y de la Luna, siendo así que las mareas de las quadratu-

turas son su diferencia. Luego las alturas de las mareas pueden darnos á conocer la razon entre la fuerza del Sol y de la Luna. Fig.

Quando la Luna es apogea su fuerza mengua conforme crece el cubo de su distancia (136), por manera que si la fuerza media de la Luna es $2\frac{1}{2}$, la fuerza máxima en el perigeo será 3, y la mínima = 2 no mas, en el apogeo. Con efecto, la razon entre los cubos de las paralaxes estremas, ó de 53′ 51″, y de 61′ 29″ es casi la de 2 á 3.

La razon entre los cubos de las distancias del Sol á la tierra en estío é invierno es la de 1 á 1, 106; luego la fuerza del Sol es una decima parte mayor en invierno, y si de los 22 ó 23 pies de marea que hay en Brest quando la Luna es perigea, los $5\frac{3}{4}$ provienen de la fuerza del Sol, ha de haber en invierno 7 pulgadas de elevacion mas que en verano, solo por razon del efecto de las distancias del Sol á la tierra.

407 Hasta aqui solo hemos considerado las mareas de los sicygies y las quadraturas; veamos lo que pasa en los tiempos intermedios. Quando la Luna y el Sol están á alguna distancia una de otro, cada uno causa una elevacion diferente en un lugar dado, y la suma de estas dos elevaciones es la altura de la marea que hemos de determinar. Por ser la fuerza de la Luna dos ó tres veces mayor que la del Sol, el punto de la plena mar se acerca dos ó tres veces mas á la Luna que al Sol, y nunca dista 15° de la Luna. Por esta razon el paso de la Luna por

Fig. el meridiano és lo que mas influjo tiene en el tiempo de la marea alta; y así la diferencia entre el paso de la Luna y el instante de la marea alta nunca pasa de $63'$, aun quando la Luna es perigea y está á $60°$ del Sol. Vamos á determinar el máximo de esta diferencia entre el paso de la Luna y la marea alta, y la determinaremos por el cálculo astronómico, haciendo algunas falsas posiciones, respecto de todas las distancias del Sol á la Luna.

51. Sea C el centro de la tierra; S, el Sol; L, la Luna; H, el punto de la marea alta; LS, la distancia del Sol á la Luna que suponemos de $60°$; LH, la distancia de la Luna al punto de la marea alta; si llamamos 1 la altura de la marea mas alta que causa la fuerza sola del Sol, será $\cos SH^2$ la altura que el Sol obrare en H (405), y $3 . \cos LH^2$ la altura que causare en H la fuerza de la Luna perigea. Si suponemos LH de $9°$ y SH de $41°$, sacaremos estos dos términos 0,3961 y 2,9266; será, pues, 3,3227 la altura total de la marea. Si suponemos $9° \frac{1}{2}$, tendremos 2,9183 y 0,4046, cuya suma dá la marea 3,3229. Suponiendo $10°$, sacaremos 2,9095 y 0,4132 que dá la marea 3,3227; bien se percibe que el máximo de su suma está en $9° \frac{1}{2}$; esta es la altura máxima de la marea quando el Sol y la Luna distan $60°$ uno de otra, y la Luna es perigea. Para determinar quanto tiempo antes que la Luna ha de pasar por el meridiano el punto H, consideraremos que siendo entonces de $1^h\ 6'$ el atraso diario de la Luna, los $9° \frac{1}{2}$ hacen $40'$ de tiempo; por consiguiente

la

la marea alta se verificará 40′ antes del paso de la Luna por el meridiano. Quando la Luna es apogea y su fuerza dupla no mas de la del Sol, el *máximo* correspondiente á 60° de distancia es de 2,3660, y este punto está á 15° de la Luna; estos 15° componen $62'\frac{3}{4}$ de tiempo lunar. Fig. 51.

Esta diferencia entre el paso de la Luna por el meridiano y la hora de la marea puede tambien servir para averiguar la razon entre las fuerzas del Sol y de la Luna (113). Supongamos que en las distancias medias SH corresponda á 34′ de tiempo, y que HL sea de 14′; es facil de probar que estas dos cantidades están en razon inversa de las fuerzas del Sol y de la Luna, de donde resultará que entre estas fuerzas habrá la misma razon que entre 14 y 34, ó que entre 1 y $2\frac{1}{2}$ con corta diferencia. Para probar que HL es á SH como la fuerza del Sol es á la de la Luna, espresaremos esta razon con el número m: la altura en H es $\cos SH^2 + m . \cos HL^2$ (405), ó $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2SH + \frac{m}{2} + \frac{m}{2}\cos 2HL$ (II.398). La diferencial ha de ser (III.401) igual á cero, quiero decir (5), que $\text{sen}\, 2SH . dSH + m . \text{sen}\, 2HL . dHL = 0$; pero $dSH = - dHL$, pues SH crece tanto como LH mengua; luego $2SH = m . \text{sen}\, 2HL$; y como en los arcos pequeños los senos son proporcionales á los arcos, tenemos $SH = m . HL$.

408 De todo lo dicho hasta aquí resulta una regla general para calcular la altura de la marea en un lugar y tiempo qualquiera. Es preciso hallar 1.° el lugar del Sol y

Fig. de la Luna, y sus distancias á la tierra. 2.° calcular sus declinaciones, sus alturas para el lugar dado (VII.442), suponiendo el ángulo horario $3^h \frac{1}{4}$ mayor si fuere en Brest, 6^h en S. Maló ó en Plymouth &c. mas ó menos segun la hora del puerto, de la qual se halla una tabla en los libros de nautica. Quando esta altura calculada fuere cero, será marea baja para aquel lugar, porque el vertice del esferoide estará en el orizonte. En los demas casos, el quadrado del seno de dicha altura del vertice del esferoide aqueo, multiplicado por el efecto máximo de la Luna á la distancia dada (406), dará la altura de la marea, ó la diferencia entre la mas baja marea lunar y la que se verifica en el instante dado; se hará el mismo cálculo para el Sol, y se sumarán una con otra las dos alturas para sacar la marea total.

409 Bueno es referirla al punto fijo ó al nivel natural para combinarla con la del Sol, refiriéndola al mismo nivel; pero para determinar este punto de nivel, hemos de demostrar primero la siguiente proposicion.

La altura del agua ácia el vertice del esferoide aqueo es dupla de su depresion á 90° de allí, contando una y otra desde el término natural ó del nivel en que estarían las aguas si no hubiese marea. Porque si guardamos las mismas denominaciones que en lo dicho (22), sacaremos $x = \frac{1}{3}\beta$, esta es la depresion ácia el ege menor; luego la elevacion ácia el ege mayor es $\frac{2}{3}\beta$. El punto donde el globo corta el elipsoide está á 54° 44′ del

del ege mayor, porque es preciso que el quadrado del coseno de esta distancia sea $\frac{1}{3}$, y la raiz de $\frac{1}{3}$ es el coseno de $54^{\circ}\ 44'$. Así, quando se quiere tomar un punto fijo para comparar con él las alturas del agua, se debe tomar mas arriba de las aguas bajas, la tercera parte no mas de la diferencia entre la marea baja y la marea alta, á fin de que la subida sea dupla de la bajada en los sicygies. En Brest hay 23 pies de marea en los casos mas favorables, el tercio es 7 pies 8 pulgadas, esta es la altura del nivel natural de la mar mas arriba de las aguas bajas. Fig. 51.

Como en las mareas de las quadraturas la altura total es la diferencia de los efectos de la Luna y del Sol, si la llamamos l y s tendremos $\frac{2}{3}l - \frac{1}{3}s$ para la elevacion de las aguas, y $\frac{1}{3}l - \frac{2}{3}s$ para su depresion; pende, pues, la razon que entre ellas hay de la que hay entre las fuerzas l y s. Si esta razon fuere (406) la de 5 á 2, la elevacion de las aguas mas arriba del punto fijo será 8 veces mayor que su depresion, porque substituyendo en lugar de l su valor $\frac{5}{2}s$, la primera cantidad será $\frac{24}{18}$, y la segunda $\frac{3}{18}$ no mas.

410 Si la atraccion es la causa de las mareas, dicen algunos, debería obrar en los mares pequeños igualmente que en los grandes; esto nos pone en la precision de probar que la marea ha de ser insensible en los mares cortos. Supongamos que *SX* sea el globo terrestre, *ABY* el esferoide aqueo que se formaría si el mar fuera libre y cubriera toda la tierra; si hay un corto espacio de mar

Fig. que no tenga mas ancho que *ZX* de oriente á occidente,
51. las aguas no podrán tomar la curvatura *YS*; porque como no hay al rededor aguas que ocupen el lugar de las que se levantarían, las es preciso tomar una curvatura semejante á *OR*, de modo que *YO* sea igual y paralela á *SR*, siendo la superficie *COR* siempre igual á la superficie *CZX*. Esto manifiesta, sin acudir al cálculo, que la marea será allí tanto menos reparable quanto menos cogiere el mar en longitud, pues la superficie del triángulo *ZCX* mengua como *ZX*, y la inclinacion de las lineas *OR*, *ZX* jamás puede ser mayor que el ángulo que forman en *M* la elipse y el círculo.

Síguese tambien que la plena mar se verifica allí mismo quando la distancia *DM* del astro al lugar dado es de unos 54°, porque en *M* está la inclinacion máxima, y á los 54° del vertice *B* está la interseccion del círculo con la elipse (409).

Tambien manifiesta todo lo dicho que en un mar angosto quando el agua se levanta ácia la orilla *R*, baja ácia la orilla opuesta *O*.

Cómo se halla la diferencia de longitud entre los diferentes lugares de la Tierra.

411 Para formar una pintura cabal de nuestro globo, es preciso colocar en el mapa los diferentes puntos de la Tierra con la misma situacion unos respecto de otros que tienen en la superficie de la Tierra. Esto se consigue deter-

terminando su latitud y longitud, pues un lugar qualquiera está en la interseccion del paralelo con el meridiano que le corresponde. Como la determinacion de la latitud tiene poco que hacer, y hemos dicho quanto ocurre (VII. 162 y sig.) acerca de esto, nos detendremos en declarar con individualidad las operaciones por cuyo medio se averigua la diferencia de los meridianos ó de longitud (VII. 166 y sig.) entre los diferentes puntos de la Tierra. Fig.

412 No hay para esta determinacion método mas seguro que el de los eclipses del Sol ó de las estrellas; solo tiene el inconveniente de que su práctica requiere cálculos muy prolijos.

413 Quando se ha observado el principio y fin de un eclipse de Sol, la inmersion y emersion de una estrella que la Luna oculta, ó la de un planeta, se debe inferir el tiempo de la conjuncion verdadera; y en conociendo el tiempo de la misma conjuncion para cada uno de los dos paises, la diferencia de los tiempos es con evidencia la de los meridianos. Este método es el mas directo, el mas sencillo y el mas seguro, y pensamos que no se debe usar otro. Le aplicaremos calculando un eclipse de estrella, porque dá motivo á algunas consideraciones mas que un eclipse de Sol; pero no omitiremos las correcciones que respecto de estos son indispensables.

414 Sea *S* el Sol ó la estrella que padece eclipse; 52.
L, la situacion aparente del centro de la Luna, respecto del Sol al principio del eclipse; *F*, el lugar aparente del cen-

Fig. 52. centro de la Luna en el instante de la emersion; *LF*, el movimiento aparente de la Luna respecto del Sol mientras dura el eclipse; *GHI*, un arco de la eclíptica; *DSE*, un paralelo á la eclíptica que pasa por el centro del Sol ó de la estrella. Si *FA* fuere paralela á *DE*, tendremos el movimiento aparente en latitud *AL*, y el movimiento relativo aparente en longitud *FA* en un arco de círculo máximo; este arco se confunde sensiblemente con el paralelo á la eclíptica, pero es algunos segundos menor que el arco *GI* de la eclíptica; y esto es lo primero que se debe determinar.

415 Las tablas dan la hora de la conjuncion verdadera, calculada, igualmente que las longitudes y latitudes verdaderas de la Luna, y del astro eclipsado al principio y al fin del eclipse. Se calcula para los mismos instantes la diferencia de las paralaxes en longitud y latitud, por los métodos declarados (VII. 861 y sig. y 1075); se añade cada paralaxe á la longitud verdadera, ó se resta segun los casos especificados (VII. 871), y quedan determinadas las longitudes aparentes ó afectas de la paralaxe, cuya diferencia es el movimiento aparente de la Luna en la eclíptica; de esta cantidad se resta el movimiento del Sol, ó del astro que padece eclipse; si fuere retrogrado se suman con ella, y sale el valor de *GI*, movimiento relativo aparente en la eclíptica.

Se aplica igualmente la diferencia de las paralaxes en latitud para cada uno de los dos instantes, á la latitud verdadera de la Luna calculada por las tablas (ó á su distancia

al

al polo boreal de la eclíptica), y se sacan las latitudes aparentes *IL*, *GF*, al principio y al fin del eclipse; la diferencia de estas latitudes aparentes ó su suma, si la una fuese austral y la otra boreal, es el movimiento aparente de la Luna en latitud; de este se resta el movimiento en latitud del astro eclipsado, si su latitud varía en la misma direccion que la de la Luna, y se saca el valor de *AL*. Se multiplica la diferencia de las longitudes aparentes, esto es *GI*, por el coseno de la latitud aparente que tiene un medio entre las latitudes *IL* y *GF* (VII. 54), y se saca el valor del movimiento *FA* medido en la region del eclipse; es menor que el movimiento en la eclíptica. Fig. 52.

416 En el triángulo *FAL* rectángulo en *A*, conocemos los dos lados *FA* y *AL*, hallaremos la hypotenusa *FL* diciendo: El movimiento en longitud en la region de la estrella es al movimiento en latitud, como el radio es á la tangente de la inclinacion de la *órbita aparente* (VII. 1031), ó del ángulo *LFA*. El coseno de la inclinacion aparente es al movimiento aparente en longitud, en la region de la estrella, como el radio es al movimiento aparente *FL* en linea recta, en la órbita aparente de la Luna respecto del astro *S*, que siempre se supone inmobil mientras dura el eclipse.

En el triángulo *LSF* conocemos tres lados, el movimiento aparente *FL* en linea recta, la suma de los semidiámetros de la Luna y del astro eclipsado, teniendo el de la Luna un aumento por razon de su altura sobre el orizon-

Fig. 52. zonte (VII. 833), rebajando de esta suma $4''\frac{1}{2}$ por causa de la inflexion de los rayos *; la suma de los semidiámetros para el principio será *SL*, y para el fin será *SF*. Se buscarán los ángulos *SLF* y *SFL*, empezando por la siguiente analogía: El movimiento *FL* es á la suma de las dos distancias observadas, ó de las dos sumas de los semidiámetros *SL* y *SF*, como su diferencia es á la diferencia de los segmentos *BL* y *BF*. Añadiendo la mitad de esta diferencia hallada á la mitad del movimiento *FL*, se sacará el mayor de los dos segmentos; restando esta semidiferencia de la mitad del movimiento *FL*, se sacará el menor de los dos segmentos.

417 Se tomara el segmento que está del lado de la mayor latitud aparente, bien sean de una misma, ó de distinta denominacion, quiero decir, que si en la primera observacion la latitud aparente calculada *IL* fuere menor que en la segunda, se hará uso del radio de la Luna, y del segmento, que corresponden á la segunda observacion; pero si la latitud fuere mayor al principio del eclipse, se hará uso del segmento que correspondiere al mismo principio. Con este segmento se hará la siguiente proporcion: La suma

* Sucede con frecuencia en los eclipses de estrellas ó planetas por la Luna que el astro eclipsado se deja ver todo entero algunos segundos en el disco alumbrado de la Luna. Esta apariencia se llama la *Inflexion* de los rayos, la padecen los rayos del astro ocultado que enrasan con los bordes de la Luna, y algunos Filósofos la atribuyen á la refraccion que padecen en la atmósfera de este satélite. Consta que es de $4''\frac{1}{2}$.

ma de los semidiámetros aparentes que corresponde á dicho segmento es al radio de las tablas, como el segmento correspondiente es al coseno del ángulo adyacente *BLS* ó *BFS*. Añadiendo este ángulo al de la inclinacion aparente *LFA*, se sacará el complemento del ángulo de conjuncion aparente, esto es, el ángulo *DSF*, que corresponde á la latitud mayor. Fig. 52.

El radio es á la suma de los semidiámetros aparentes *SF*, que corresponde á la latitud mayor, rebajando de ella $4''\frac{1}{2}$ por causa de la inflexion, como el coseno del ángulo *DSF* es á *SD*. Dividiendo esta cantidad por el coseno de la latitud *HS* del astro *S*, con tal que no sea el Sol, se sacará la distancia *HG* á la conjuncion aparente, respecto de la de las dos observaciones que correspondiere á la mayor de las dos latitudes aparentes de la Luna. Esta distancia á la conjuncion aparente, con el movimiento aparente, podria servir para hallar la conjuncion aparente, si se necesitára. Esta distancia se restará de la longitud verdadera del Sol ó de la estrella, si la mayor latitud correspondiere al principio del eclipse; se la añadirá á la longitud del Sol, si correspondiere al fin del eclipse, y se sacará la longitud aparente de la Luna observada. Comparando esta longitud aparente observada con la que se hubiere calculado, se hallará el error de las tablas en longitud. Podría suceder que la inmersion se verificára despues de la conjuncion aparente en longitud, este caso es muy raro; pero si hubiese algun recelo, se podría comprobar la operacion cal-

cu-

Fig. 52. culando solo por las tablas la inmersion, y la conjuncion aparente.

418 El movimiento verdadero de la Luna sola en longitud en la eclíptica, es á una hora ó 3600″, como el error de las tablas en longitud es á un número de segundos de tiempo que se restará de la hora de la conjuncion calculada por las tablas, si se hubiese sacado por observacion una longitud mayor que por las tablas, y se sacára la hora de la conjuncion observada; esto es lo que habíamos de determinar.

Quando se busca de este modo el error de las tablas respecto del tiempo de la conjuncion, en vez de buscar directamente la conjuncion verdadera y la longitud verdadera, se ahorra el calculador valerse de la paralaxe de la Luna sola al fin del cálculo en los eclipses de Sol, en lugar de la diferencia de las paralaxes del Sol y de la Luna de que se hace uso al principio. Daremos mas adelante un egemplo de la otra práctica que es mas sencilla quando se trata de una estrella. Siempre tiene cuenta hallar igualmente la conjuncion y el error de las tablas, por medio del otro triángulo *SBL*, que está del lado de la latitud menor, tomando el otro segmento, y la otra suma de los semidiámetros, y la diferencia de los dos ángulos, cuya suma se hubiere tomado en el primer cálculo. El resultado ha de ser puntualmente el mismo, porque las dos observaciones del principio y del fin no hacen mas que una sola observacion para la determinacion de la longitud y de la latitud.

El

El triángulo *SFD* que sirvió para hallar la diferencia de longitud aparente *SD*, sirve tambien para hallar la diferencia de las latitudes aparentes, esto es, *FD*, que se añadirá á la latitud de la estrella *S*, si la de la Luna *F* calculada por las tablas saliere mayor que la de la estrella, de modo que el punto *F* esté mas distante de la eclíptica que el punto *D*, y se sacará la latitud aparente de la Luna, la qual comparándola con la que dán las tablas manifestará el error de las tablas en latitud. Fig. 52.

Un caso puede ocurrir que pudiera dejar alguna duda sobre si el punto *F* está mas ó menos distante de la eclíptica *GI* que el punto *D*; ocurre este caso quando la diferencia *FD* de las latitudes aparentes no pasa de 30″ en ambas observaciones. Como el error de las tablas deja al poco mas ó menos un error de 30″, no se sabrá si el centro de la Luna ha pasado al norte ó al sur del astro *S*; en este caso no bastan el principio y fin de un eclipse para determinar la latitud; se debe apelar ó á la cantidad del eclipse, si se trata del Sol, ó á la diferencia de declinacion observada entre la Luna y la estrella antes de la inmersion, ó despues de la emersion. En este caso se debería calcular la longitud y latitud aparentes de la Luna para el momento de la observacion (415), é inferir de aquí la ascension recta y la declinacion aparente (VII. 390); comparándolas con las que se hubiesen observado, se sabría si la Luna está mas al norte ó al mediodia por la observacion que por las tablas.

Por

Fig. 419 Por egemplo, el dia 6 de Abril de 1749, la Luna eclipsó la estrella Antares en Berlin, á $14^h\ 6'\ 19''$ de tiempo verdadero, y volvió á parecer del otro lado de la Luna á $15^h\ 12'\ 54.''$ El mismo dia observó Mr. de la Lande en París la emersion á $13^h\ 1'\ 20''$; vamos á determinar la diferencia de meridianos entre París y Berlin por el cotejo de estas observaciones. Para egecutar este cálculo por el método exacto que acabamos de especificar, es preciso conocer de antemano al poco mas ó menos la diferencia que se busca de los meridianos, ó si no el primer cálculo no será mas que una aproximacion, y se repetirá para sacar despues el mismo resultado con mas puntualidad. Por egemplo, si no supiéramos nada de la longitud de Berlin, tomaríamos la diferencia entre las horas de la inmersion en París y Berlin, esto es, entre $13^h\ 1'\ 20''$, y $14^h\ 6'\ 19''$, y supondríamos que vá una hora de diferencia de un meridiano á otro; pero como se sabe que esta diferencia no se aparta mucho de $44'\ 25''$, aprovecharemos esta noticia.

420 Redujo, pues, Mr. de la Lande al meridiano de París las dos observaciones de Berlin, las convirtió en tiempo medio, y calculó para los dos instantes las cantidades siguientes por tablas muy parecidas á las que publicaremos.

Longitudes verdaderas de la Luna.	$8^s\ 5^\circ\ 43'\ 16''$.	$8^s\ 6^\circ\ 26'\ 9''$
Latitudes verdaderas de la Luna.	$3^\circ\ 47'\ 18''$.	$3^\circ\ 45'\ 10''$

Res-

Respecto de la altura del polo en Berlin 52° 31′ 30″, Fig.
la paralaxe orizontal era de 57′ 15″, 7, suponiéndola de 57′ 18″ en París; el ángulo de la vertical con el radio de la tierra, que el mismo Astrónomo suponía entonces de 18′ 42″ (VII. 898) dá un aumento de 24″, 1; (VII. 887); por consiguiente la paralaxe que sirvió primero era de 57′ 39″ 8. Los demas elementos del cálculo de las paralaxes son los siguientes.

	Inmersion.				Emersion.			
a		13ʰ	21′	54″		14ʰ	28′	29″
b	0ˢ	17	20	17½	0ˢ	17	23	1
c		227	33	32		244	14	49
d		24	56	6		18	52	37
e	6	13	7	26	7	5	12	24
f		..	.. 19	27,8			9	43,3
g		..	..	.. 4,9				4,9
h		..	.. 19	22,9			9	38,4
i		..	.. 53	18,6			55	40,9
k		..	..	.. 21,0				21,0
l		..	.. 52	57,6			55	19,9

a Tiempo verdadero en París.

b El lugar del Sol por las tablas.

c Ascension recta del medio del cielo (VII. 425).

d Altura del nonagésimo (VII. 857).

e Longitud del nonagésimo (VII. 858).

f Páral. de longit por las fórmulas (VII. 869).

g Aplanamiento en longitud (VII. 892).

h Paralaxe de longitud en el esferoide.

i Paralaxe de latitud por las fórmulas (VII. 862).

k Aplanamiento en latitud (VII. 890).

l Paralaxe de latitud en el esferoide.

Fig. La fórmula que dió el aplanamiento en latitud para Berlin, fue la siguiente $\frac{57' 16'' \text{ sen } 18' 44''}{\text{sen } 52° 31'} \times \left(\frac{\cos 23° 28'}{\cos 3° 46'} - \text{sen } 26° \text{ tang } 3° 46'\right) = 21''$.

421 El movimiento aparente en latitud en el discurso de $1^h 6' 35''$ que duró la ocultacion en Berlin, esto es, el valor de *AL* es de $11'' 4$, este era el incremento que se reparaba en la latitud aparente; el movimiento aparente en longitud á lo largo de la eclíptica era de $27' 8'', 5 = GI$, y de $27' 3'', 2$ en la region de la estrella, á lo largo de un círculo máximo *FA*; se sacará, pues, el ángulo *AFL* de $30' 17''$, y el lado *FL*, ó el movimiento de la Luna en su órbita aparente $27' 3'', 2$.

52\.

422 Por ser el diámetro orizontal de la Luna de $31' 18''$, el semidiámetro aparente será de $15' 41'', 9 = SL$ para el primer instante, y de $15' 42'', 2 = SF$ para el fin, y de cada uno se rebajarían $4''\frac{1}{2}$, si se llevára en cuenta la inflexion. Bajando desde el centro *S* de la estrella una perpendicular *SB* á la órbita aparente *FL*, los segmentos serán de $13' 31'', 4 = BL$, y de $13' 31'' 8 = BF$, y el ángulo $SLB = 30° 31' 13''$. Como el ángulo *L* está del lado de la latitud menor *IL*, se le quitará el ángulo *AFL* ó *CLF* de $30' 17''$, y saldrá el ángulo $SLC = LSE = 30° 0' 56''$. En el triángulo *ESL*, conocemos $SL = 15' 41'' 9$, y el ángulo *ESL* de $30° 0' 56''$, hallaremos *SE* la qual dividida por el coseno de la latitud aparente *LI* $4° 40' 16''$ dará $13' 38'', 3$ que serán la distancia aparente *HI* de

de la Luna á su conjuncion en la eclíptica. Esta distancia aparente *IH* de 13′ 38″, 3 estaba al occidente de la estrella, y precede á la conjuncion aparente, porque se trata de la inmersion, y estaba la Luna menos adelantada que la estrella. Pero por razon de la paralaxe de longitud la Luna parecía 19′ 22″, 9 mas adelantada ácia el oriente, porque la longitud de la Luna es mayor que la del nonagésimo (VII. 1027). Por consiguiente el lugar verdadero de la Luna distaba todavía mas de la estrella que el lugar aparente; se debe, pues, sumar la paralaxe con la distancia á la conjuncion aparente, y se sacarán 33′ 1″, 2 que serán la distancia de la Luna á la conjuncion verdadera, en minutos de grados contados á lo largo de la eclíptica; esto dá 0^h 59′ 36″ á razon de 36′ 53″ por 1^h 6′ 35″ de tiempo que es la diferencia de las dos longitudes calculadas; estos 59′ 36″ son la diferencia entre la observacion y la conjuncion verdadera; y como la inmersion fue observada á 14^h 6′ 19″, el tiempo verdadero de la conjuncion fue á 15^h 5′ 5″ en el meridiano de Berlin. En los eclipses de Sol se podría buscar esta conjuncion observada por medio de la conjuncion calculada, y del error de las tablas (418). Fig. 52.

423. En algunos casos la linea *FL* del movimiento aparente está en situacion distinta respecto de *DE* que es paralela á la eclíptica; pero en todos los casos se podrá tomar la suma del ángulo *SFB* del triángulo, y del ángulo de inclinacion *AFL*, siempre saldrá el ángulo *DSF* del

Fig. 52. lado donde es mayor la diferencia de latitud aparente *EL* (quiero decir que se sacará el complemento del ángulo de conjuncion aparente). Multiplicando su seno y coseno por la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna, ó solamente por el semidiámetro aparente de la Luna, despues de rebajar $4''\frac{1}{2}$, se sacarán las diferencias aparentes de latitud y longitud, *FD* y *SD*, para la observacion en que la diferencia de latitud era la mayor.

424 Para comprobar el cálculo antecedente, buscaremos tambien la conjuncion por la emersion de la estrella. Sabemos que $SF = 15' 42'', 2$, y que el segmento $FB = 13' 31'', 8$, se sacará, pues, el ángulo $SFB = 30° 30' 12''$, se sumarán uno con otro los dos ángulos *SFB*, *BFA*, y saldrá $SFA = DSF = 31° 0' 29.''$ Del triángulo *DSF*, rectángulo en *D*, del qual conocemos la hypotenusa $FS = 15' 42'', 2$ y el ángulo $DSF = 31° 0' 29''$, sacaremos *SD*, cuyo valor dividido por el coseno de la latitud aparente $4° 40' 31''$, dá $GH = 13' 30'', 2$, distancia á la conjuncion aparente, medida en la eclíptica. En esta segunda observacion, la Luna parecía $13' 30'', 2$ mas oriental que la estrella; pero por causa de la paralaxe de longitud, que la hacia parecer mas adelantada, el lugar aparente era $9' 38'', 4$ mas oriental que el lugar verdadero; luego quedaban $3' 51'', 8$ que espresan quanto la Luna habia pasado mas allá de su conjuncion verdadera con la estrella, y valen $6' 59''$ de tiempo. Restando este intervalo de la hora de esta segunda observacion $3^h 12'$

54'',

$54''$, se halla el tiempo verdadero de la conjuncion verdadera á $3^h\ 5'\ 55''$, del mismo modo que en la primera observacion. Bien se echa de ver que no debe haber diferencia alguna si la operacion fuere bien hecha, porque como el movimiento *FL* determina el tiempo de la conjuncion, que pende de las dos observaciones juntas, estas no pueden menos de dar un mismo resultado, bien que es dificultoso dege de haber una diferencia de algunas decimales, que no importa. Fig. 52.

425 Para conocer la verdadera latitud de la Luna por esta observacion, buscaremos tambien los lados *DF* y *EL*, por medio de los triángulos *DSF*, *LSE* que quedan resueltos arriba; sacaremos $DF = 8'\ 5'', 5$ y $EL = 7'\ 51''$; se añadirán estas cantidades á la latitud de la estrella $4^\circ\ 32'\ 12'' = IE = GD$, porque la Luna parecia mas meridional que la estrella, y sacaremos las latitudes aparentes de la Luna *IL*, *GF*, $4^\circ\ 40'\ 3'', 0$, y $4^\circ\ 40'\ 17'', 5$; se rebajarán las paralaxes de latitud $52'\ 57'', 4$ y $55'\ 19'', 8$, porque la paralaxe aumentaba la latitud austral de la Luna, y sacaremos $3^\circ\ 47'\ 5'', 6$, y $3^\circ\ 44'\ 57'', 7$ para las latitudes verdaderas de la Luna *IM*, *GN* inferidas de la observacion. Repararemos de paso que la órbita verdadera *MN* de la Luna se acerca en este caso á la eclíptica, bien que la órbita aparente *LF* se aparte de ella.

426 El mismo dia observó Mr. de la Lande en París la inmersion de Antares á $1^h\ 1'\ 20''$ de la mañana, he-

Fig. hemos de buscar tambien la conjuncion verdadera de la Luna con la estrella por medio de la observacion de París. Se haria la misma operacion que para Berlin (420), si se hubiese observado en París la emersion igualmente que la inmersion; pero como las nubes estorvaron la segunda observacion, la suplió Mr. de la Lande con un método que servirá de egemplo para los casos parecidos á este.

427 La latitud verdadera de la Luna calculada por las tablas para el momento de la observacion es $3^{\circ}\ 47'\ 58''$; hemos de restar de esta cantidad $12''$, 5, porque la observacion de Berlin nos ha manifestado que las tablas daban aquel dia una latitud $12''$ 5 mayor (425), y sacaremos que la latitud verdadera de la Luna en el instante que se observó la inmersion en París era $3^{\circ}\ 47'\ 45''\frac{1}{2}$; la añadiremos la paralaxe de latitud $48'\ 15''$, 7 para sacar la latitud aparente de la Luna $4^{\circ}\ 36'\ 1''$, 2 y restar la latitud de la estrella $4^{\circ}\ 32'\ 12''$, de donde se infiere que la diferencia aparente de latitud *EL* en el instante de la observacion, era $3'\ 49''$, 2. En el triángulo *SLE* conocemos $LE = 3'\ 49''$, 2, y $SL = 15'\ 41''$, 7, semidiámetro aparente de la Luna, aumentado en razon de su altura que era 10 grados. Determinaremos el lado *SE* por el método declarado (VII. 1 1 8.2); este lado dividido por el coseno de la latitud aparente de la Luna, dará la diferencia aparente de longitud *HI*, en la eclíptica para París, $15'\ 16''$, 4; la hemos de añadir la paralaxe de longitud $29'\ 19''$, 6, para sacar la distancia á la conjuncion ver-

verdadera, 44′ 36.″ Se convertirá esta diferencia en tiempo; por medio del movimiento horario de la Luna (añadiendo á su logaritmo el logaritmo constante 0,256536) y sacaremos el de 1ʰ 20′ 31″, que es el intervalo de tiempo entre la observacion de París, 13ʰ 1′ 20″, y el tiempo verdadero de la conjuncion verdadera; que por lo mismo será para París á 14ʰ 21′ 51.″ Fig.

428 Sacaremos, pues, los dos tiempos de la conjuncion, del modo siguiente:

Tiempo verdadero de la conjuncion verdadera en Berlin	15ʰ	5′	55″
Tiempo verdadero de la conjuncion verdadera en París	14	21	51
Luego la diferencia de los meridianos	0	44	4

La longitud de la estrella Antares era entonces 8ˢ 6° 16′ 20″, esta era tambien la longitud verdadera de la Luna para el dia 5 de Abril 14ʰ 21′ 51″, tiempo verdadero en el observatorio Real de París, ó 14ʰ 24′ 2″, tiempo medio, y la latitud verdadera de la Luna era de 3° 45′ 11″, segun la observacion.

429 Quando se observa el principio y el fin de un eclipse de Sol, tambien se sacan dos distancias iguales *SE* y *SF*; pero son iguales á la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna, despues de rebajados $4''\frac{1}{2}$ por causa de la inflexion.

430 Quando no se ha observado con puntualidad

Fig. mas que el fin de un eclipse de Sol en dos lugares, conforme suele suceder, es preciso suponer la latitud de la Luna conocida á punto fijo en cada observacion; esto altera poco el resultado, particularmente quando distan pocos grados uno de otro los dos observadores. En este caso bastará calcular por las tablas la distancia aparente de los centros (VII. 1029 y 1073), cuyos cálculos son fáciles de egecutar por el método propuesto (VII. 1033); porque en conociendo la longitud y latitud de la Luna, se calcúla la distancia aparente de los centros para la hora de la observacion hecha debajo del meridiano incógnito. Si se saca mayor ó menor que por observacion, se muda el supuesto hecho acerca de la diferencia de los meridianos, y por consiguiente la longitud y latitud, con lo qual se saca otra distancia aparente de los centros. Haciendo entonces una regla de tres se halla la diferencia de los meridianos, que se debe suponer para sacar por el cálculo la misma distancia de los centros que dá la observacion.

431 Quando se ha visto un planeta ó una estrella entrar por detras de la Luna, y se sabe á qué distancia del centro de la Luna ha de pasar, se concibe una linea que atraviesa las manchas de la Luna, y se procura reparar enfrente de qué manchas se debe hacer la emersion. Porque si el observador ignora donde está el punto de la emersion, en vano esperará ver la estrella en el instante de la emersion; y estas observaciones que son las mas exactas de todas, son en estos casos las mas defectuosas.

Mé-

Fig.

Método para determinar las Longitudes en la mar.

432 Es de suma importancia saber determinar en alta mar el grado de longitud donde está una embarcacion. Redúcese esta determinacion á saber qué hora es en la embarcacion, y qué hora es en el lugar de donde salió. El determinar qué hora es en una embarcacion en alta mar, es operacion facil observando la altura del Sol ó de una estrella (VII.439); la dificultad está toda en saber qué hora es en el puerto donde se hizo á la vela.

433 Para saber qué hora es en el puerto, le basta al navegante con tener un relox bastante bien arreglado, de modo que no varíe mas de dos minutos en dos meses de navegacion.

434 Pero para saber en alta mar qué hora es en un puerto, no son esencialmente necesarios estos reloges marinos; se puede hallar con observar los eclipses y, en particular la situacion de la Luna. Supongamos que se sepa por unas tablas bien calculadas y muy exactas que á $2^h\ 4'$ tiempo verdadero en París, la longitud de la Luna será $0^s\ 10^\circ$, y que un navegante halle en alta mar por observacion que la Luna tiene cabalmente $0^s\ 10^\circ$ de longitud, tendrá seguridad el navegante de que en París son las $2^h\ 4'$.

435 Sin embargo, es mas generalmente practicado el método de las distancias de la Luna al Sol ó á una estrella. A este método le asiste la circunstancia de que se pue-

Fig. puede practicar con una sola observacion de distancia; no supone que se conozca la altura con suma precision; pende muy poco de la declinacion de la Luna y de la altura del polo; no pide que sea muy despejado y sin nube alguna el orizonte; no supone cálculos tan prolijos como los de la ascension recta de la Luna; finalmente la reduccion de la distancia aparente á distancia verdadera, atendiendo á los efectos de la refraccion y de la paralaxe, se puede egecutar con la regla y el compás.

436 Quando se quiere calcular la distancia de la Luna á una estrella, se busca en las tablas de la Luna su longitud para el tiempo dado; se toma en un catálogo la de la estrella; se buscan tambien las latitudes, y esto dá las distancias al polo, y se forma un triángulo en el polo de la eclíptica, en la estrella y la Luna, que se resuelve por estas dos analogías (III.724.*C*): *el radio es al coseno de la diferencia de las longitudes, como la tangente de la menor de las dos distancias al polo boreal de la eclíptica es á la tangente del segmento.* Se resta este segmento de la mayor de las dos distancias al polo boreal de la eclíptica, con tal que la diferencia de las longitudes no pase de 90°, y se saca el segundo segmento. Despues se hace esta segunda proporcion: *el coseno del primer segmento es al coseno del segundo, como el coseno de la distancia menor al polo es al coseno de la distancia entre la Luna y la estrella.*

Si en vez de comparar la Luna con una estrella, se la com-

compara con el Sol, las dos proporciones antecedentes se Fig.
reducirán á estotra: *el radio es al coseno de la diferencia de las dos longitudes, como el coseno de la latitud de la Luna es al coseno de la distancia que se busca.*

Como en la observacion no se mide por lo regular mas que la distancia del limbo de la Luna al limbo del Sol que está mas cerca de ella, de la distancia calculada, se deberá restar la suma de los semidiámetros del Sol y de la Luna, para inferir una distancia que se pueda comparar con la que se observa en la mar. Si se tratára de una estrella, como es preciso valerse del limbo iluminado de la Luna, se restará el semidiámetro de la Luna de la distancia calculada quando la Luna es creciente, y está mas adelantada en longitud que la estrella, ó es menguante y está menos adelantada que la estrella; se añade al contrario el semidiámetro orizontal á la distancia calculada, quando no es todavía Luna llena, y la longitud de la estrella es mayor, ó la Luna, despues de pasada la oposicion, está mas adelantada que la estrella.

437 Para hacer las correcciones de refraccion y paralaxe que este método necesita, se buscarán primero las refracciones que corresponden á la altura de la Luna y á la de la estrella, se calculará el ángulo en la Luna y en la estrella, y se multiplicará cada refraccion por el coseno del ángulo que la correspondiere.

Supongamos, por egemplo, que *A* sea el zenit; *B*, la 53.
la Luna; *C*, el lugar verdadero de la estrella; *K*, su lugar

Fig. 53. gar aparente en el vertical *AKC*. Tomaremos $BE = BC$, ó tiraremos *CE* perpendicular á *BE*, el arco elemental *EK* espresará quanto la refraccion de la estrella, esto es, *CK* arrima la estrella *C* á la Luna *B*. Pero $EK = CK$. sen $ECK = CK$. cos *KCB*; luego esta correccion es igual á la refraccion de la estrella en altura, multiplicada por el coseno del ángulo en la estrella. Lo propio se practicará para con la Luna cuya distancia tambien requiere una correccion igual á la diferencia que va de la refraccion á la paralaxe, multiplicada por el coseno del ángulo en la Luna.

438 Supongamos, por egemplo, que el dia 26 de Mayo de 1754 un observador se hallase á $35^\circ\ 28'$, de latitud meridional, y observase á $8^h\ 45'\ 20''$ de tiempo verdadero la distancia de Régulo al limbo iluminado de la Luna de $24^\circ\ 56'$; la altura de la Luna reducida al mismo instante, y rebajando de ella la depresion del orizonte, sería con corta diferencia de unos $5^\circ\ 53'$, y la de la estrella $24^\circ\ 55'$. En el triángulo *ABC* conocemos $AB = 84^\circ\ 7'$; $AC = 65^\circ\ 5'$ y $BC = 24^\circ\ 56'$, sacaremos, pues, (III. 724. *E*) el ángulo en la Luna $B = 38^\circ\ 28'$, y el ángulo en la estrella $C = 136^\circ\ 58'$, de donde inferimos que la correccion de la refraccion será de $1'\ 32''$ para la estrella (sustractiva por ser obtuso el ángulo en la estrella), y $7'\ 3''$ para la Luna (aditiva por ser agudo el ángulo en la Luna), de donde resulta que la distancia corregida es de $25^\circ\ 1'\ 31''$.

La

La paralaxe orizontal de la Luna era entonces de Fig. $58' 2''$; si la multiplicamos por el coseno de la altura aparente, y por el coseno del ángulo en la Luna, sacaremos $45' 11''$, efecto de la paralaxe, que se debe rebajar de la distancia observada; por ser agudo el ángulo *B* en la Luna, y sacaremos finalmente $24° 16' 20''$ para la verdadera distancia de la Luna á la estrella, que corresponde á la distancia observada $24° 56'$.

439 Calculando para el mismo dia (436) esta distancia de la Luna á la estrella, sacamos que era á $7^h 0'$ respecto del meridiano de París, de $24° 30' 37''$, y que á 8^h era de $23° 56' 39''$; luego la distancia hallada $24° 16' 20''$ se verificaba á $7^h 25' 14''$ respecto de París; pero era de la misma cantidad á $8^h 45' 20''$ en el lugar de la observacion; luego el lugar de la observacion está $1^h 20' 6''$ al oriente de París.

440 Como ocurren casos en que no es posible medir la distancia de la Luna á una estrella, y se puede medir su altura, daremos tambien el método llamado de las alturas de la Luna para hallar las longitudes en la mar.

Despues de observar en alta mar la altura del limbo de la Luna, se hacen las quatro correcciones que penden de la altura del ojo respecto de la mar, de la refraccion, de la paralaxe y del semidiámetro de la Luna, y con esto queda determinada la altura verdadera de la Luna. Siempre se conoce, con diferencia de media hora, la longitud del lugar donde se hace la observacion; por consiguiente

se

Fig. se puede saber qué hora es en París en el instante que se observa, y se puede calcular por las tablas para aquel instante, la declinacion de la Luna, y por lo mismo su distancia al polo. Tambien se conoce la latitud del lugar donde se observa (es indispensable particularmente en este método), luego está averiguada la distancia del polo al zenit; por consigüiente con resolver el triángulo *PZS* (VII.429) se determinará el ángulo horario para el lugar de la observacion.

Despues de determinado el ángulo horario de la Luna, por medio de la altura observada, se busca á qué hora se habia de verificar el mismo ángulo horario en el meridiano de París, la diferencia entre la hora de París y la hora en el lugar de la observacion es la diferencia de los meridianos. Si esta diferencia fuese al poco mas ó menos la misma que la que se supuso al principio para calcular la declinacion, queda abonado el supuesto, y no hay que tocar al cálculo precedente.

Si hubiere una diferencia notable, se hace otro supuesto para la longitud del lugar, se busca del mismo modo en este nuevo supuesto la hora de París, y la declinacion de la Luna por las tablas, para la misma hora; con esta nueva declinacion se resuelve otra vez el triángulo *PZS*, y se determina el ángulo horario. Se indaga á qué hora de París se debia verificar el mismo ángulo horario en aquella ciudad, y la diferencia entre esta hora de París y la hora de la observacion, será la diferencia de los meridianos. Si esta di-

diferencia fuese la misma que se tomó en este segundo supuesto, quedará abonado; pero si hubiere todavía alguna diferencia en el resultado, se apuntará este error debajo del error del primer supuesto, se tomará su suma ó su diferencia, segun fueren de una misma ó de distintas denominaciones, y se hará esta proporcion: *La suma de los errores es al error menor, como este es á la correccion que se debe hacer á la diferencia de los meridianos hallada por el supuesto que ha dado el menor error.* Fig.

441 Por egemplo, se ha observado en alta mar la altura aparente del limbo de la Luna á 16^h de tiempo verdadero; se ha sacado que la altura verdadera del centro de la Luna era de $9° 55' 28''$, siendo de $50° 35' 27''$ y austral la latitud geográfica del lugar de la observacion. Supongo, segun se discurría en la embarcacion, que estaba 2^h al occidente de París, de modo que eran 18^h en París; calcúlo para este tiempo, por las tablas de la Luna, la longitud, la latitud, la ascension recta, y la declinacion, saco esta declinacion de la Luna, $3° 50' 29''$ boreal, luego la distancia de la Luna al zenit $= 80° 4' 32''$, su distancia al polo $= 93° 50' 29''$, y la distancia del polo al zenit $= 39° 24' 33''$, de donde infiero que el ángulo horario es de $69° 16' 46''$ (III.724.*E*).

Tambien saco por las tablas que el ángulo horario para París es de $69° 16' 46''$, á $18^h 28' 23.''$ De aquí se sigue que la diferencia de los meridianos entre París y el lugar de la observacion deberia ser $2^h 28' 23.''$ Pero la

he-

Fig. hemos supuesto de $2^h\ 0'$; luego el error de este primer supuesto es de $28'\ 23.''$

442 Hago, pues, otro supuesto; supongo que la diferencia de los meridianos sea $2^h\ 28'\ 23''$; saco la declinacion de la Luna $3^\circ\ 56'\ 10''$, y el ángulo horario $69^\circ\ 9'\ 14''$; este ángulo horario se verifica respecto de París á $18^h\ 43'\ 21''$; luego la diferencia de los meridianos sería de $2^h\ 43'\ 21''$, en lugar de $2^h\ 28'\ 23''$ que habíamos supuesto; es, pues, de $14'\ 58''$ el segundo error.

Estos errores son ambos de mas, han menguado al paso que hemos aumentado el supuesto de la diferencia de los meridianos; esto prueba que todavía la hemos de suponer mayor. Haremos, pues, esta proporcion: la diferencia de los dos errores $13'\ 25''$ ó $805''$ es al error menor $898''$, como la diferencia de los dos supuestos $28'\ 23''$ es á $31'\ 40''$, esta es la cantidad que hemos de añadir al segundo supuesto $2^h\ 28'\ 23''$ para sacar la verdadera diferencia de los meridianos, $3^h\ 0'\ 3.''$ Para hacerse cargo del fundamento de esta proporcion, basta echar la vista á la disposicion siguiente de estos cálculos.

Primer supuesto		Segundo supuesto		Diferencia
Longitud	$2^h\ 0'\ 0''$	Longitud	$2^h\ 28'\ 23''$	$28'\ 23''$
Error	28 23	Error	14 58	13 25

Manifiesta esta tabla que con añadir $28'\ 23''$ al supuesto de la longitud ó de la diferencia de los meridianos, el

el error ha menguado 13′ 25″; de donde se inferirá que el error debe menguar 14′ 58″ ó reducirse á nada, con aumentar 31′ 40″ la diferencia supuesta de los meridianos; luego se la deben añadir todavía estos 31′ 40″, y la diferencia que se buscaba de los meridianos será 3h 0′ 3.″ Fig.

De los Mapas geográficos.

443 Una vez determinada ó dada la longitud y latitud de los puntos de la tierra que se han de pintar en un mapa, es facil colocarlos en su verdadera situacion; pero como en la construccion de los mapas se deben guardar las leyes de la perspectiva, cuyo punto no deja de ser algo dificultoso por razon de la redondez de la tierra, se han inventado diferentes métodos para la formacion de los mapas. Ya que en esta formacion se deben guardar las reglas de la perspectiva, es preciso suponer el país que el mapa debe representar, pintado en un plano puesto entre el ojo y el mismo país. Quando se quiere, pues, representar la superficie de la tierra, y todos sus puntos y círculos, se supone colocado el ojo en algun punto fuera de la tierra, y un plano transparente colocado como se quiera entre la tierra y el ojo, bien que lo mejor es suponerle colocado perpendicularmente á la linea que va desde el centro de la tierra al ojo, á fin de que salga mas regular la figura. Despues se imaginarán lineas tiradas desde todos los puntos de la tierra ó de sus círculos, quales son el equador, los trópicos, ó desde todas las Ciudades,

Fig. cuyas lineas atraviesen el espresado plano; y los diferentes puntos donde estas lineas cortaren el plano serán la representacion de los puntos correspondientes de la tierra.

444 Pero como la tierra es redonda, no se puede representar en un plano toda su superficie; porque entonces dos sitios de la tierra se confundirían en un solo punto del plano, y este es el motivo de no pintarse mas que su mitad en un plano, y la otra mitad en otro plano. Se puede, pues, suponer que el ojo está dentro de la tierra; se le puede suponer en un emisferio quando se quiere pintar el otro, y el plano colocado entre el ojo y el emisferio cuyo mapa se quiere formar. Quando no se hubiere de representar mas que una parte de la tierra, qual es Europa, Africa, &c. se podrá suponer el ojo en el centro de la tierra.

445 Como podemos suponer el ojo colocado en muchos sitios diferentes unos de otros, tambien puede suceder que los rayos que desde los obgetos vinieren al ojo atraviesen el plano en muchos puntos diferentes; siguiéndose de aquí que la apariencia de la tierra y sus círculos no será la misma para un ojo colocado en su ege, que para un ojo colocado en otro lugar entre el equador y el polo, y que parecerán de distinta figura los círculos de la tierra.

446 Tambien resultará de lo mismo alguna diferencia en el tamaño de los mapas. 1.° quanto mas distante está del ojo el obgeto, permaneciendo el plano en la

mis-

misma situacion, tanto menor ha de ser su imagen. 2.° quanto mas cerca está del ojo el plano donde se hace la representacion, tanto menor es la apariencia del obgeto &c. conforme se verá en la Perspectiva. Fig.

447 Despues de fijado el plano, sea la que fuere la distancia entre el ojo y el obgeto, con tal que se mueva en una linea que pase por el centro de la tierra, ó sea perpendicular á su superficie, la figura parecerá la misma, bien que menor, y por consiguiente aunque el plano se acerque al obgeto, apartándose del ojo, la imagen será semejante á todas estas diferentes distancias, con tal que permanezca el plano en una situacion paralela, pero variará el tamaño de la figura. Si al contrario el plano mudare de situacion, ó se saliere el ojo de la linea que pasa por el centro de la tierra, entonces la imagen no será semejante, y los rayos que de ella vienen llegarán al ojo despues de atravesar el plano en puntos entre cuyas distancias respectivas no habrá la misma proporcion que antes.

448 Pero al proyectar la superficie de la tierra, se suele colocar el plano de modo que toque la superficie en un punto tal que una linea que desde el ojo llegue á él, sea perpendicular á la superficie, y se dirija al centro de la tierra; y por lo que toca al tamaño de la figura, se supone el ojo mas ó menos apartado de la tierra.

449 En la formacion de los mapas particulares se pueden dispensar las reglas de la perspectiva, y bastará formarlos mediante los ángulos de posicion y las distancias

 con-

Fig. conforme digimos (I. 857). Pero en los mapas grandes no se pueden dispensar estas reglas, aunque con esto no se pintan de todo punto los lugares conforme están en la superficie de la tierra. Porque la formacion de los mapas abraza patentemente tres obgetos. 1.° todos los puntos han de estar en el mapa en una posicion y distancia determinada respecto de los círculos principales de la esfera quales son el equador, los paralelos, los meridianos, conforme están en la tierra, á fin de que por el mapa podamos venir en conocimiento de la distancia del paralelo de cada lugar al equador &c. 2.° los mismos países han de tener unos con otros la misma proporcion de estension que tienen sobre la tierra. 3.° los lugares han de estar en la misma situacion y distancia unos de otros que en la superficie de la tierra.

450 La primera de estas tres condiciones se debe verificar escrupulosamente en todos los mapas, y cumplen con ellas los mas, pues están formados por las tablas de latitud y longitud; y esta condicion no se opone á las reglas de la perspectiva. Pero para que la segunda se verifique, es menester quebrantar algun tanto estas reglas; porque las partes de una superficie curva mas distantes del ojo, parecen menores que las que están en el plano cerca del ojo; sin embargo es cosa corta la desigualdad, quando se supone el ojo á una distancia infinita de la tierra.

451. Por lo que mira á la tercera condicion, no se pue-

puede verificar en los grandes mapas, quales son el de la tierra, y de sus quatro partes. Porque es defecto comun é inevitable en todas las proyecciones de esta naturaleza, el que las partes que están á distancias desiguales del centro, tambien estén pintadas en el mapa á distancias desiguales; de donde nace que la estension y figura de las partes de la tierra están mas ó menos alteradas, segun la diferente posicion del ojo. Para enterarse de la causa de esta apariencia, y hasta qué punto se deba remediar este defecto, bueno será considerar el origen y formacion de estas representaciones. Supondremos con esta mira que se haya de egecutar la descripcion del globo, y tomaremos, para que sirva de egemplo un círculo particular, despues que hubiéremos dado á conocer la proyeccion que sirve para los mapas. Fig.

452 Es constante que entre todas las proyecciones la mas sencilla es la proyeccion *ortográfica* (VII. 56); pero es sumamente defectuosa para los mapas de alguna estension, porque siendo muy pequeños los senos versos ácia los bordes del emisferio, los arcos son representados por lineas demasiado pequeñas; solo puede servir para los mapas de las regiones circumpolares, ó de los países de corta estension.

453 La forma mas acomodada para los mapas que han de representar mucha estension de tierra, particularmente para los Mapamundi, la que menos desfigura la forma natural de los continentes, es la proyeccion *Este-*

Fig. *reográfica* (VII. 57), se supone que esté el ojo en la circunferencia misma del globo en la parte superior, y que está mirando la inferior refiriendo todos los puntos de este emisferio al plano del círculo máximo, perpendicular al diámetro en que está el ojo; sentado esto,

54. 454 Supongamos que el ojo esté en *Q*; que *BD* sea el diámetro del círculo de proyeccion; *BFD*, el semicírculo que hemos de proyectar en el diámetro *BD*; imaginaremos rayos que desde el ojo *Q* van á los diferentes puntos de esta concavidad, y encontrarán el diámetro *BD* en otros tantos puntos que serán sus proyecciones. Desde el medio *F* de la proyeccion tomemos un arco *FR* de 40°, cuya proyeccion es *CG*, el ángulo *CQG* será de 20°, esto es, la mitad del arco *FR*, y yá que *QC* es el radio del círculo, *CG* será igual á la tangente de 20°; por consiguiente *en la proyeccion estereográfica la proyeccion de un arco contado desde el centro, es la tangente de la mitad del arco.*

455 La gran propiedad de la proyeccion estereográfica consiste en que las representaciones de los círculos de la esfera máximos ó menores, son tambien círculos. Sea *RF* un arco que esté en una posicion qualquiera, sobre el qual imaginaremos un círculo menor de la esfera cuyo diámetro sea *RF*, y cuyo círculo sea la base de un cono oblicuo escaleno *FQR*; vamos á probar que la seccion *CG* de este cono con el plano de proyeccion, será tambien un círculo. Los triángulos *QFR*, *QCG* son seme-

jan-

jantes; porque si tiramos *HR* paralela á *BD*, tendremos el arco *QDR* igual al arco *QBH*, la mitad de *QDR* será la medida del ángulo *QFR*, la mitad del arco *QBH* será la medida del ángulo *QRH*, ó de su igual *QGB*; luego el ángulo *QGC* es igual al ángulo *QFR*. Los triángulos *QCG*, *QFR* tambien tienen un ángulo comun en *Q*, luego son enteramente semejantes, del mismo modo que los conos cuyas secciones son; luego ya que la base del cono *QFR* es un círculo, la base del cono *QCO* es tambien circular, bien que sea de diferente estension. Si hiciéramos otras figuras semejantes con las mismas letras, echaríamos de ver, que el tamaño de *FR* y su situacion, aun en el semicírculo superior *BQD*, no altera la verdad de la proposicion. Luego *en la proyeccion esterográfica, todos los círculos del globo, sea la que fuere su posicion, son tambien círculos.* Fig. 54.

456 En esta especie de proyecciones los meridianos son tambien círculos, tanto menos curvos ó cuyos diámetros son tanto mayores, quanto mas inmediatos están al centro. Para determinar el valor de sus diámetros, sea *BH* ó *DI* la longitud de un meridiano que pasa por los puntos *H* é *I* diametralmente opuestos; la proyeccion del semicírculo *HRI* será la linea recta $SP = SC + CP$; *SC* es la tangente de la mitad de *HF*, ó de la mitad del quadrante de círculo *BF*, menos la mitad de la longitud *BH*, *PC* es la tangente de la mitad del arco *FI*, ó de 45° mas la semilongitud; luego tomando la mitad de *SP*, ó

Fig. 54. la mitad de la suma de estas dos tangentes, se saca facilmente esta regla general: *El radio de un meridiano en la proyeccion estereográfica es igual á la semisuma de la tangente y de la cotangente de la diferencia que va de 45° á la semilongitud del mismo meridiano.* Por egemplo, el radio del meridiano que pasa por la longitud de 80°, será la mitad de la suma de las tangentes de 5° y de 85°; el radio del meridiano que pasa por 60° de longitud, será la semisuma de las tangentes de 15° y de 75°, que es su complemento.

457 Como la proyeccion de un paralelo al equador ha de ser un círculo, determinaremos facilmente su diámetro. Sea *IR* el diámetro del paralelo; *QF*, el del equador, el punto *G* será la proyeccion del punto *R*, y *CG* es la tangente de la mitad de la latitud *FR* ó del ángulo *FQR*, igual al ángulo *MQP*. La proyeccion del punto *I* es el punto *P*, y *CP* es igual á la tangente del ángulo *CQP* que es el complemento de *MQI* ó *RQF*; por consiguiente *CP* es la cotangente de la mitad de la latitud, y la diferencia *GP* será el diámetro del paralelo. Luego el radio de un paralelo al equador en la proyeccion estereográfica es igual á la mitad de la diferencia entre la cotangente y la tangente de la mitad de la latitud.

458 El orizonte de un pais qualquiera representado en un planisferio celeste es tambien un círculo, y puede servir para hallar el nacimiento y ocaso de los astros en el planisferio mobil. Para determinar el radio de este círcu-

culo, sea *Q* el polo del mundo, donde suponemos fijo el ojo en la proyeccion estereográfica de los planisferios; *ICH*, el orizonte del lugar dado, cuyos estremos se trasladan á *S* y *P* en el plano de proyeccion; la linea *SP* es el diámetro del orizonte, se compone de dos partes *CS* y *CP* que son la tangente y la cotangente de la mitad de la latitud. Para París el semidiámetro es de 132 $\frac{1}{2}$ dándole 100 al radio, ó de 397 $\frac{1}{2}$, dándole 300 al radio. Daremos aquí una tabla de los radios del orizonte para diferentes latitudes, suponiendo que el radio sea de 10000 partes. Por esta tabla el radio es infinito para los paises que están debajo del equador, porque su orizonte es un meridiano, y en nuestros planisferios todos los meridianos son lineas rectas que se cortan en el polo. Para servirse de este orizonte, es preciso hacerle de carton, y colocar su centro en el punto del meridiano que señala la latitud del lugar en el planisferio. Fig. 54.

Latit.	Radios.
0	infinito
10	57588
20	29238
30	20000
40	15557
50	13054
60	11547
90	10000

459 Para construir mapas de modo que la figura de los paises se acerque mas á la figura del globo, quando los mapas han de representar una gran porcion del globo como 30 ó 40 grados, algunos geógrafos se valen del método siguiente. Hacen iguales los grados de latitud, representan los paralelos al equador con círculos concéntricos, cuyo centro está en el punto donde la tangente me-

Fig. media encuentra el ege de la tierra; de modo que los mapas son la resolucion de un cono circunscripto á la esfera, que la tocára en la circunferencia del paralelo que ocupa el medio del mapa. El paralelo de 50° de latitud es representado en el mapa por un círculo cuyo radio es la cotangente de 50°; y así de los demás que todos están trazados desde un mismo centro, y á distancias iguales.

460 Todo está en saber qué arco se ha de tomar en dicho círculo del mapa para espresar un grado del paralelo terrestre que representa; se halla multiplicando un gra-
55. do ó 60′ por el seno de la latitud. Sea P el polo de la Tierra; D, el punto que está á 50° de latitud, de modo que DB es el coseno de 50°, y DT la cotangente; el paralelo cuyo radio es DB, es menor que el círculo cuyo radio es TD, en la misma razon que BC es menor que DT; por consiguiente un grado ó 60′ del paralelo ocupará en el círculo del mapa, cuyo radio es TD, un arco igual á $60' \frac{BD}{TD} = \frac{60'.\ \text{cos lat.}}{\text{cot. lat.}} = 60^\circ .\ \text{cos lat. tang lat.} = 60'.\ \text{sen lat.}$ esto es, 46′ para 50° de latitud. En general dos meridianos, cuyas longitudes discreparen la cantidad m, forman entre sí un ángulo igual á m. sen lat.

461 Se echa, pues de ver que 46′ del círculo cuyo radio es TC, y que ha de representar en el mapa el paralelo de 50°, componen el valor de un grado de longitud, por consiguiente 5° de longitud componen 3° 50′ del círculo del mapa, 10° componen 7° 40′, y 15° componen 11° 30′ &c. Suele ofrecerse trazar este círculo

sin

sin conocer su centro; para esto se tomarán 5° del meridiano por seno total, se multiplicarán por el coseno de 50°, y se sacarán $3^{\circ}\ 13'$ para el valor de 5° en el paralelo de 50°. Por consiguiente se tomarán $3^{\circ}\ 13'$ del meridiano para hacer 5° del paralelo, se trasladarán sobre una linea recta perpendicular al meridiano. Se dividirá este espacio en 67 partes (son la tangente de $3^{\circ}\ 50'$), se tomarán $2\frac{1}{4}$ mas (este es el exceso que la secante de $3^{\circ}\ 50'$ lleva al radio), quedará determinado uno de los puntos del paralelo de 50°. Se llevarán sobre la misma perpendicular al meridiano $6^{\circ}\ 26'$ del meridiano para componer 10° del paralelo, se dividirá este espacio en $134^{\circ}\ \frac{1}{3}$ (tang de $7^{\circ}\ 40'$ valor de los 10° de longitud), se tomarán 9 de estas partes mas arriba de la perpendicular, y estará determinado otro punto del paralelo. Asimismo, para 15° se llevarán $9^{\circ}\ 39'$ del meridiano, como la tangente de $11^{\circ}\ 30'$ es $303\frac{1}{2}$, y la parte esterior de la secante $= 20\frac{1}{2}$, se buscará un quarto punto, y así de los demás. Despues de determinados por este método muchos puntos de un círculo, se podrá trazar sin conocer su centro por medio de una regla flexible, cuya convexidad se hace mayor con un tornillo, hasta que pase por todos los puntos señalados. Si el mapa fuese tan pequeño que se puedan suponer rectilineos los meridianos, todo se reducirá á trazarlos todos ácia un mismo centro por las divisiones de los paralelos, pero para que rija en toda la extension del mapa una misma escala, se prefiere tomar en los demas paralelos intervalos

Fig. 52.

va-

Fig. valos que menguen como los cosenos de las latitudes, y con esto se determinan en dichos paralelos varios puntos por los quales se tiran los meridianos, con la regla curva y elástica.

462 Todo esto presupuesto, se nos hará muy facil *formar el mapa de un emisferio terrestre*, y daremos dos métodos para egecutar esta operacion.

I. Método que supone el ojo en el polo del emisferio opuesto, ó distante del plano de proyeccion un semidiámetro terrestre.

1.° Desde el punto *C* como centro, y con el radio *CA*
56. tomado á arbitrio, trácese el círculo *ADBE* que representará el equador ó el plano de proyeccion, pues hemos de proyectar un emisferio de la Tierra, estando el ojo en el polo. 2.° Desde el mismo centro *C* trácese otro círculo concéntrico, distante muy poco del primero, y divídase el limbo del plano en 360.° 3.° Ya que los círculos que están en el mismo plano que el ojo, conforme se enseña en la Perspectiva, parecen lineas rectas, y todos los meridianos pasan por el polo (VII. 106), el ojo está en la interseccion comun de todos los meridianos; si por el centro *C* se tiran á los grados del plano de proyeccion las rectas *AB*, *DE* &c. estas rectas representarán los meridianos, y supondremos que el primero sea *AB*. 4.° Tírense con una regla desde el punto *E* á los grados del limbo del plano de proyeccion, las lineas ocultas *E* 10, *E* 20, *E* 30 &c. y desde el punto *C* como centro, con los radios *C* 10, *C* 20, *C* 30 &c. trá-

trácense círculos concéntricos, estos serán los paralelos que pasarán por cada diez grados de latitud. 5.° Por medio de las tablas de longitud y latitud se señalarán los lugares del modo siguiente. Cuéntense en el equador *ADBE* tantos grados, quantos coge la latitud dada, y tírese desde el punto *E* al número de grados dado, pongo por caso á 60°, con un lapiz la linea *E* 60°; desde el centro *C* tírese otra linea *C* 105, si fuere de 105° la longitud dada. Finalmente desde el punto *C* con el intervalo *Ca* córtese la *C* 105 en *i*; será *i* el sitio que corresponde al lugar propuesto. Fig. 56.

Quedará probada la exactitud de la operacion, si probamos que los círculos concéntricos con *AEBD* tirados por los puntos 10, 20, 30 &c. representan los paralelos que pasan por cada diez grados de la superficie de la Tierra. Supongamos que sea *AgdfB* el emisferio que se ha de proyectar; *AEBD*, el plano de proyeccion ó del equador, que el ojo *e* colocado en el ege *ed* diste del plano de proyeccion el semidiámetro *eC*, y se haya de proyectar el paralelo *gf*. Como la proyeccion del punto *g* está en *F*, donde el radio atraviesa el plano de proyeccion; será *AF* la proyeccion del arco *Ag* del meridiano, ó de la latitud del paralelo. Por consiguiente ya que un círculo paralelo al plano de proyeccion ha de parecer un círculo, y su centro *c* ha de estar en *C*, el círculo trazado desde el centro *C* con el radio *CF* será la proyeccion del paralelo *gf*. Si nos figuramos que el círculo *eAdB* dá una vuel- 56. 57.

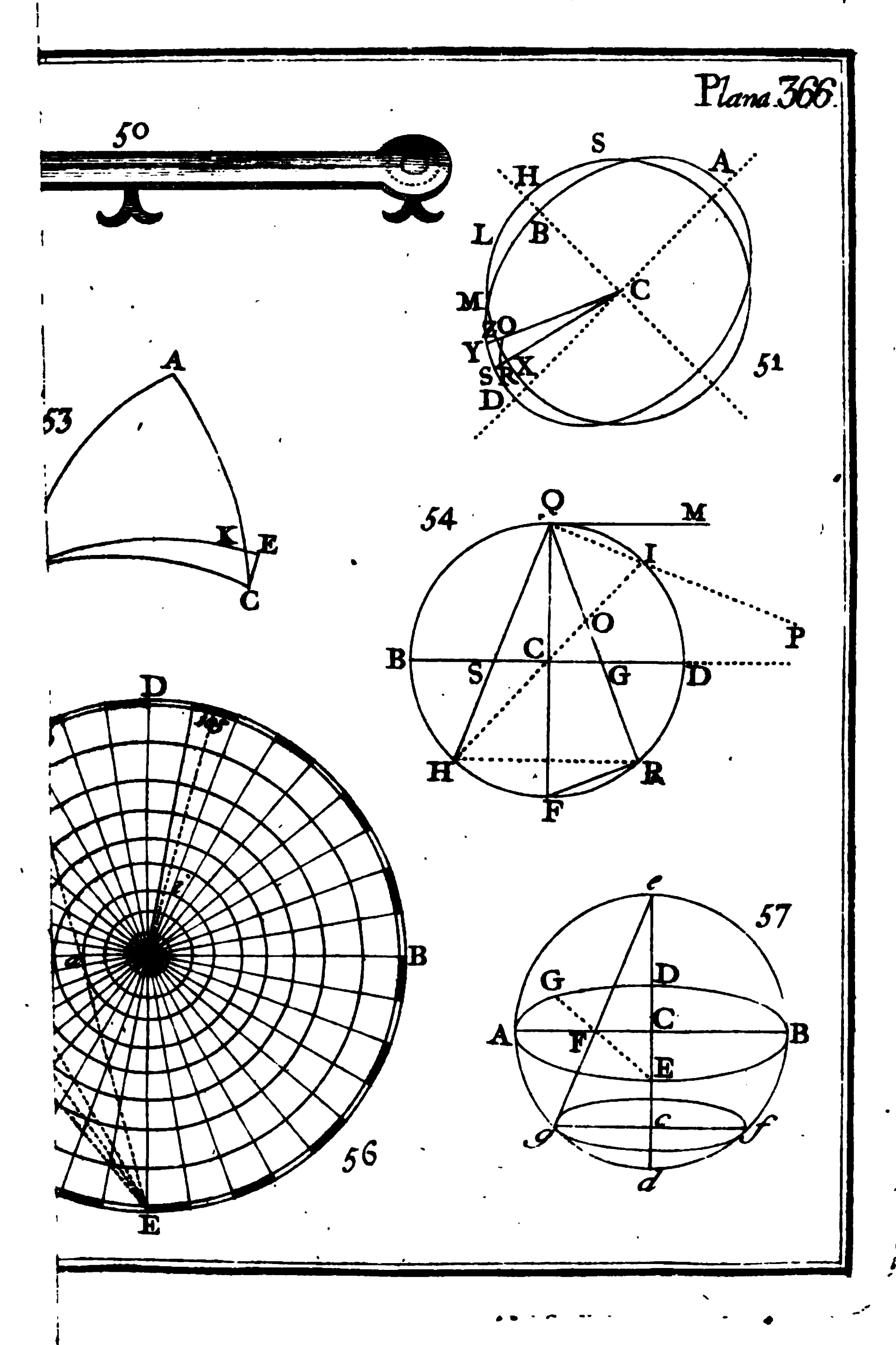
tá

Fig. ta al rededor del ege *AB*, hasta confundirse con el círcu-
57. lo *AEDB*, el punto *e* caerá en *E*, y el punto *g* en *G*, y será *AG* = *Ag* y *AE* = *Ae*. Por consiguiente para determinar el punto se debe *F* tomar en el equador la distancia del paralelo *AG*, y tirar desde el punto *E* una recta que corte en *F* la proyeccion del meridiano *AB*, ó el diámetro del equador.

463 *II. Método* que supone el ojo colocado en el plano del equador, y distante el radio de la Tierra del plano de proyeccion.

58. 1.° Desde el centro *C*, con un radio arbitrario *AC*, trácese el círculo *ADBE*, que represente el primer meridiano, y será el plano de la proyeccion, suponiendo el ojo colocado en el polo del primer meridiano, ó á 90° de distancia de este círculo. 2.° Trácese desde el mismo centro otro círculo muy poco distante del primero, y divídase su periferia en 360.° 3.° Tírese la recta *AB* que representará el equador, y á esta la perpendicular *ED* que representará el meridiano, en cuyo plano está el ojo, el principio del equador estará en *A*, y los polos en *E* y *D*. 4.° Desde el punto *E* tírense á cada diez grados de los quadrantes *AD* y *BD* las rectas *E* 10, *E* 20, *E* 30 &c. y por los puntos de interseccion de la recta *AB*, y por los polos *E* y *D* trácense los arcos *D* 10 *E*, *D* 20 *E*, *D* 30 *E* &c. y estos serán los meridianos. Si desde el punto *D* se tiran á cada veinte grados las rectas *Da*, *Db*, *Dc* &c. se señalarán mas facilmente

en



Plana 366.
50
51
S
A
H
L
B
C
M
ZO
Y
X
SR
D
53
A
K
E
C
54
Q
M
I
O
P
B
C
S
G
D
H
R
F
56
D
B
E
57
e
D
G
C
A
F
B
E
g
c
f
d

en la *CB* los centros de los arcos *D* 10 *E*, *D* 20 *E*, Fig.
D 30 *E* &c. 5.° Tírense del mismo modo desde *B* á cada 58.
diez grados de los quadrantes *AD* y *AE* lineas rectas para dividir la proyeccion *DE* del meridiano en los grados correspondientes, y por estos puntos de interseccion, y los grados correspondientes del meridiano tírense como antes arcos, estos arcos serán los paralelos. *6.°* Como los arcos del meridiano *A* 10, *A* 20, *A* 30 &c. corresponden á las declinaciones de los paralelos, síguese que por el mismo método se podrian trazar los trópicos y los círculos polares. 7.° Y si se supone que la eclíptica corta el equador en el punto donde está el ojo, el ojo estará en el plano de la eclíptica, y la representará la linea *NL*. Los demás puntos se podrán señalar por medio de las ascensiones rectas y declinaciones dadas, suponiendo en *A* el principio de Aries, del mismo modo que se colocan los lugares en un plano por medio de su longitud y latitud. 8.° Ultimamente para colocar estos lugares, cuéntese en el semicírculo *ADB* del primer meridiano la longitud *A* 120, y tírese la recta *E* 120, y por *E*, *i* y *D* el meridiano *DiE*. En el quadrante *AD* cuéntese la latitud *A* 10, y tirando la recta *B* 10 por 10, *m* y 170 trácese el paralelo 10 *m* 170. El lugar propuesto estará en la seccion comun *O*.

La razon de esta operacion se funda en lo dicho.

464 Veamos ahora *cómo se forma el mapa de una parte del mundo como Europa, Asia &c.* ó cómo se traza

en

Fig. en grande una parte del Mapamundi ó mapa general.

59. Esto se egecuta trazando una linea recta *AB* que represente el meridiano del lugar, en cuyo plano se coloca el ojo; á esta linea se trasladarán las distancias que en el mapamundi hay entre los paralelos, pero duplicándolas, triplicándolas, &c. conforme hubiere de ser el tamaño del mapa. Por cada grado de latitud se trazarán los paralelos *CD*, *EF*, *GH* &c. con radios duplos, triplos &c. de los radios con los quales están trazados en el mapa universal. Traslådense del mapa general á los paralelos las distancias de los meridianos, y por los puntos que en ellos se determinaren, trácense los meridianos. Finalmente se señalarán los lugares del mismo modo que en el mapa universal.

465 Ultimamente, para *formar el mapa de un pais particular*,

Se construirá un paralelogramo rectángulo del tamaño del mapa. Se dividirán las latitudes *AC* y *BD* en tantas partes iguales quantos grados cogiese la latitud del pais propuesto, y se tirarán paralelas á las lineas *AB* y *CD*. Porque como los grados de latitud son grados del meridiano ó de un círculo máximo de la Tierra, son todos iguales unos con otros, y la latitud del pais se puede tomar por una linea recta, por ser un arco de pocos grados. Por la misma razon los paralelos se pueden pintar como lineas rectas. Traslådense desde *C* á *D*, y desde *A* á *B* los grados de longitud que cogiere el pais, cuyos grados por serlo

de

de los paralelos, son menores que los grados de latitud, é iguales entre sí en cada paralelo. Por los grados correspondientes de longitud tírense rectas que corten las primeras, estas rectas serán arcos del meridiano. Los puntos cuya longitud y latitud son conocidas se señalan del mismo modo que en el mapa general; es á saber en el punto de interseccion de los meridianos y los paralelos. Háganse *DE* y *CF* iguales á la latitud del punto propuesto, y tírese la recta oculta *FE*. Háganse despues *AG* y *CH* iguales á la longitud del punto dado, y tírese la recta oculta *GH*. El punto de interseccion *I* de estas dos lineas será el del lugar propuesto. Una vez que se sepa á qué distancia de dos puntos *K*, *I* señalados en el mapa está otro lugar *L*, y á qué lado cae, se determinará el lugar que le corresponde, tirando desde *I* y *K* ácia *L* dos rectas que se cortarán en *L*, determinando tambien quantas leguas se le señalan á cada grado. Ultimamente añádasele al mapa el pitiple ó escala correspondiente. Fig. 60.

466 Quando el país que el mapa ha de representar fuere de corta estension, en latitud por lo menos, se forma el mapa de otro modo que le representará mas á lo natural.

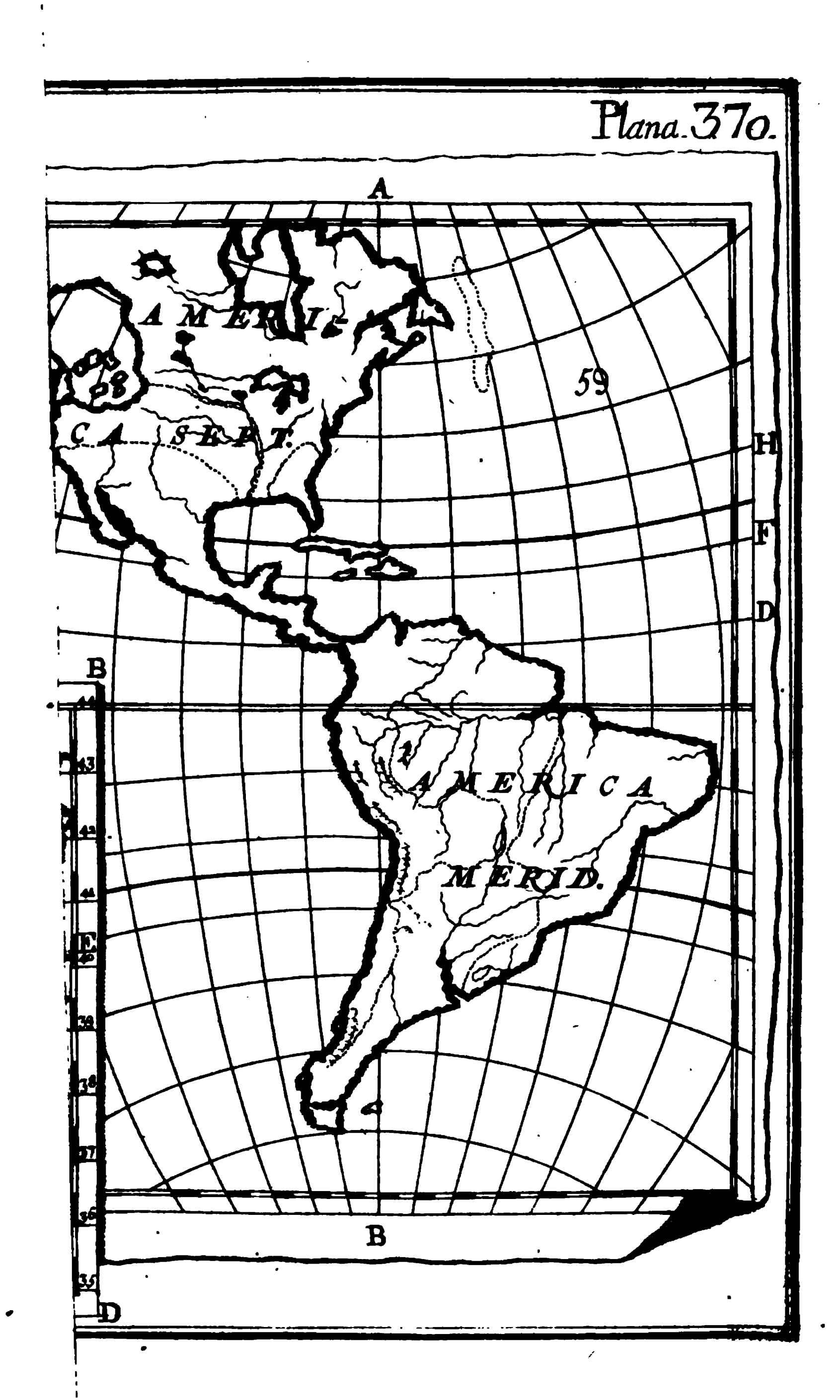
Supongamos que *PEp*, *PQp* sean los dos meridianos estremos del espacio propuesto, y que *MN* y *RS* sean sus dos paralelos estremos. Desde los puntos medios *I*, *K* de los arcos *MR* y *NS* que son la diferencia de latitud, se conciben tiradas las tangentes *IT*, *KT*, que encuentran el 61.

Fig. ege *Pp* en el punto *T*. Por ser de pocos grados los arcos
61. *MR* y *NS*, se confunden sensiblemente con las tangentes *IT*, *KT*; y el espacio *MRSN* se puede considerar como una porcion de la superficie de un cono recto cuyo vértice está en *T*; por consiguiente para representar este
62. espacio resuelto en un plano, se traza con un radio igual á *TI* un arco *KI* de tantos grados quantos coge la diferencia de longitud que hay entre los dos meridianos; y despues de tiradas las *TIM* y *TKN*, al uno y otro lado de los puntos *I*, *K* se toman las rectas *IM*, *IR*, y *KN*, *KS*, iguales respectivamente á los arcos *IM*,
61. *IR*, ó á sus cuerdas que no discrepan notablemente. Despues se dividen *MR* y *NS* en tantas partes iguales quantos grados hay en la diferencia de latitud; por cada punto de division, y desde el centro *T* se trazan otros tantos arcos que representan otros tantos paralelos. Finalmente, se divide tambien el arco *IK*, en tantas partes iguales, quantos grados coge la diferencia de longitud, y tirando por los puntos de division y el punto *T* lineas rectas, estas representarán los meridianos; hecho esto, se señala cada lugar donde pide su longitud y latitud.

De los Mapas Hydrográficos ó Marinos.

467. Llámanse *Mapas Hydrográficos* los que representan una porcion de la mar, y son de un uso continuo en la navegacion. Para dar á entender mejor los funda-

men-



Plana. 370.
A
59
H
F
D
B
AMERICA
MERID.
E
B
D

mientos de su construccion, haremos primero algunas consideraciones sobre la formacion de los mapas generales y particulares. Fig.

468 En lo propuesto (462 y sig.) se echa de ver que todos los meridianos se dirigen á un mismo punto. En los mapas generales (464) las partes del globo están en perspectiva; y ni los grados del equador ni los del meridiano son representados por partes iguales. En los otros mapas (465 y 466) los meridianos son lineas rectas; los grados de longitud son iguales entre sí, y los grados de latitud tambien iguales entre sí, bien que distintos de los grados de longitud que ván menguando al paso que crece la latitud. Por consiguiente los últimos mapas representan las partes del globo de un modo mucho mas natural que los otros. No son sin embargo los que sirven en la navegacion para representar el rumbo que se ha seguido ó se quiere seguir. Como este rumbo forma constantemente un mismo ángulo con todos los meridianos que atraviesa, no se podría pintar sino como una linea curva, si los meridianos no fuesen paralelos en el mapa; y se haría muy complicada la reduccion de los rumbos. Con el fin de vencer esta dificultad se inventaron los mapas planos, cuya construccion es como sigue.

469 Quedándose las cosas como antes (466), si imaginamos que por los puntos *I*, *K* del paralelo medio, se han tirado las dos rectas *AB* y *CD* paralelas al 62.

Fig. meridiano *GT* que pasa por el medio *G* del mismo paralelo,
62. los mapas planos se distinguirán de los otros (466) en que para eximirnos de atender á la diminucion de los paralelos, desde *M* á *R*, suponemos todos estos paralelos iguales al paralelo medio *IK*; con esto los paralelos *MR*, *NS* se convierten en las rectas *AB*, *CD* paralelas á *GT*; y estando el punto *T* á una distancia infinita, los arcos *MN*, *IK*, *RS* se transforman en rectas *AC*, *IK*, *BD* perpendiculares á *GT*; de donde se saca la siguiente construccion.

63. Se tirará á arbitrio una linea *QT* que represente el meridiano que ha de pasar por medio del mapa, se le dividirá en tantas partes iguales quantos grados cogiere la diferencia de latitud. En el medio *G* se levantará la perpendicular *IGK* que representará el paralelo medio; y para determinar quanto han de coger de largo *GI* y *GK*, á fin de que señalen los grados de diferencia en longitud, tendremos presente que (III.679) las longitudes de los arcos de un mismo número de grados, tomados en distintos paralelos, son proporcionales á los cosenos de las latitudes de los mismos paralelos; por cuyo motivo, con un radio
64. *CA* igual á la cantidad que se ha tomado para representar un grado del meridiano, que tambien representa un grado del equador, trazaremos el arco *AB* de tantos grados quantos cogiere la latitud media; despues se bajará á *CA* la perpendicular *BP* que determinará *CP*, y esta será la cantidad de cada grado del paralelo. Porque en el

el triángulo rectángulo *CBP*, tenemos *CB* ó *CA* : *CP* :: *R* : sen *CBP* ó cos *BCP*; pero el radio *R* es el coseno de la latitud 0° del equador. Por consiguiente trasladaremos *CP* desde *G* ácia *I* y ácia *K* tantas veces quantos grados hubiere en la mitad de la estension que há de coger el mapa en longitud; tirando despues por todos los puntos de division de *QT* paralelas á *IK*, y por todos los puntos de division de *IK*, paralelas á *QT*, estarán señalados los paralelos y los meridianos, y será fácil señalar los lugares en virtud de su longitud y latitud. Fig. 63.

470 No hay duda en que para la navegacion son mas acomodados estos mapas que los demás, pero hemos de convenir en que son tanto menos exactos, quanto mayor es la diferencia en latitud, y mayor al mismo tiempo la latitud media. Dan los grados de los paralelos muy chicos por un lado, y muy grandes por otro.

Para remediar este defecto, dejando paralelos los meridianos, se han discurrido los *Mapas reducidos*, cuyo uso es acomodado y seguro al mismo tiempo.

471 Los mapas reducidos que representan todo el globo, ó por lo menos su contorno en la direccion del equador, no son otra cosa que la resolucion de un cilindro que imaginamos circunscripto á la Tierra, y cuyo diámetro es por consiguiente el mismo que el del equador, pero infinitamente largo. No son como algunos de los ma-

Fig. pas de que hemos hablado hasta aquí, una proyeccion ó una perspectiva perteneciente á un punto solo. El fin de su construccion no es otro que hacer paralelos los meridianos, sin mudar no obstante la razon entre las partes del meridiano y las de los paralelos.

Para conseguirlo, en vez de disminuir la estension de los grados de los paralelos, al paso que crece la latitud, se les dá constantemente la misma cantidad; se hacen iguales con los grados del equador, de donde resulta forzosamente que los meridianos son paralelos. Pero al mismo tiempo se les dá á los grados de un círculo máximo qualquiera del globo, un valor mayor á medida que el paralelo de que se trata está á una latitud mayor. Por consiguiente, como la cantidad de un grado tomado en un paralelo qualquiera, es á la de un grado tomado en el equador, ó en general, á la de un grado de círculo máximo, como el coseno de la latitud es al radio (III. 679), ó como el radio es á la secante de la latitud (I. 649); si hacemos constantemente el grado de cada paralelo igual al grado del equador, será preciso, quando se tratáre de un punto situado á una latitud qualquiera, contar el grado de círculo máximo, como si su valor fuera el de un grado del equador aumentado en la razon del radio á la secante de la latitud, esto es, multiplicado por la secante de la latitud, dividida por el radio.

Sentado esto, se echa de ver que si en los mapas reducidos, los grados de los paralelos son todos iguales á

los

los del equador, los grados del meridiano ó de latitud no deben ser iguales, y que será preciso crezcan á medida que fuere creciendo la latitud. Pero no porque sean, según se supone, *MN* y *RS* dos porciones de paralelos distantes un grado, se puede inferir de lo dicho poco ha, que el arco *NS* de un grado, medida de la distancia de los dos paralelos, se haya de espresar en el mapa con una linea igual al grado del equador multiplicado por la secante de latitud, dividida por el radio. Con efecto, es constante que en *N* el grado de círculo máximo ha de valer $\frac{D \times \sec QN}{R}$, siendo *D* el grado del equador; pero por lo mismo en el punto *S* el grado ha de valer $\frac{D \times \sec QS}{R}$: como estas dos cantidades no son iguales, no pueden ser ni una ni otra la medida de la distancia de los dos paralelos. La una es mayor, y la otra menor de lo que corresponde. Pero si en vez de suponer los dos paralelos distantes un grado, los suponemos distantes un minuto no mas; entonces el valor del minuto en *N* será $\frac{M . \sec QN}{R}$, siendo *M* el minuto del equador, y el valor del minuto en *S* será $\frac{M . \sec QS}{R}$, cuyas cantidades discrepan muy poco una de otra, y se podrán tomar indistintamente por el valor del minuto de *N* á *S* ó del intervalo que se debe dejar en el mapa reducido entre los dos paralelos.

Fig. 61.

472 Se echa, pues, de ver que para calcular los aumentos que se les debe dar á las partes del meridiano, respecto de los que se dán á los paralelos en la forma-

Fig. cion de los mapas reducidos; se debe considerar el meridiano dividido en partes muy pequeñas, y multiplicando el valor de una qualquiera de estas partes por la secante de la latitud dividida por el radio, se saca el valor que ha de tener dicha parte en el mapa de reduccion; y será tanto mas exacta la operacion, quanto menor fuere la espresada parte.

La exactitud es suficiente quando se supone el meridiano dividido en minutos. Por consiguiente para determinar la estension que se le debe dar al meridiano á fin de señalar una latitud determinada, basta tomar en las tablas todas las secantes de minuto en minuto desde 0°, hasta el grado de latitud de que se trata. Dividiendo la suma de estas secantes por el radio, se sacará un número de minutos, el qual trasladado desde el equador sobre el meridiano, determinará el grado de la latitud de que se trata con bastante exactitud.

Estas partes del meridiano se llaman *partes meridionales*; y se llaman *latitudes crecientes* las latitudes que señala este métedo.

473. Para la construccion de los globos celestes y terrestres es preciso hacer grabar unos *segmentos* que tambien son una especie de proyeccion ó una resolucion del

65. globo. El ege *PC* de esta curva es igual al quadrante de la circunferencia del globo; los intervalos de los paralelos en el ege *PC* son todos iguales, los radios de los círculos *KDI* que representan los paralelos son iguales con las

las cotangentes de las latitudes (459), y los arcos de cada uno como *DI* son iguales con corta diferencia al número de grados del ancho del segmento (que por lo comun es de 30°), multiplicados por el seno de la latitud. Sería, pues, muy facil trazarlos, pero hace trabajosa esta operacion la alteracion que padecen los segmentos al encolarlos en el globo, y el determinar quanto menos se debe estirar el papel en los lados que en medio, por ser mas largos los lados, para que quadre puntualmente con el espacio que ha de cubrir. Fig. 65.

474 Para trazar los segmentos siguen los oficiales el método siguiente. Tiran en el papel una linea *AC* igual á la cuerda de 15°, que forma la mitad del ancho del segmento, y una perpendicular *CP* igual al triplo de la cuerda de 30°, que forma la mitad de lo que ha de coger de largo; porque los papeles, cuyas dimensiones fueren iguales á las cuerdas, son iguales á los arcos mismos, quando se les encola en el globo.

Se divide la altura *CP* en 9 partes, quando se quieren tirar los paralelos de 10 en 10 grados; tambien se divide en 9 partes iguales el quadrante de círculo *BE*; por cada punto de division, qual es *G*, del quadrante de círculo, y por el punto correspondiente *D* de la recta *CP*, se tiran perpendiculares *HGF* y *DF*, cuyo concurso en *F* determina uno de los puntos de la curva *BFP* que terminará la circunferencia del segmento. Despues de determinados por este medio muchos puntos de la curva se traza

el

Fig. 65. el contorno *PIB* con una regla curva. Con esta construccion se le dan al segmento dimensiones que siguen como en el globo la razon de los cosenos de latitud. Estos anchos se supone que se tomen perpendicularmente á *CD*; esto no es muy exacto, pero no es posible hacer por una operacion rigurosa un plano que se ajuste á una superficie curva, y que en una linea recta *AB* forme lineas *PA*, *PC*, *PB* iguales entre sí, conforme deben serlo en el globo. Para trazar el círculo *KDI* que está á 30° del equador, se toma ácia arriba un punto distante de *D* la cantidad de la tangente de 60°, tomándola ó en las tablas ó en un círculo igual á la circunferencia del globo que se quiere construir; este punto servirá de centro para el paralelo *DI* que ha de pasar por el punto *D*, porque se le supone igual al de un cono circunscripto al globo, y que le tocára en el punto *D*.

Los meridianos se trazarán de 10 en 10 grados, dividiendo cada paralelo como *KI* en 3 partes en los puntos *L* y *M*, y tirando desde el polo *P* por todos estos puntos de division curvas que representen los meridianos que están entre *PA* y *PB*, quales son *BR* y *ST*.

58. La eclíptica *AQ* se traza por medio de la declinacion conocida de los diferentes puntos del equador, tomándola en alguna tabla; para 10° es de 3° 58′; para 20° es de 7° 50′ = *BQ*; para 30° es de 11° 29′ &c.

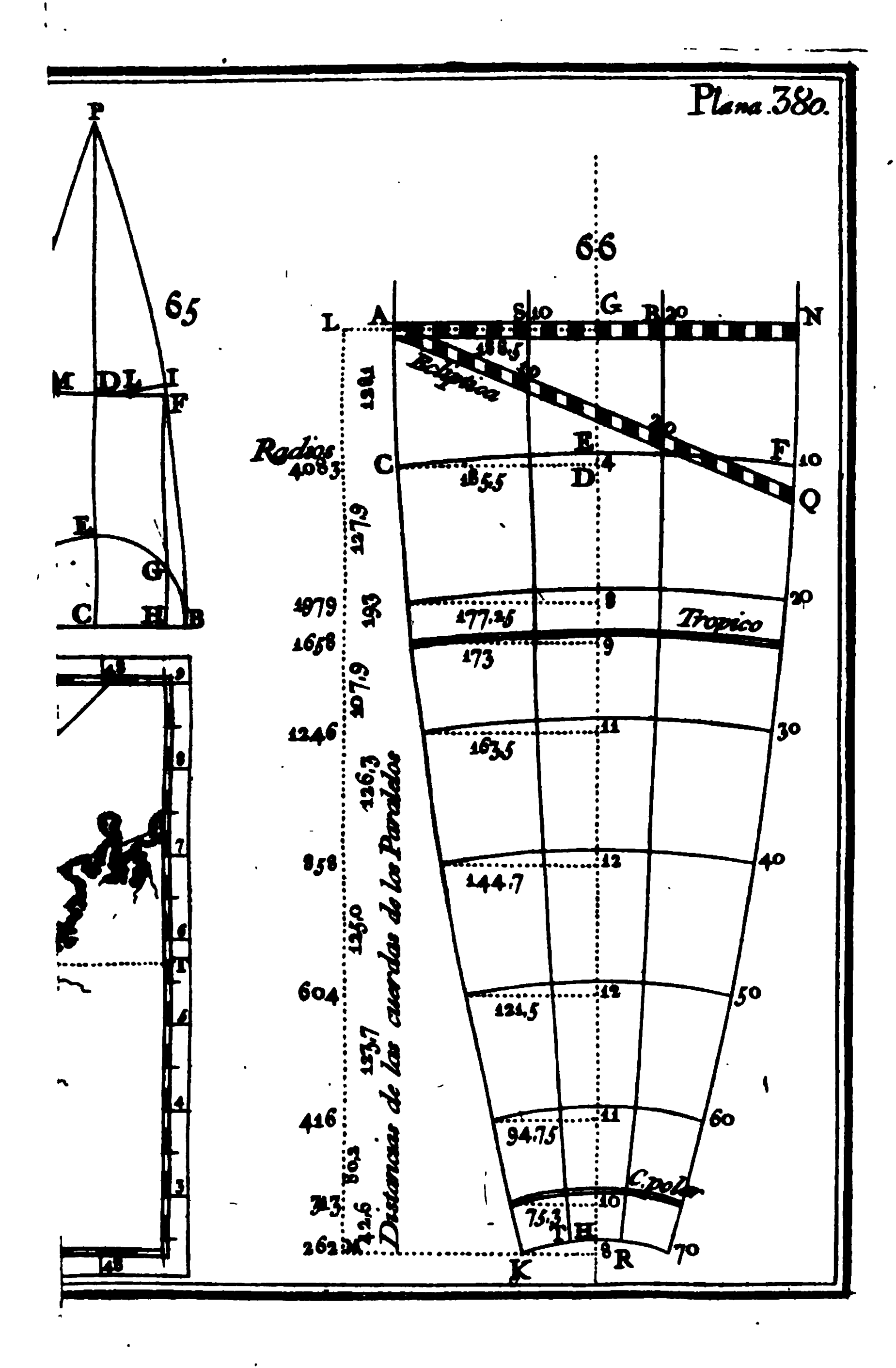
En

475 En general se ha observado que el papel en el qual se estampan los mapas, y que los Franceses llaman *Colombier*, se encoge $\frac{1}{72}$, ó una linea en seis pulgadas, uno con otro, despues de secarse la estampa; este inconveniente se debe precaver al tiempo de grabar los segmentos, si no obstante fuesen muy cortos los segmentos, se remediará con quitarle al globo todo al rededor un poco de la capa de blanco que le cubre; y así llega á ser del tamaño correspondiente á los segmentos estampados. Lo mas singular es que despues de encolado el segmento para pegarle al globo, el ege *GH* se alarga, y el lado *AK* se acorta, de modo que ni el lado *ACK*, ni el ege *GEH* del segmento cogen de largo el quadrante de una circunferencia de globo, quando se consideran en el cobre, ó en los números apuntados en la figura. Fig. 66.

476 Mr. Bonne despues de hacer muchos esperimentos acerca de las dimensiones que les quedan á los segmentos despues de mojados con cola para pegarlos al globo, particularmente con el papel llamado del *nombre de Jesus*, que gastó para la construccion de su globo de un pie de diámetro, ha hallado que á los segmentos se les deben dar en el cobre las dimensiones apuntadas en la figura. Suponiendo que el radio del globo sea de 720 partes, la mitad del ancho del segmento es $AG = 188\frac{5}{10}$; la distancia *AC* para el paralelo de 10° tomándola en la recta *LM* es de 128,1; el corto desvío del paralelo de 10° en medio del segmento, ó la sagita *ED*, es de 4; la linea *ABN* es

Fig. es recta ; el radío del paralelo de 10° ó del círculo *CEF* es de 4083 , y así de lo demas. El casquetillo circular que se pone debajo de *H* tiene por radio 253, y no 247 como correspondía, si su radio hubiera de ser el seno de 20°.

ELE-



65
66
Radios
Ecliptica
Tropico
C.polar
Distancias de las cuerdas de los Paralelos

Fig.

ELEMENTOS DE GNOMÓNICA.

477 LA *Gnomónica* enseña como se trazan reloges solares y lunares en qualesquiera superficies, y particularmente en las superficies planas. Fúndanse todos sus preceptos en la Astronomía, porque las lineas que se trazan en los reloges representan los círculos de la esfera; por egemplo, las lineas *horarias* que señalan las horas, representan los círculos horarios, por ser estas lineas las intersecciones de los círculos horarios con la superficie del relox.

478 Antes de individualizar las diferentes especies de reloges de sol, los únicos de que nos proponemos tratar, daremos á conocer algunas cosas cuyo conocimiento es fundamental en este asunto.

Llamamos *Estilo* ó *Gnomon* una varilla de hierro plantada en el plano del relox, cuyo vértice ó estremo superior señala las horas con sù sombra. El estilo puede ser perpendicular ú oblicuo al plano; pero mas vale que sea oblicuo, quando solo ha de servir para trazar el relox, y no para señalar las horas; quando es perpendicular se le llama *Estilo recto*.

479 Hay dos cosas que reparar en el estilo, su altura y su pie. La *altura del estilo* es una linea que se concibe tirada desde el estremo del estilo perpendicularmente

al

Fig. al plano; quando el estilo es recto, su altura no se distingue de su longitud.

480 El *pie del estilo* es el punto del plano al qual va á parar dicha perpendicular. Por consiguiente quando el estilo es perpendicular al plano, su pie está en el mismo punto donde encuentra el plano.

481 Por *ege* del relox entendemos una varilla de hierro ú otra cosa que pasa por el vértice del estilo, y es paralela al ege del mundo; el punto donde este ege prolongado encuentra el plano del relox, se llama el *centro* del relox. Pero quando el ege es paralelo al plano del relox, no le puede encontrar (I. 323), y entonces el relox no tiene centro.

482 Quando el estilo solo sirve para trazar algunas lineas del relox, y determinar algunos puntos, y despues se quita para plantar un ege; se llama estilo *espurio*, para distinguirle del verdadero, que sirve algunas veces en lugar del ege para señalar las horas; pero en este caso solo la sombra del vértice del estilo señala las horas, siendo así que el ege las señala con toda su sombra.

483 El centro del relox es, segun dejamos dicho, el punto del plano por donde pasa el ege. Las lineas horarias, si se prolongan, pasan todas indispensablemente por el centro del relox quando le tiene.

484 Para dar á entender esta verdad, advertiremos que el ege del relox se puede considerar como el ege del mundo ó el ege de la tierra, y el estremo ó vértice del es-

estilo como el centro de la tierra; podemos, pues, imaginar los círculos horarios puestos al rededor de dicho estremo que es su centro. Como el ege es un diámetro comun de dichos círculos, todos los planos de los expresados círculos pasan por todos los puntos de dicho ege. Luego han de pasar por el centro del relox, por ser este un punto comun al ege y al plano del relox. Una vez que los planos de los círculos horarios pasan por dicho centro, es preciso que las lineas horarias que son las intersecciones de los mismos círculos con el plano del relox, lleguen al mismo centro; por ser evidente que estas lineas pasan por los mismos puntos del plano del relox, que los planos de los círculos horarios. Fig.

485 No puede seguirse error substancial ni aun leve de considerar el estremo del estilo como el centro de la tierra, y el ege del relox como el ege del mundo; porque la distancia de dicho estremo al centro de la tierra es insensible en comparacion de la distancia inmensa que hay entre la tierra y el sol.

486 Síguese de aquí que la sombra del ege ó del estremo del estilo dando en las lineas horarias, señala las horas; porque la sombra de un cuerpo siempre está al lado opuesto del cuerpo luminoso que le alumbra. Pero quando el Sol corresponde á un círculo horario, la linea horaria que representa este círculo es opuesta al Sol respecto del ege ó el vértice del estilo, pues este ege ó vértice está entonces entre el Sol y dicha linea horaria, que

es

Fig. es la interseccion del plano con el círculo horario. Luego la sombra del ege ó del vértice del estilo dá en las lineas horarias á las quales corresponde el Sol; luego esta sombra señala las horas.

487 En todo el estilo no hay mas punto que su vértice que esté en el plano de los círculos horarios; este es por consiguiente el único punto que esté entre el Sol y las lineas horarias; luego solo la sombra del vértice del estilo señala las horas. Al contrario, la sombra de toda la longitud del ege cae en las lineas horarias; esta es la razon porque el ege es mejor que el estilo para señalar las horas.

488 La *Linea meridiana* es la interseccion del plano del relox con el meridiano del lugar, cuyo meridiano concebimos que pasa por el vértice del estilo. Esta linea es la misma que la de 12 horas, porque es medio dia quando el Sol corresponde al meridiano. La meridiana pasa por el centrò del relox, una vez que pasan por allí todas las lineas horarias (484).

489 Llámase *substilar* la interseccion del plano del relox con un meridiano que le es perpendicular, de cuyo meridiano nos hemos de figurar que el plano pasa por el vértice del estilo. En los reloges horizontales, esto es, los que están trazados en un plano paralelo al orizonte, esta linea no se distingue de la meridana, porque el meridiano perpendicular á un plano orizontal no se distingue del meridiano del lugar. Por la definicion de la substilar se echa

de

de ver que ha de pasar por el pie del estilo, porque una vez que se origina del plano de un meridiano perpendicular al plano del relox; dicho círculo, esto es, su plano no puede pasar por el vértice del estilo sin pasar tambien por su pie cogiendo toda la áltura del estilo, que es perpendicular al plano del relox. Fig.

490 La substilar se llama en algunas ocasiones *Linea meridiana del plano, porque representa el meridiano del plano*, esto es, el que es perpendicular al plano del relox. Pero no se debe equivocar esta meridiana del plano con la meridiana del lugar (488). Para dar á conocer la diferencia que hay entre estas dos lineas, supondremos un cuerpo de madera que tenga una cara plana, en la qual plantaremos un estilo perpendicular, en cuyo caso el pie del estilo será el punto mismo del plano que dicho estilo encuentra. Si dicha cara plana estuviere en una situacion orizontal, la meridiana será la misma linea que la substilar, porque siendo entonces el meridiano del lugar perpendicular al plano, es tambien el meridiano del mismo plano. Pero si se inclina un poco dicho plano ácia el oriente ó el occidente, al rededor de una linea paralela al orizonte, que se dirija del norte al sur, el meridiano del lugar que siempre se supone que pasa por el vértice del estilo, no encontrará el pie, pero cortará el plano mas abajo del mismo punto, y por consiguiente la linea meridiana estará debajo del pie del estilo; pero la substilar siempre pasará por este punto, pues se origina del meridiano que es perpendicu-

Fig. lar al plano, y encuentra el vértice del estilo. Por consiguiente, sea que se le dé la vuelta al plano al occidente ó al oriente, de modo que forme ángulos oblicuos con el orizonte, la meridiana prolongada hasta el centro del relox será inferior á la substilar. Por consiguiente, quando se bajare el lado oriental del plano, la meridiana estará al oriente de la substilar; y quando se bajare el lado occidental, la meridiana estará al occidente de la substilar.

491 La *Equinoccial* es la interseccion del plano del relox con la equinoccial, ó lo que es lo propio, con un plano paralelo al equador, y se concibe que pasa por el vertice del estilo. En los reloxes orizontales esta linea es, segun se verá, perpendicular á la meridiana, porque el meridiano y el equador se cortan en ángulos rectos, y el meridiano es perpendicular al orizonte.

492 La substilar siempre es perpendicular á la equinoccial en todos los reloxes, porque estas dos lineas representan dos círculos que se cortan perpendicularmente, es á saber, un meridiano y el equador; el meridiano cuya interseccion forma la substilar, es perpendicular al plano del relox.

493 El *Radio del equador* ó el *Radio equinoccial* es una recta tirada desde el estremo del estilo al punto donde la linea equinoccial encuentra la substilar. Dásele á esta linea el nombre de equinoccial, porque el estremo del estilo desde donde se tira, se considera como el centro del equador; y el otro punto en donde remata esta linea, se

con-

considera como el punto de contacto de la circunferencia Fig.
del equador con el plano del relox.

494 Podemos representar en un plano, sea el que fuere, la mitad del cielo, es á saber, aquella á la qual está puesto de cara. Si el plano fuere orizontal, la mitad del cielo que en su superficie se puede trazar estará toda sobre el orizonte. Por lo que mira á los planos verticales, la mitad del cielo que pueden representar, la divide por medio el orizonte, estando la una mitad mas arriba, y la otra debajo del mismo orizonte.

495 Para determinar en qué punto del plano, en el qual suponemos plantado un estilo, se debe señalar un punto particular de la mitad del cielo que en dicho plano se puede representar, es preciso imaginar una recta tirada desde dicho punto del cielo por el estremo del estilo, el punto del plano donde rematare esta linea será el que representará el punto del cielo, desde el qual se supusiere tirada la linea.

496 Síguese de aquí que *los círculos máximos de la esfera se han de representar en el plano con lineas rectas*; porque como el vértice del estilo no dista sensiblemente del centro de la Tierra, por razon de la inmensa distancia á que estamos del Sol, se puede mirar dicho punto como el centro de todos los círculos máximos de la esfera. Luego todas las lineas rectas tiradas desde los puntos de la circunferencia de cada círculo al vértice del estilo están en el plano del mismo círculo, pues son sus radios; luego todas

Fig. estas lineas prolongadas hasta el plano donde está plantado el estilo, rematarán en puntos que estarán en la interseccion de este plano con el plano del círculo. Y como la interseccion de un plano con otro es una recta, síguese que todos los puntos donde remataren las lineas tiradas desde la circunferencia de un círculo máximo, estarán en una linea recta. Luego la representacion de este círculo máximo ó de su circunferencia será una linea recta.

497 Las lineas rectas que representan los círculos máximos de la esfera perpendiculares al plano del relox siempre pasan por el pie del estilo; porque estos círculos pasan por el vértice del estilo, pues le consideramos como el centro de la esfera ó del mundo. Y como por otra parte los suponemos perpendiculares al plano del relox, del mismo modo que la altura del estilo, es preciso que tambien pasen por todos los puntos de esta altura, y por consiguiente por su pie; luego las lineas rectas que son las intersecciones de estos círculos con el plano del relox, han de pasar por el mismo pie.

498 Por el contrario las lineas rectas que representan los círculos máximos de la esfera oblícuos al plano del relox, no pasan por el pie del estilo. Porque como estos círculos pasan por el vértice del estilo, si pasáran tambien por su pie, serian perpendiculares al plano, contra lo supuesto.

499 La *Linea orizontal* es la interseccion del plano del relox con un plano orizontal que se supone que pasa por

por el vértice del estilo. De esto se deduce que no hay linea orizontal en el relox del mismo nombre; pero la hay en los reloges verticales. Muy en breve daremos á conocer unos y otros. Fig.

500 La linea orizontal pasa por el pie del estilo (497) de los reloges verticales, porque el plano orizontal es perpendicular al plano vertical.

501 Todos los puntos que están en la parte inferior de la mitad del cielo ácia la qual está de cara un plano vertical, se han de representar mas arriba de la linea orizontal, y los que están en la parte superior se han de representar en la parte de abajo. Así, quando en la parte septentrional del mundo el plano vertical está vuelto ácia la mitad del cielo donde está el polo meridional, el centro del relox que es el punto del plano que representa dicho polo, está mas arriba de la orizontal, porque el polo meridional está debajo del orizonte. Por el contrario, quando el relox está de cara al norte, el centro ha de estar debajo de la orizontal. Se hará cargo de todo esto el que imaginare líneas tiradas desde dicho punto del cielo al plano del relox, pasando por el vértice del estilo.

502 La *Vertical del plano* es la interseccion del mismo plano con un círculo vertical perpendicular al plano, y que pasa por el vértice del estilo. A este círculo se le llama el *Vertical del plano*. La vertical del plano pasa por el pie del estilo (497), porque el círculo que la forma es perpendicular al plano.

Fig. 503 Esta vertical del plano siempre es perpendicular á la orizontal en los planos así verticales como inclinados; porque como todo círculo vertical es perpendicular al orizonte, y el vertical tambien lo es al plano del relox, es preciso que las intersecciones que forman en el plano del relox el círculo vertical y el orizonte, sean tambien perpendiculares una respecto de otra.

504 Llámase *Linea de seis horas* la interseccion del plano del relox con el sexto círculo horario, al qual el meridiano corta perpendicularmente. Esta linea de seis horas pasa indefectiblemente por el punto de interseccion de la linea equinoccial y de la linea orizontal, quiero decir, que estas tres lineas tienen un mismo punto de interseccion quando se cortan; porque en la esfera el sexto círculo horario, el equador y el orizonte, se cortan en una misma linea que por consiguiente es la interseccion comun de estos tres círculos. En los reloges meridionales y septentrionales estas tres lineas son paralelas entre sí, porque todas tres son perpendiculares á la meridiana, conforme se dirá despues.

505 Todas las líneas de que hemos hecho mencion se determinan respecto del vértice del estilo, porque se supone que todos los círculos máximos pasan por este punto que es su centro. Por este motivo, si un plano orizontal que no pasára por el vértice del estilo, encontrára el plano en el qual se traza el relox, la linea de interseccion sería una linea orizontal; porque sería paralela al ori-

zon-

zonte; pero no sería la que hemos llamado la orizontal del relox. Fig.

506 Finalmente, en la Gnomónica se distinguen dos alturas del polo, la una respecto del orizonte del lugar, la otra respecto del plano del relox. La primera es, segun dejamos dicho (VII. 110), el arco del meridiano comprendido entre el polo y el orizonte. Para imponerse en lo que es la segunda, es menester figurarse el plano prolongado hasta el cielo, y entonces la altura del polo sobre el plano será el arco del meridiano perpendicular al plano, comprendido entre el polo y el plano. Este meridiano es el mismo cuya interseccion con el plano del relox forma la substilar, y por este motivo el ángulo que forma la substilar con el ege es igual á esta altura del polo, porque á este ángulo le mide el mismo arco.

507 Todo esto presupuesto, los reloges trazados en superficies planas son de varias especies, bien que nosotros solo trataremos de las dos principales, que son los reloges orizontales y los verticales.

El *Relox orizontal* es el que se traza en un plano orizontal; este relox es de mucho mas uso que los demás, porque señala todas las horas del dia en todas las estaciones del año. En este relox la substilar se confunde (489) con la meridiana del lugar.

508 Los *Reloges verticales*, aquellos cuyos planos son perpendiculares al orizonte, quales son los que se construyen en las superficies de las paredes de los edificios,

Fig. que son sensiblemente verticales, unos son *Regulares*, y otros *Irregulares*. De los quatro regulares, dos se trazan en el plano del primer vertical (es el que pasa por el punto de interseccion del equador y del orizonte, y corta á ángulos rectos el meridiano en el zenit) el uno en la superficie que mira al mediodia, por cuyo motivo se llama *Meridional*; el otro en la superficie que mira al norte, por cuya razon se le llama *Septentrional.* Los otros dos se trazan en la superficie del meridiano, estando el uno en la superficie que mira al oriente, y se le llama *Oriental*; el otro en la superficie que mira al poniente, y se le llama *Occidental.*

509 Los *Reloges verticales irregulares* son los que declinan respecto del primer vertical, esto es, los que forman con este círculo ángulos oblicuos. Así, la *Declinacion* de un relox es lo mismo que el ángulo oblicuo comprendido entre el primer vertical y el plano del relox. Sea, por
67. egemplo, *AB* el plano del relox, ó por mejor decir la interseccion de este plano con el orizonte *PSVM*; *PV*, el primer vertical: la declinacion será el ángulo *ACP* ó *BCV*, cuya medida es el arco orizontal *AP* ó *BV*.

510 La declinacion tambien se puede tomar por el ángulo que forma el meridiano con el círculo vertical del plano, esto es, el vertical perpendicular al plano propuesto. Así, para determinar la declinacion del plano *AB* por medio del meridiano *SM*, se tirará la linea *FG* perpendicular á la linea *AB*, entonces el ángulo *SCF* ó *GCM* será la de-

declinacion del plano. Para probarlo, todo está en demostrar que el ángulo *SCF* es igual al ángulo *ACP* ó *BCV*; y esto es muy facil. El ángulo *ACF* es recto, porque suponemos la linea *FG* perpendicular al plano *AB*; el ángulo *SCP* es tambien recto, porque el primer vertical corta el meridiano en ángulos rectos. Por consiguiente si de estos dos ángulos rectos se resta el ángulo comun *ACS*, los residuos *SCF* y *ACP* serán iguales, y se pueden tomar uno por otro. Luego podemos llamar declinacion del plano el ángulo comprendido entre el plano y el primer vertical, ó el que forma el meridiano con el círculo vertical del plano. Fig. 67.

La figura está diciendo que la declinacion de un plano es el complemento del ángulo que dicho plano forma con el meridiano; *ACP*, por egemplo, es el complemento del ángulo *SCA* por razon del ángulo recto *SCP*.

511 Todo plano declinante qual es el que *AB* representa, es de dos especies, el uno mira oblicuamente al norte *S*, y el otro mira al sur *M*. Si se trata de un plano vuelto ácia el septentrion *S*, puede declinar ácia el oriente ó ácia el occidente; lo propio sucede con el plano vuelto ácia el mediodia. Si el punto *P* señala el oriente y el punto *V* el occidente, el plano *AB*, en quanto está vuelto ácia el septentrion, declina al occidente ácia el punto *V*; pero si la linea *AB* representa un plano que mire al mediodia, declinará al oriente; esto es, ácia el punto *P* ácia el qual está vuelto oblicuamente. En todo esto supo-

Fig. ponemos que el círculo *PSVM* representa el orizonte.

.67. 512 Los planos que miran oblicuamente al mediodía, y declinan ácia el oriente ó el occidente, se llaman comunmente *declinantes del mediodia al oriente* ú *occidente*; los otros que miran oblicuamente al norte, se llaman *declinantes del septentrion al oriente* ú *occidente.* Pero esto podría dar á entender que la declinacion es la distancia del plano al meridiano, siendo así que es la distancia del plano al primer vertical cuya medida es *AP.* Por esta razon llamaremos *Planos del mediodia declinantes ácia el oriente* ú *occidente* los que miran oblicuamente al mediodia, y *Planos del septentrion declinantes al oriente* ú *occidente* los que miran oblicuamente al norte.

513 Hemos supuesto que un plano vertical puede mirar oblicuamente al septentrion ó al mediodia. Esto tambien sucede en el modo comun de entenderlo, quando la meridiana *SM* que pasa por dichos dos puntos es oblicua á la linea *AB*, que representa el plano vertical.

514 Para dar á conocer el *Centro divisor* de que se hará algun uso en adelante, conviene recordar que los círculos máximos de la esfera se representan en un plano con lineas rectas que pasan por el pie del estilo, quando representan círculos perpendiculares al plano (497), siendo así que pasan al lado de este punto quando los círculos son oblicuos al plano (498). El centro divisor de una de estas lineas es un punto tan distante de esta linea como el vértice del estilo; y aun es preciso que la dis-

tan-

tancia que hay desde el centro divisor de una linea y sus diferentes puntos sea igual á la del vértice á los mismos puntos. De donde se sigue que si desde el centro divisor se tiran lineas á dos de sus puntos, el ángulo que forman es igual al que formarian lineas tiradas desde el vértice del estilo á los mismos puntos. Y recíprocamente, si estos ángulos son iguales y un lado de cada uno remata en un mismo punto, el otro lado de cada ángulo rematará tambien en un mismo punto. Supongamos que la linea *EG* represente un círculo máximo; *S*, el vértice del estilo; *D*, el centro divisor, si el ángulo *PDH* fuere igual á *PSH*, y *PD*, *SP* remataren en el punto *P*, los otros dos lados *DH* y *SH* rematarán tambien en un mismo punto *H*. Sentado esto, Fig. 68.

515 El *Centro divisor* de una rectá que representa un círculo en un plano, es un punto que está á la misma distancia de dicha linea que el vértice del estilo, con tal que dicho punto esté en una linea tirada desde el pie del estilo perpendicularmente á la primera que representa el círculo. Mas adelante se verá que son muchos los puntos que se pueden tomar por centro divisor. Este punto es muy facil de determinar en los dos casos que pueden ocurrir.

516 1.° Si la linea pasa por el pie del estilo, como la linea *EG* que representa el círculo *EFG*; desde el pie del estilo, esto es, desde el punto *P*, se levantará la *PD* perpendicular á la linea *EG* igual con la altura del estilo, el estremo *D* de esta perpendicular será el centro divisor

de

Fig. de la linea *EG*. Porque es evidente que este punto *D* está
68. á igual distancia de la linea *EG* que el estremo superior del estilo, pues la perpendicular *PD* es igual á la altura del estilo.

517 2.° Pero si la linea *EG* no pasare por el pie
69. del estilo, desde el pie del estilo *P* se tirarán dos lineas, la una perpendicular á la recta *EG*, prolongándola indefinitamente mas allá de la linea *EG*, qual es *PBD*; la otra, paralela á la misma linea *EG*, y por consiguiente perpendicular á la primera *PBD*, é igual con la altura del estilo, qual es la linea *AP*. Hecho esto, se tirará la hypotenusa *AB*, y desde el punto *B* se tomará la *BD* igual con esta hypotenusa, el punto *D* será el centro divisor de la linea *EG*.

518 Nos toca probar que el punto *D* está á la misma distancia de la linea *EG* que el vértice del estilo. Para esto basta figurarse que la altura del estilo es perpendicular al plano en el qual está trazada la linea *EG*, y que el triángulo *APB* está levantado perpendicularmente al mismo plano, de modo que el lado *AP* forma una misma linea con la altura *SP*. En esta hypótesi la linea *AB*, que llegará á ser perpendicular á la *EG*, bien que oblicua al plano, medirá la distancia del estremo *S* á la linea *EG*, porque los dos puntos *A* y *S* se confundirán por ser igual la linea *AP* con la altura *SP*. Fuera de esto, la linea *BD* es tambien igual por construccion á la base *AB*, y perpendicular á la linea *EG*, luego el punto *D* dista tanto de la linea *EG*, como el estremo *S* del estilo. Luego &c.

Por

519 Por consiguiente, para *determinar el centro divisor de una recta que no pasa por el pie del estilo*; 1.° se tirará por el pie del estilo una linea indefinita perpendicular á la linea *EG* cuyo centro divisor se busca; 2.° otra linea recta *PA* que sea paralela á la misma linea *EG*, perpendicular á la primera linea tirada, é igual con la altura del estilo; finalmente se trazará la hypotenusa *AB*. Hecho esto, se tomará la *BD* igual á la hypotenusa *AB*, el punto *D* será el centro divisor de la linea *EG*. Fig. 69.

520 El centro divisor de la *GE* se puede tomar ácia *D* ó ácia *Z*, con tal que sea una perpendicular que pase por el pie del estilo; y si imaginamos un plano que pase por el vértice del estilo y corte perpendicularmente la linea *EG*, y sobre este plano una circunferencia cuyo centro sea el punto de concurso del plano con la linea, y el radio sea la distancia de dicho punto al vértice del estilo, podremos considerar cada punto de esta circunferencia como el centro divisor de la linea, porque estará á igual distancia que el vértice de todos los puntos de esta linea, cuyo vértice podemos considerar como el centro divisor general de todas las lineas que representan círculos máximos cuyo centro es dicho vértice. 68. 69.

521 Para enterarse del destino del centro divisor, conviene tener presente que como la representacion de un círculo máximo de la esfera, ó de su mitad es (496) una linea recta trazada en el plano del relox, tambien una porcion de dicha linea representa un arco del espresado círculo.

Pe-

Fig. Pero si desde el centro divisor de una linea se la tiran dos radios, la parte comprendida entre los radios representará un arco de círculo que medirá el ángulo que dichos radios formaren, cuyo vértice está en el centro divisor.
68. Por egemplo, si desde el centro *D* de la *EG* que pasa por el pie del estilo, se tiran los radios *DP* y *DI*, la parte *PI* de la *EG* representará el arco que mide el ángulo *PDI*. Porque el vértice *S* está en el centro del círculo máximo *EFG* que la línea *EG* representa, pues consideramos el vértice del estilo como el centro de la esfera. Sentado esto, hágase el ángulo *PSL* igual al ángulo *PDI*, y prolónguense los lados *PS* y *LS* hasta que encuentren la circunferencia *EFG* en los puntos *Z* y *F*; por estar el ángulo *FSZ* en el centro *S*, su medida será el arco *FZ*; pero los ángulos *FSZ* y *PSL* son iguales por opuestos al vértice. Luego la medida del ángulo *PSL* es el mismo arco *FZ*; y como el ángulo *PDI* es igual por construccion al ángulo *PSL*, tambien su medida será el arco *FZ*. Pero la parte *PL* que es la base del ángulo *PSL*, representa un arco, pues el arco y la base están comprendidos entre las mismas líneas *FL* y *ZP* que concurren en el centro del círculo. A mas de esto, la base *PI* es igual á la base *PL*; porque los dos triángulos *DPI* y *SPL* son ambos rectángulos, y tienen iguales los ángulos *D* y *S*, y los lados *DP* y *SP*; luego serán iguales. Luego la base *PI* del ángulo *PDI* representa el arco *FZ*, que le mide. Del mismo modo probaríamos que la parte *PH* representa el arco *XZ*; y por lo mismo

que

que la otra parte *HL* representa el arco *FX*. Fig.

522 Lo mismo se probará y del mismo modo, si 69.
se tratare del centro divisor de una linea que no pasa por el pie del estilo. En este caso no se prolongará la linea *SP*, sí la linea *AB*, que es preciso figurarse perpendicular á la linea *EG* (518); entonces no se debe imaginar el círculo *EFG* echado en el plano donde está trazada la *EG*, como si se juntáran en un mismo plano, pero se le debe imaginar oblicuo á dicho plano, de modo que forme con él un ángulo igual al ángulo *ABP*; quando la linea *EG* pasa por el pie del estilo, es preciso figurarse que el círculo es perpendicular al plano.

523. *Los centros divisores de dos círculos que se cor-* 70.
tan ó de dos lineas que los representan, están á igual distancia del punto de interseccion. Sea *CM* la meridiana; *EN*, la equinoccial que se cortan en el punto *M*, los centros divisores *H* y *A* están equidistantes del punto *M*.

Porque si imaginamos la altura *PS* del estilo en su situacion natural, elevado perpendicularmente en el plano del relox, en este supuesto, los centros divisores de todas las lineas están á la misma distancia de dichas lineas que el vértice del estilo, que es el centro de la esfera; el centro *H*, por egemplo, está á la misma distancia de la linea *CM* que el vértice *S* del estilo, por la naturaleza del centro divisor. Luego si nos figuramos los triángulos *LHM* y *BAM* inclinados al plano, y descansando en las bases *LM* y *BM*, de tal modo que los vértices *H*, *A* se confundan

en

Fig. en *S*; las dos líneas *HM* y *AM* serán una sola y misma li-
70. nea. Luego los puntos *H* y *A* están á la misma distancia del punto *M*.

524 Síguese de aquí que los centros divisores de las líneas horarias y de todas las que representan meridianos, están á la misma distancia del centro del relox, porque todas se cortan en dicho centro.

525 Hemos dicho (520) que se puede tomar el vértice del estilo por el centro divisor de todas las líneas que representan círculos máximos, y por consiguiente por el centro divisor de la substilar. En virtud de esto, la distancia del centro del relox al centro divisor de la substilar es la parte del ege comprendida entre estos dos puntos; por consiguiente como la substilar representa un meridiano, dicha parte del ege es la distancia del centro del relox al centro divisor de todas las lineas horarias, y de todas las que representan meridianos. Pero podemos tomar el estremo del ege por el vértice del estilo, imaginando que el pie del estilo es un punto de la substilar al qual vá á parar una perpendicular tirada desde dicho estremo. Por consiguiente, en este caso la distancia del centro del relox al centro divisor de todas las lineas horarias será la longitud del ege.

De los Reloges orizontales.

Para la cabal inteligencia de lo que vamos á proponer acerca de la construccion de estos reloges, ense-

señaremos primero cómo se construye el relox equinoccial. Fig.

526 Por ***Relox equinoccial*** entendemos aquel cuyo plano es paralelo al equador, y forma por lo mismo con el orizonte un ángulo agudo igual á la elevacion del equador sobre el orizonte, cuya elevacion es el complemento (VII. 138) de la altura del polo. En la parte del mundo que habitamos, el relox equinoccial se llama *Superior* quando está de cara al norte; y se llama *Inferior* quando está de cara al mediodia.

527 Cuestion I. ***Trazar un relox equinoccial superior ó inferior.***

1.° Desde el centro *C* trácese la circunferencia de círculo *AEDF*, y divídasela en quatro partes iguales con tirarla dos diámetros perpendiculares entre sí *AB*, *EF*; divídase despues la semicircunferencia *EBF* en doce partes iguales, empezando desde el punto *E* ó *F* (I. 803). Hecho esto, se tirarán lineas horarias desde el centro *C* á cada punto de division, prolongándolas mas allá del centro hasta la otra semicircunferencia, que con esto estará dividida en otras doce partes iguales. Finalmente, se plantará en el centro un estilo perpendicular al plano del relox. 71.

528 Si la situacion del plano del relox fuere tal que estando el punto *A* arriba, la línea *ACB* esté en el plano del meridiano, y el relox paralelo al plano del equador, y vuelto ácia el septentrion, la sombra del estilo que con esto será paralelo al ege de la Tierra, señalará las horas antes y despues del mediodia en la primavera y el

Fig. 71. estio, y el relox será equinoccial superior. Si con lineas horarias se divide igualmente otra superficie del mismo cuerpo paralela á la primera, que esté de cara al mediodia, la sombra del estilo señalará las horas en otoño é invierno en la misma superficie, y el relox será equinoccial inferior.

529 Para que el plano sea paralelo al equador, y esté directamente de cara al polo del mundo, es menester que el estilo plantado perpendicularmente en la superficie del relox forme con una meridiana orizontal un ángulo igual á la altura del polo. Suponemos aquí que el estilo corresponda de un estremo á otro encima de la meridiana.

530 La razon de esta construccion es muy obvia. Porque como la circunferencia está dividida en 24 partes iguales por lineas horarias, cada arco coge 15° (VII. 153). Y como el equador está dividido por los doce círculos horarios en veinte y quatro arcos iguales, cada uno coge tambien 15°. Por consiguiente ya que el plano del relox es paralelo al equador, y se puede tomar su centro por el centro mismo de la Tierra, por ser tanta la distancia á que estamos del Sol; y como por otra parte la linea *ACB* está en el plano del meridiano, las lineas horarías trazadas son las intersecciones de los círculos horarios. Fuera de esto, por ser el estilo perpendicular á dicho plano, es un diámetro comun á todos estos círculos horarios, porque es paralelo al ege de la Tierra, y se puede tomar por el ege mismo. Luego este estilo está en el plano de todos los círculos horarios. Por consiguiente quando el Sol está sobre el orizon-

te,

te, y en algun círculo horario, es preciso que la sombra del ege ó del estilo se dirija al lado opuesto al dicho círculo horario, y por lo mismo á la linea horaria, que es la interseccion del espresado círculo con el plano del relox; luego la sombra del estilo señalará las horas. Fig.

531 Quando el plano del relox estuviere de cara al polo elevado sobre nuestro orizonte, solo señalará las horas en la primavera y el estío, porque solo en estas dos estaciones el Sol anda la parte septentrional del cielo. Por una razon contraria el relox equinoccial inferior no señalará las horas sino en invierno y otoño; y para que sirva todo el año un relox equinoccial, será preciso sea á un mismo tiempo inferior y superior.

532 En toda especie de reloges las horas de por la mañana se han de señalar en la parte occidental, porque esta es la parte opuesta al Sol respecto del estilo por la mañana; y por la misma razon las horas de por la tarde se han de señalar en la parte oriental.

533 Cuestion II. *Dada la altura del polo trazar un relox orizontal en un plano movible.*

Se tirará á arbitrio la linea *CM*, y la tomaremos por la meridiana, en cuyo punto *C* señalaremos el centro del relox; desde *C* tiraremos la *CS* que forme con *CM* el ángulo *SCM* igual á la altura del polo, y desde el punto *S* tiraremos la *SM* que forme con la *CS* un ángulo recto *CSM*. Desde el mismo punto *S* tiraremos tambien la *SP* perpendicular á *CM*, y por el punto *M* de la misma linea *CM* tira- 72.

Cc 2 re-

Fig. remos la perpendicular *EN* que será la equinoccial (491),
72. y despues tomaremos *AM* igual á *SM*, que es el radio equinoccial; y desde el centro *A* con un intervalo á arbitrio trazaremos la circunferencia *FMGH*, y la dividiremos en 24 partes iguales, empezando desde el punto *M*, cada una de las quales será por consiguiente de 15.° Desde el centro *A* se tirarán á los puntos de division radios prolongados hasta la linea *EN*, que la cortarán en los puntos *VII*, *VIII*, *IX*, *X*, *XI*, *XII*, *I*, *II*, *III*, *IV*, *V*; finalmente se tirarán desde el centro *C* á estos puntos las lineas *C VII*, *C VIII*, *C IX* &c. y estas serán las lineas horarias. Por consiguiente si plantamos en el punto *C* un estilo oblicuo que forme con la meridiana un ángulo igual á la elevacion del polo, ó si levantamos en el punto *P* un estilo perpendicular, cuya parte fuera del plano sea igual con *SP*, ó si plantamos una chapa triangular, cuyos lados sean iguales á los del triángulo *CSP*, perpendicular al plano del relox, rematando su lado *CS* en el centro *C*, donde forme con dicho plano el ángulo de la elevacion del polo; estará hecho el relox orizontal, con tal que el plano movible esté en situacion orizontal, y la linea *CM* colocada de modo que sea una meridiana orizontal, cuyo estremo *C* esté del lado del mediodia, y el otro estremo *M* del lado del septentrion.

534 La linea *CM* se puede poner de dos modos en la situacion que hemos dicho 1.° trazando una meridiana en la superficie en que se ha de colocar el plano del re-

lox,

lox, y prolongándola mas allá del sitio que coge este plano. 2.° Dando vuelta al plano del relox, si fuere movible, hasta que la sombra del estilo dé en la hora que entonces fuere, y bueno será que sea la de las doce. Esta hora se podrá saber ó por medio de un buen relox arreglado por el sol una ó dos horas antes, ó por medio de una meridiana. Fig. 72.

Daremos la razon de la operacion. En el triángulo rectángulo *CSM*, el ángulo *M* es complemento del ángulo *C*; pero por la construccion este ángulo *C* es igual á la altura del polo; luego el ángulo *M* ó *CMS* es igual á la elevacion del equador. Sentado esto, supongamos que el triángulo *CSM* trazado sobre el plano orizontal esté elevado perpendicularmente á este plano, y que el semicírculo *FGM* esté levantado de tal modo que su radio *AM* cayga sobre el lado *SM* del triángulo *CSM* puesto perpendicularmente, de modo que el punto *A* se confunda con el punto *S*. Puesto el semicírculo en esta situacion representará un relox equinoccial, cuyo ege será el lado *CS* prolongado ácia el punto *X*, y los radios del círculo serán las lineas horarias. Luego si estos radios se prolongan hasta la linea equinoccial *EN*, la sombra del ege caerá á cada hora en cada punto de interseccion de esta linea con los radios. Fuera de esto, el centro *C* del relox orizontal es otro punto de la misma sombra, pues el ege pasa por dicho punto; por consiguiente, ya que la sombra se propaga en una linea recta, de la qual conocemos dos puntos, si desde el centro *C* tiramos lineas rectas á los puntos de interseccion

Fig. *VII*, *VIII*, *IX* &c. estas serán las lineas horarias.

72. 535 Si por el centro *C* tiramos la linea *VI C VI* perpendicular á la linea meridiana *CM*, esta perpendicular será la linea horaria de las *6* de la mañana y las *6* de la tarde, porque el círculo de *6* horas es perpendicular al meridiano; y como el meridiano es perpendicular al orizonte, es preciso que las intersecciones de estos círculos con el orizonte se corten tambien en ángulos rectos (I. 548).

536 El ángulo *SCP* que el ege forma con la meridiana, es tanto menor quanto menor es la altura del polo, pues por la construccion este ángulo es igual á la altura del polo; y quando este ángulo es muy pequeño, entonces el centro del relox dista mucho de la altura *SP* y de la equinoccial *EN*, por poco grande que sea la altura *SP*. Esta es la razon porqué en este caso las lineas horarias se acercan al paralelismo; esto sucede en la zona tórrida cerca del equador, donde es muy corta la latitud que siempre es igual (VII. 165) á la altura del polo.

537 Quando se construya un relox orizontal en la esfera recta (VII. 174), las lineas horarias se han de trazar paralelas entre sí, porque siendo el ege del mundo paralelo al orizonte de dicha esfera, no puede cortar el plano orizontal del relox, y por lo mismo no tiene el relox ni centro ni linea de seis horas, que sería inutil en la espresada esfera, porque allí siempre nace el Sol á las seis de la mañana, y se pone á las seis de la tarde. Al trazar este relox se debe tomar la distancia *AM* igual á la

al-

altura del estilo, por cuyo pie es tambien preciso que pase Fig.
la equinoccial. Las lineas horarias han de ser perpendiculares á la equinoccial del mismo modo que la meridiana ó substilar; á no ser así, las lineas horarias no serian paralelas á la meridiana, que es la linea horaria de 12 horas.

538 Si en lugar del estilo se plantare una chapa para señalar las horas en la esfera recta, se la deberá plantar en la meridiana perpendicularmente al plano del relox, de modo que el borde superior que representa el ége del mundo, sea paralelo al relox; entonces dicho borde señalará las horas con su sombra, con tal que la altura de la chapa que está fuera del plano sea igual al radio *AM*. A este relox se le llama *Polar*, porque su plano se dirige á los dos polos del mundo.

539 En la práctica de los reloges orizontales es provechoso tirar dos lineas meridianas paralelas entre sí, cuya distancia sea igual al grueso de la hoja de hierro ú cobre que ha de servir para señalar las horas, y entonces la una de las dos aristas de la cara superior de la chapa señala las horas de por la mañana, y la otra arista señala las de por la tarde. En este caso tendrá el relox dos centros, y las lineas horarias de por la mañana se deberán trazar respecto de la una de las dos meridianas que fuere mas occidental, y las de por la tarde respecto de la otra. Exceptuamos sin embargo las lineas horarias de por la mañana que son antes de las seis, las quales han de pasar por el mismo centro que las de por la tarde, porque la linea

Fig. de las cinco de la mañana, por egemplo, es la misma linea prolongada que la de las cinco de la tarde. Por la misma razon las lineas horarias que señalan las horas despues de las seis de la tarde, han de pasar por el mismo centro que las de antes de las doce. La práctica de tirar dos lineas meridianas es tanto mas indispensable quanto mas gruesa es la chapa.

73. 540 La figura representa un relox trazado de este modo, en el qual las lineas horarias de por la mañana están trazadas respecto de la meridiana *cm* y del centro *c*; y las de por la tarde se refieren á la meridiana *CM* y al centro *C*.

541 Quando se quisieren señalar las horas con una chapa triangular; antes de plantarla en el plano del relox,
74. será preciso tirar una linea como *CP* en dicha chapa ácia la parte inferior, que forme con el borde *SC* un ángulo *SCP* igual á la altura del polo, esta linea manifestará si la chapa está plantada en el plano como corresponde, porque ha de ser paralela al plano, y á mas de esto el vertice del ángulo *SCP* ha de estar en el centro del relox; dicha hoja ha de ser tambien perpendicular al plano del relox. Con un compas se averiguará facilmente si está la chapa en esta situacion; basta saber si el punto *S* está á igual distancia de los puntos 10 y 2 de la equinoccial, ó de los puntos 9 y 3.

542 Cuestion III. *Dada la altura del polo sobre el orizonte, hallar los ángulos horarios* MCI, MCII, MCIII *&c. del*

del relox orizontal, ó sus iguales MCXI, MCX &c. Fig. 72.

La cuestion se resuelve por esta analogía:

Como el seno total

Es al seno de la altura del polo,

Así la tangente del ángulo horario MAI *ó* MAII &c.
en el relox equinoccial

Es á la tangente del ángulo horario MCI *ó* MCII &c.
en el relox orizontal.

Porque en el triángulo rectángulo *CMI* del relox orizontal, siendo el lado *CM* el seno total, tenemos (I.667) $CM : MI :: R :$ tang MCI que es el ángulo horario. En el triángulo *AMI* del relox equinoccial, siendo *AM* el radio, tenemos tambien $AM : MI :: R :$ tang MAI. De la primera analogía sacamos CM . tang $MCI = R . MI$, de la segunda AM . tang $MAI = R . MI$; luego sacamos CM . tang $MCI = AM$. tang MAI, y de aquí $CM : AM ::$ tang $MAI :$ tang MCI. Pero $AM = SM$ por el supuesto, luego tendremos $CM : SM ::$ tang MAI ; tang MCI. Y como *SM* es el seno del ángulo *MCS* ó de la altura del polo, siendo *CM* el radio, la última proporcion se reduce á la que, segun hemos dicho, resuelve la cuestion.

543 Los ángulos *MAI*, *MAII* &c. del relox equinoccial son iguales á la distancia del Sol al meridiano á la una, á las dos &c. se podrían, pues, substituir estas distancias en lugar de los ángulos. Por otra parte la latitud siempre es igual á la altura del polo; luego la proporcion propuesta se reduce á estotra: *El seno total es al seno de*

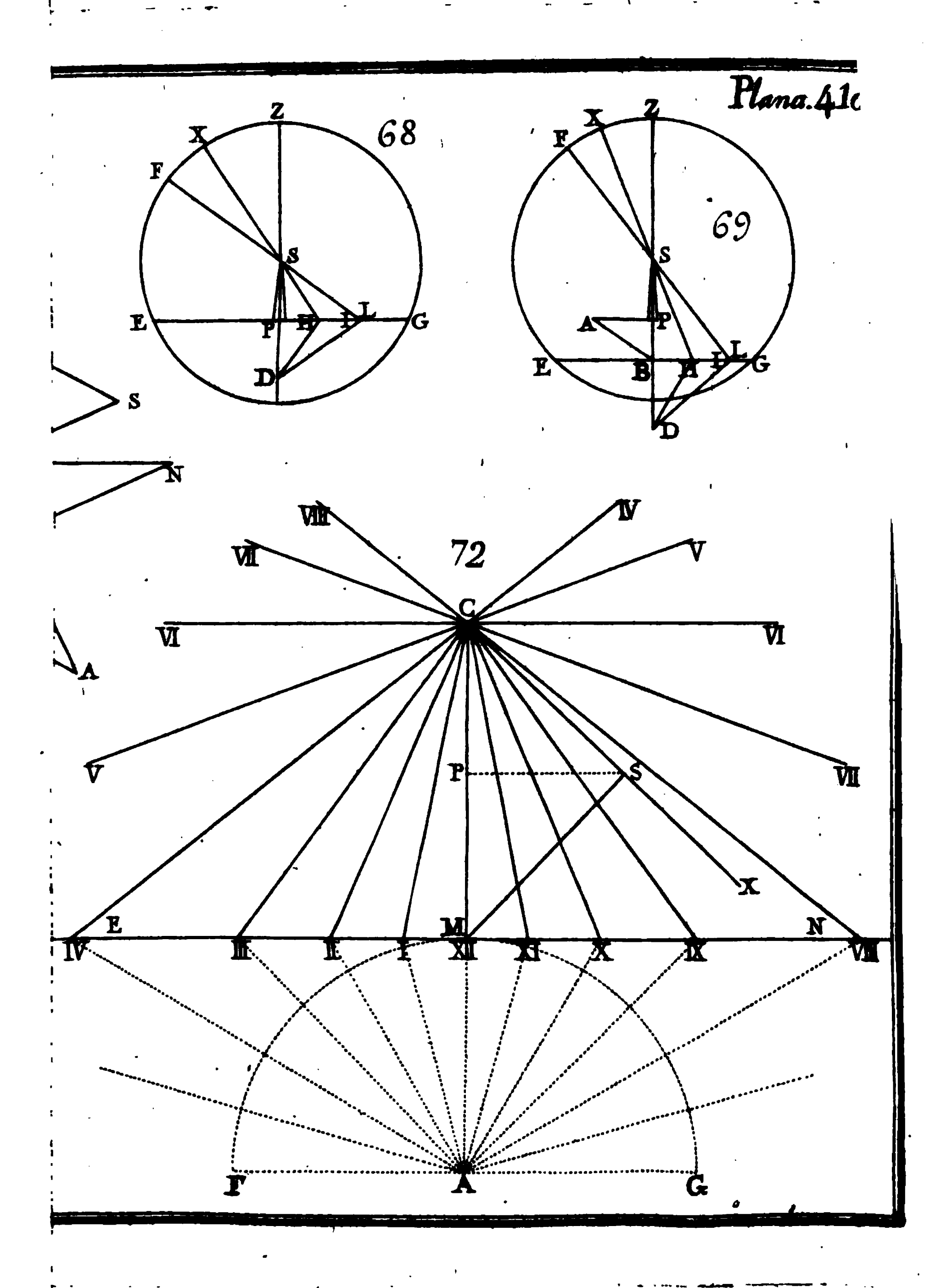
la

Fig. *la latitud, como la tangente de la distancia del Sol al meridiano á una hora dada, es á la tangente del ángulo horario orizontal que corresponde á la misma hora.*

544 En todos los reloges orizontales que están debajo de un mismo paralelo al equador, los ángulos horarios del uno son iguales á los ángulos correspondientes del otro, pero no sucede lo mismo quando los reloges orizontales están en distintos paralelos; porque los ángulos de los reloges de un paralelo mas próximo al equador son menores que los ángulos de los reloges de un paralelo mas distante. Esto lo manifiesta la analogía demostrada, pues su quarto término es menor á proporcion que lo es el segundo, y este, que es el seno de la latitud, es menor quando es menor la latitud.

545 No obstante, un relox orizontal hecho para una latitud determinada, podrá servir en otra latitud. Por egemplo, un relox hecho para la latitud de 50° podrá servir en la latitud de 40°, con tal que en esta latitud se incline el relox de modo que sea paralelo al orizonte de 50° de latitud debajo del mismo meridiano, y esté en la situacion que corresponde respecto de norte, sur, oriente y poniente. Porque en este caso se podrá considerar el relox como que está en el plano del orizonte del 50^mo grado; pero este relox será inclinado por lo mismo respecto del orizonte del grado 40.

546 Quando se quiere colocar en un lugar propuesto un plano paralelo al orizonte de otro lugar que está debajo


68
Z
X
F
S
E
P
H
I
L
G
D
69
Z
X
F
S
A
P
E
B
H
I
L
G
D
72
VIII
IV
VII
V
C
VI
VI
V
P
S
VII
X
E
M
N
IV
III
II
I
XII
XI
X
IX
VIII
F
A
G

jo del mismo meridiano, y en distinta latitud; se procura Fig.
que dicho plano forme con el orizonte del lugar donde está, un ángulo igual á la diferencia de las latitudes de los dos lugares. Por egemplo, para colocar á la latitud de 40° un plano de modo que sea paralelo al orizonte de un lugar que está á la latitud de 50° debajo del mismo meridiano, se ha de colocar dicho plano en tal situacion que forme un ángulo de 10° con el orizonte del lugar donde está, por manera que el vértice de dicho ángulo esté del lado del norte, y la base ácia el sur; pero si se hubiese de colocar á la latitud de 50° un plano paralelo al orizonte de 40°, sería preciso que el vértice del ángulo mirára al sur, y la base al norte.

De los Reloges verticales.

Los reloges verticales son, segun digimos antes (508), unos regulares y otros irregulares; tratarémos, pues, separadamente de unos y otros.

De los Reloges verticales regulares.

547 Son quatro no mas los reloges que componen esta clase: 1.° el relox meridional, 2.° el septentrional, 3.° el oriental, y 4.° el occidental.

548 I. Un relox meridional se traza del mismo modo que un relox orizontal, con la diferencia de que el ege del primero forme con el plano del relox un ángulo igual con la elevacion del equador, y no con la altura del

Fig. del polo respecto del orizonte. El centro de este relox es superior respecto de la linea orizontal (501), porque representa el polo meridional, que en la parte septentrional de la tierra siempre está debajo del orizonte. Por lo mismo el estremo del ege que se vé fuera del plano mira ácia la tierra.

549 Para dar á entender por qué el ege forma con el plano de este relox un ángulo igual á la elevacion del equador, ó al complemento (VII. 138) de la altura del polo respecto del orizonte del lugar propuesto, basta con-
75. siderar que la linea *CH* representa la parte del ege del mundo compreendida entre el orizonte *HR*, y el plano meridional *CP*, que es perpendicular al orizonte. Como en el triángulo rectángulo *CPH* el ángulo *H* es igual á la altura del polo, el ángulo *C* que forma el ege con el plano meridional, será igual al complemento de la altura del polo.

550 El ángulo que forma el ege con el plano de un relox, siempre es igual al ángulo que el mismo ege forma con la substilar, porque esta linea se origina de un meridiano perpendicular al plano que abraza al ege como todos los demas meridianos. Por consiguiente el ángulo en el centro del relox meridional ó septentrional, que forma el ege con la substilar, es igual al complemento de la altura del polo. Lo propio decimos del ángulo que forma el ege con la meridiana, porque en este relox la substilar coincide con la meridiana. Este ángulo comprehendido en-

tre

tre el ege y la substilar, ó entre el ege y el plano Fig.
es (506) la altura del polo respecto del plano.

551 En este relox la linea de seis horas, la orizontal y la equinoccial son perpendiculares á la meridiana, porque el círculo de seis horas, el orizonte y el equador son todos tres perpendiculares al meridiano, y el meridiano es perpendicular al plano del relox. Lo propio sucede respecto de la substilar que en el caso actual se confunde con la meridiana. Síguese de aquí que la linea de seis horas, la orizontal y la equinoccial son paralelas. A mas de esto la orizontal es superior á la equinoccial, porque la mitad del equador figurada en este relox es la que está sobre el orizonte. Pero por lo dicho (501), todo lo que está encima del orizonte se debe representar en un plano vertical ó inclinado debajo de la orizontal. Por una razon contraria la orizontal está debajo de la equinoccial en el relox septentrional, porque la mitad del equador que en él se representa, es la que está debajo del orizonte.

552 El relox meridional señala todas las horas del dia en otoño é invierno, ó quando el Sol está en la parte meridional del mundo, y aun quando anda el equador. Pero en llegando el Sol á la parte septentrional del mundo, este relox ya no señala ni las primeras horas despues de nacer el Sol, ni las últimas antes que se ponga; y empieza á señalar tanto mas tarde las horas de por la mañana, y deja tanto mas pronto de señalar las de por la tarde, quanto mas se acerca el Sol al trópico de cáncer; por

ma-

Fig. manera que en llegando á este trópico no empieza á darle el Sol hasta las siete y media de la mañana, y deja de darle directamente á las $4\frac{1}{2}$ de la tarde, siendo la latitud de 49.°

553 II. El relox septentrional se hace del mismo modo que el meridional, pero en situacion contraria, porque el centro está debajo de la linea orizontal, y el estremo del ege que sale fuera de la pared mira ácia arriba; fuera de esto, la linea orizontal que es superior á la equinoccial en un relox meridional, está debajo de ella en el septentrional (551). En ambos pasa por el pie del estilo; porque el plano orizontal corta perpendicularmente el plano del relox.

554 De lo dicho poco ha (548 y sig.) acerca del relox meridional se deduce 1.° que el relox septentrional no señala horas en otoño é invierno en nuestra esfera oblicua boreal, pues no le dá el Sol en estas dos estaciones. 2.° que en el relox septentrional no se deben señalar las horas del medio del dia; pongo por caso á la latitud de 49°, no se deben señalar las horas desde las $7\frac{1}{2}$ de la mañana, hasta las $4\frac{1}{2}$ de la tarde, porque el Sol deja de alumbrar la cara septentrional en todo este intervalo.

Quando estos dos reloges estuvieren debajo del equador, serán equinocciales.

555 El relox meridional de un lugar no se diferencia del orizontal de otro lugar cuya latitud es el complemento de la latitud del primero. Por egemplo, un relox me-

meridional á la latitud de 49° , no se distingue del relox Fig.
orizontal de un lugar cuya latitud es de 41° ; porque en ambos reloges el ege forma (550) un mismo ángulo con la meridiana.

556 III. Para trazar un relox oriental se tirará la 76.
linea *HR* paralela al orizonte, y se tomará por la orizontal del relox; se tomará en ella el punto que se quisiere por el pie del estilo *P*; despues se tirará otra linea *EN*, que pase por el pie del estilo, y forme con la orizontal un ángulo igual á la elevacion del equador respecto del orizonte; y esta será la equinoccial. Finalmente se tirará otra linea *CA* que pase tambien por el pie del estilo, y forme con la orizontal el ángulo de la altura del polo; esta última linea es la de las seis horas, porque la forma la interseccion del sexto círculo horario.

Es muy facil de dar la razon del modo con que acabamos de decir que se han de trazar la equinoccial y la linea de las seis horas. Por lo que mira á la equinoccial, es preciso que forme con la orizontal un ángulo igual á la elevacion del equador, porque como el equador y el orizonte son ambos perpendiculares al meridiano, las intersecciones de estos dos primeros círculos con el plano del meridiano forman un ángulo igual al que forman uno con otro dichos dos círculos. Por la misma razon la linea de seis horas forma con la orizontal el ángulo de la altura del polo; porque el círculo de seis horas y el orizonte son ambos perpendiculares al meridiano; y el círculo de seis ho-

Fig. horas forma con el orizonte el ángulo de la altura del po-
76. lo, pues este círculo horario forma con el orizonte el mismo ángulo que el ege del mundo; y el ángulo que el ege del mundo forma con el orizonte es el ángulo de la altura del polo.

557 La linea *CA* es la substilar, pues la forma la interseccion de un meridiano perpendicular al plano del relox. Por consiguiente en un relox oriental ú occidental la substilar forma con el orizonte el ángulo de la altura del polo.

558 Quando la linea equinoccial está trazada, se puede trazar por otro método la substilar; basta entonces levantar desde el pie del estilo una perpendicular á la equinoccial; porque la substilar es perpendicular á la equinoccial en todos los reloges, á excepcion del relox equinoccial que no tiene linea de su nombre.

559 Hemos supuesto que la orizontal, la equinoccial y la substilar pasan por el pie del estilo. Y en esto no puede haber duda (497), porque dichas lineas representan círculos perpendiculares al plano del meridiano, que es el plano del relox.

560 Despues de trazadas estas líneas, las lineas horarias se trazarán como sigue. Se tomará en la substilar *CA* el punto *A* tan distante como se quisiere del punto *P*, y al rededor del punto *A* se trazará una circunferencia con un radio arbitrario; se la dividirá en 24 partes iguales, empezando desde el punto de la circunferencia por donde

pa-

pasa la substilar, y desde el centro del círculo se tirarán Fig.
por los puntos de division de la circunferencia lineas á la 76.
equinoccial, en la qual señalarán los puntos horarios. Por lo que si por estos puntos se tiran lineas paralelas á la substilar, serán lineas horarias, y la substilar será la linea de las seis horas de la mañana. Las paralelas que son superiores á la substilar señalarán las horas de antes de las seis, y las inferiores señalarán las horas de por la mañana despues de las seis.

561 En este relox, como en todos los demas, es menester que el ege pase por el estremo del estilo, pero debe ser paralelo al plano del relox; porque como este plano es el del meridiano, el ege del mundo es paralelo con él; y el ege del mismo relox ha de ser paralelo á la substilar y á todas las lineas horarias, porque todas estas lineas son la secciones comunes del meridiano y de los círculos horarios, que tienen cada uno en su plano al ege del mundo. Por consiguiente, por estar este ege en el plano del círculo de seis horas, el qual es perpendicular al plano del relox y forma la substilar; si se escogen dos puntos en esta linea, y se les plantan estilos perpendiculares al plano*, tales que las partes que salen de la pared sean iguales á la linea *AP*, y se afianza una vara de hierro en los estremos de estos estilos, esta vara será el ege del relox.

562 El que quiera hacerse cargo de que los puntos orarios se han de determinar en la equinoccial conforme

Fig. acabamos de decir, debe figurarse que el círculo trazado
76. esté levantado perpendicularmente al plano del meridiano; y colocado sobre la linea equinoccial, de modo que su ege sea el mismo que el del relox oriental ó del mundo. Entonces representará un relox equinoccial, pues teniendo el mismo ege que el mundo, será paralelo al equador; luego las lineas horarias de este relox equinoccial serán los radios del círculo levantado, que pasan por los 24 puntos de division; por consiguiente, si se prolongan estos radios hasta la equinoccial, señalarán en esta linea los puntos horarios. Pero si se restituye dicho círculo á su primera situacion, de modo que no forme mas que un mismo plano con el meridiano, dichos radios de division rematarán en los mismos puntos de la equinoccial donde remataban quando el círculo estaba levantado; luego estos puntos de la equinoccial son los puntos horarios de dicha *linea*.

563 Es claro que un relox oriental solo puede señalar las horas de por la mañana, porque el Sol deja de alumbrar el plano oriental en el mismo instante del medio dia.

564 IV. La construccion de un relox occidental es de todo punto la misma que la del relox oriental, sin mas diferencia que la de estar al revés respecto del otro,
77. y de señalar las horas de por la tarde. La figura da muy bien á entender la construccion de este relox.

565 Si se hiciera un relox oriental ú occidental debajo del equador, donde es nula la latitud, las lineas hora-

rarias serían paralelas al orizonte; porque en este relox la Fig.
substilar es la misma linea que la linea orizontal, porque allí el sexto círculo horario no se distingue del orizonte. Todas las lineas horarias son paralelas á la substilar en todos los reloges, sean orientales ú occidentales.

De los Reloges verticales irregulares.

566 Antes de hacer operacion alguna en el plano, es preciso asegurarse de que es un verdadero plano y que es vertical. Se averigua si es vertical por medio de un plomo colgado de un bramante; porque si el bramante dista tanto del plano abajo como arriba, es señal de que es vertical. Tambien se averigua que es un plano con aplicar en diferentes direcciones una regla bien hecha, y será vertical si la regla tocare siempre en toda su longitud el plano. Para hacer un plano muy perfecto, se mandarán tender en la pared dos fajas de yeso verticales, de una ó dos pulgadas de ancho quando mas, la una á la derecha y la otra á la izquierda del plano que se desea hacer, asegurándose el oficial por medio de un plomo de ser muy vertical la cara anterior de ambas; aplicará á cada una una regla en toda su longitud, para ver si la toca; despues llenará con yeso el espacio que hubiere entre las dos, y corriendo de arriba abajo en todas las direcciones una regla, conocerá si todo el plano está bien á nivel con las dos fajas, y por lo mismo si es un plano perfecto.

567 Despues se plantará el estilo espurio en la pa-

Fig. red, perpendicularmente al plano, quanto sea posible, y esto en la parte superior del plano, pero cerca del borde occidental, si fuere un plano del medio dia que decline mucho ácia el oriente; y cerca del borde oriental, si declinare ácia el occidente. Lo contrario se practicará en los planos del norte: finalmente se plantará el estilo, con poca diferencia en medio del anchor en los planos de medio dia ó de norte, si fuere corta su declinacion, como unos 15° ó 20.°

Por lo que mira á la longitud del estilo, es conveniente sea la mayor que se pueda, respecto de la estension del plano que suponemos quadrado con corta diferencia. Si el lado del quadrado fuere de unos quatro ó cinco pies, la altura del estilo deberá ser como de pie y medio ó dos pies. En general, quanto mayor es la altura del estilo, tanto mas exactas salen las operaciones que con él se egecutan.

568 Ya dejamos dicho como este estilo solo sirve para construir el relox, y no para señalar las horas despues de construido: En suma, su único destino es guiarnos para averiguar la declinacion del plano. El estilo espurio ha de ser una varilla de hierro de unos tres pies de largo, cuyo estremo fuera de la pared remate en punta roma. Se la plantará oblicuamente á la pared, á fin de que el pie del estilo esté algo distante del punto donde está metido en la pared. En lugar de la varilla, sería mejor el estilo falso qual le pinta la figura 78, que

V
VI
VII
IX VIII

74
C
S P

75
C
H P R

78
G T E
A P
F S H
B

77
C
8 7 6 5 4 3 2 1
F G H R
N I
8 7 6 5 4 3 2 1

que basta para dar á conocer su estructura. Fig.

569 Cuestion I. *Hallar el pie del estilo, esto es, el punto del plano donde va á parar una perpendicular tirada desde el vértice del estilo.*

Sea *ST* el estilo cuyo pie se busca. Con un compas 78.
ó una vara que no se doble se tomarán tres puntos en el plano vertical que todos estén á igual distancia del vértice *S* del estilo, quales son los puntos *A*, *B*, *C*; despues se tirarán las lineas *EF*, *GH*, tales que la primera pase por todos los puntos igualmente distantes de *A* y *B*, y la otra por todos los que distan igualmente de *B* y *C*; el punto de interseccion *P* de las lineas *EF* y *GH* será el pie del estilo. Las lineas *EF* y *GH* se han de señalar poco, y solo en los parages donde se conoce que se han de cortar, por no emporcar el plano con lineas inútiles.

570 Para comprobar la operacion, se mirará si el punto de interseccion *P* dista igualmente de los tres puntos *A*, *B*, *C*; si esto se verificare, será señal de ser el punto *P* el pie del estilo, con tal que los tres puntos esten á igual distancia del vértice, y que la superficie de la pared sea un verdadero plano.

571 Es muy importante comprobar de otro modo esta operacion fundamental. Se escogen otros tres puntos mas ó menos distantes que los primeros del pie del estilo, y se mira si estan á igual distancia del punto donde antes se señaló el pie del estilo.

572 Si el plano de la pared fuese muy perfecto al re-

Fig. 78. rededor del pie del estilo, la distancia de dichos tres puntos al pie no ha de pasar de la mitad ó de los dos tercios de dicha altura, que se puede conocer al poco mas ó menos antes de la operacion; si la distancia fuese mayor, las lineas se cortarían en un punto algo distinto del verdadero pie del estilo. Pero si en dicha parte del plano hubiere algun hoyo ó eminencia, se tomará dicha distancia igual por lo menos á la altura del estilo y aun mayor. Porque entonces de los tres puntos *A*, *B*, *C* el que estuviere señalado en alguna eminencia distará mas del verdadero pie del estilo, y el que estuviere en un hoyo estará mas cerca. Esto causa un error mayor á proporcion quando la distancia es corta, que quando es mucha. Por lo que mira á la distancia entre los tres puntos, ha de ser tal que los dos estremos *A* y *C* esten con corta diferencia igualmente distantes de *B*, y coja como una semicircunferencia á fin de que las lineas que se tiran se corten casi en ángulos rectos.

573 Para enterarse de los fundamentos de esta práctica, es preciso considerar que el pie del estilo es el estremo de una linea que nos figuramos tirada desde el vértice *S* perpendicularmente al plano del relox; por consiguiente el estremo de esta linea perpendicular al plano, esto es, el pie del estilo está á igual distancia de los estremos de las oblicuas iguales (I. 316) que desde el punto *S* se pueden tirar al plano. Pero los dos puntos *A* y *B* que están á una misma distancia del vértice *S*, se pueden considerar como los estremos de las oblicuas iguales *SA*, *SB*; lue-

luego el pie del estilo está igualmente distante de los dos puntos *A* y *B*. Pero la linea *EF* pasa por todos los puntos igualmente distantes de *A* y *B*, luego esta linea pasa por el pie del estilo. Del mismo modo probaremos que la linea *GH* pasa por el pie del estilo, porque pasa por todos los puntos que están á igual distancia de los puntos *B* y *C*, que tambien están á igual distancia del vértice *S* por la construccion; luego las dos lineas *EF* y *GH* pasan por el pie del estilo. Es, pues, el pie del estilo el punto de interseccion de las dos lineas *EF* y *GH*. Fig. 78.

574 Despues de determinado el pie del estilo, se mide su altura, que es la distancia del vértice al pie; para esta operacion sirve el compas de vara ó una vara de hierro, y tambien una vara de palo, en cuya longitud se mide con el espresado compas la parte igual á la altura del estilo.

Los puntos que sirvieron para hallar el pie del estilo, se han de señalar con lapiz ó de otro modo; donde no, sería dificil de reconocerlos. Los puntos de sombra se señalan con letras ó guarismos.

575 Cuestion II. *Trazar dos lineas tales que la una sea la vertical y la otra la orizontal del plano.*

Llamamos *Vertical del plano* una linea perpendicular al orizonte que pasa por el pie del estilo. Para trazar esta linea se cuelga un peso de cobre ó plomo de un hilo colgado de un clavo plantado en la pared mas arriba del pie del estilo, á fin de que el hilo donde está atado el peso pase

 por

Fig. por dicho punto: despues se señala en el plano otro punto directamente debajo del hilo, y quanto mas este último punto distare del primero, que es el pie del estilo, tanto mas segura será la operacion. Si se tira una linea que pase por estos dos puntos, esta será la vertical del plano. Como el ayre suele estorvar esta operacion haciendo balancear el peso, será del caso colocar debajo del peso un vaso con agua de modo que el peso esté metido en el agua sin tocar el suelo del vaso.

576 Para señalar la orizontal del plano, se tira por el pie del estilo una linea perpendicular á la vertical del plano. Porque siendo la vertical del plano perpendicular al orizonte, toda linea á la qual la vertical fuere perpendicular será paralela al orizonte.

577 Una vez trazada la vertical del plano es facil de determinar el centro divisor de la orizontal. Para cuyo
79. fin desde el pie del estilo *P* se tomará en la vertical una distancia *PD* igual á la altura del estilo (516), el punto *D* será el centro divisor de la orizontal.

578 La declinacion del plano vertical es el ángulo *PDL*, cuyo vértice está en el centro divisor *D* de la linea orizontal *HR*, y está comprendido entre las dos lineas *DP* y *DL*, de las quales la primera es una parte de la vertical del plano igual con la altura del estilo, y la segunda remata en el punto *L*, que es la interseccion de la meridiana con la orizontal.

Para probar que este ángulo es la declinacion del pla-

plano, es preciso suponer un plano orizontal que corte Fig.
el plano del relox en la direccion *HR*, el centro de este 79.
orizonte será el punto *D*. Porque aquí nos hemos de figurar este punto en el plano orizontal igualmente que el triángulo entero *PDL*, y en este supuesto el punto *D* no discrepa del vértice del estilo, ni la linea *DP* de la altura del estilo. Esta linea *DP* será la interseccion del orizonte y del círculo que es el vertical del plano, ó que es perpendicular al plano del relox, pues esta interseccion debe pasar por el vértice *D* del estilo, una vez que todos los círculos máximos de la esfera pasan por el centro de la Tierra, y el vértice del estilo se puede tomar por dicho centro de la Tierra. La linea *DL* será la interseccion del orizonte y del meridiano del lugar; porque este meridiano pasa por el vértice del estilo, y por el punto *L* que es la interseccion de la meridiana y de la orizontal, trazadas en el plano del relox. Por consiguiente es preciso figurarse el ángulo *PDL* trazado en el plano orizontal, y comprendido entre el vertical del plano y el meridiano del lugar, que son dos círculos máximos que se cortan indispensablemente en el vértice del estilo. Pero hemos visto (510) que el ángulo comprendido entre el vertical del plano y el meridiano del lugar es igual á la declinacion del plano, por cuyo motivo se le suele llamar la declinacion del plano.

Probaremos lo mismo por otro término.

579 El ángulo que forma el vertical del plano con el meridiano es igual á la declinacion del plano (510); pero

las

Fig. 79. las lineas *ZPD*, *CLM* representan respectivamente el vertical del plano, y el meridiano; luego la parte *PL* de la orizontal representa el arco del orizonte comprendido entre dichos dos círculos, cuyo arco mide el ángulo que forman. Pero como el ángulo *PDL* tiene su vértice en el centro divisor de la orizontal, tambien tendrá por medida el arco que *PL* representa (521). Luego este ángulo es igual al que forma el vertical del plano con el meridiano, ó á la declinacion del mismo plano.

580 *Todo plano vertical es paralelo al orizonte de un lugar distante 90° del lugar donde está el plano.* Para hacerse cargo de esta verdad conviene figurarse el plano prolongado hasta el centro de la Tierra, y que desde este punto se haya tirado un radio perpendicular al plano, este radio irá á parar al lugar cuyo orizonte es paralelo al plano. Porque el radio será perpendicular al orizonte del plano en el qual rematare, por ser todo radio perpendicular á la tangente del punto donde remata (I.346), y el orizonte sensible es un plano que toca al globo de la Tierra; y como por otra parte suponemos que dicho radio es perpendicular al plano espresado, síguese que dicho plano es paralelo al orizonte de dicho lugar. Es evidente que el radio perpendicular al plano remata en un punto que dista 90° del lugar donde está el mismo plano.

581 Cuestion III. *Hallar la declinacion de un plano vertical, siendo conocido el instante del mediodia.*

Es, pues, un preliminar indispensable para resolver es-

esta cuestion saber determinar el instante del mediodía. Fig.
Esto se consigue, ó por medio de una meridiana orizontal 79.
trazada en las inmediaciones del plano vertical (VII. 141), ó por medio de un relox que consta ser exacto, aun quando este relox esté á alguna distancia, con tal que tenga el práctico un buen relox de faltriquera que pondrá á la misma hora del relox una hora ó media hora antes de las doce; ó por medio de un péndulo de segundos que señale puntualmente el tiempo verdadero poniendo el relox de faltriquera á la misma hora de la péndola tres ó quatro horas antes de mediodia.

Dado, pues, el instante del mediodia, se señalará en aquel instante un punto de sombra, por el qual se tirará una vertical; esta será la meridiana del lugar, respecto del estilo que hubiere dado el punto de sombra. Si desde el centro divisor *D* de la orizontal, se tira una recta al punto *L* de division de la orizontal y de la meridiana, formaremos el ángulo *PDL* que será la declinacion del plano (578); el valor de este ángulo se averiguará por medio de su arco ó de su cuerda (I. 709), ó por medio de su tangente medida en una escala de partes iguales. Tambien se podrá medir dicho ángulo por cálculo, para cuyo fin se medirán con una escala de partes iguales los lados *DP* y *PL*, considerando el primero como radio, cuyo centro esté en *D*, el otro será la tangente; diremos, pues, $DP : PL :: R : \text{tang } PDL$.

582 Cuestion IV. *Determinar la declinacion del plano*

Fig. *no vertical, dada la altura del polo, respecto del orizonte.*

Despues de trazada la vertical y la orizontal del plano, se trazará la meridiana del plano que es la interseccion de dicho plano con el meridiano perpendicular al mismo plano. A esta meridiana se la llama la substilar, y ha de pasar por el centro del relox (484), y el pie del estilo (497).

Para trazar esta meridiana ó substilar en un plano vertical, desde el pie del estilo como centro, se trazarán una ó muchas circunferencias concéntricas, y se señalarán en una misma circunferencia los dos puntos en que remata la sombra del estilo quando el estremo de dicha sombra entra en el círculo, y sale despues. Hecho esto, se dividirá por medio el arco comprendido entre estos dos puntos. La linea tirada desde el punto de division al pie del estilo, será la substilar.

583 Para que salga mas exacta la operacion, se trazarán igualmente dos puntos en otra circunferencia concéntrica, que señalen la entrada y salida de la sombra del estilo respecto de la misma circunferencia, y se dividirá el arco comprendido en dos partes iguales. Se tirará despues una linea desde el punto de division al pie del estilo; y si esta linea coincidiere con la primera será señal de haberse hecho bien la primera operacion. Si no, será preciso hacerla segunda vez, valiéndose de otros círculos concéntricos.

La demostracion y correccion de esta práctica la dimos

mos muchos tiempos ha (VII. 141 y sig.), pues por lo dicho (580) el plano vertical se puede considerar como el orizonte de un lugar 90 grados distante del sitio donde está el plano. Por lo mismo esta operacion saldrá mas exacta quando no variare la declinacion del Sol entre los dos puntos de la observacion, esto es, en tiempo de los solsticios, porque entonces el Sol se mantiene en una misma situacion siete ú ocho horas de seguida. Puede salir tambien muy errada esta operacion, quando es mucha la declinacion del plano, por causa de la refraccion de la atmósfera, que no altera igualmente la altura aparente del Sol, quando la sombra del estilo entra en el círculo como quando sale, á no ser que la altura del Sol pase de 10 ó 12.° Luego para la seguridad de la operacion es preciso 1.° egecutarla al tiempo de los solsticios. 2.° que la altura del Sol sea una misma, con diferencia de pocos grados en ambos instantes; ó si no, ha de pasar de 10 ó 12.° en ambos.

584 Trazada la substilar, se determinará por cálculo la declinacion del plano. Porque el ángulo *BPD* ó *CPZ* que la substilar forma con la vertical *ZD* es igual á su alterno *LCP*, por ser la vertical paralela á la meridiana. Pero dada la substilar, se saca facilmente el ángulo *BPD*, y será conocido por lo mismo el ángulo del centro *LCP*. Conocido el ángulo *LCP*, se determina la declinacion del plano por la siguiente analogía. *La tangente del complemento de la altura del polo, respecto del orizonte del lu-* Fig. 80.

Fig. *lugar, es á la tangente del ángulo* LCP *que la substilar forma con la meridiana, como el seno total es al seno de la declinacion del plano.*

585 Cuestion V. *Trazar una meridiana en un plano vertical.*

Señálese el punto del plano vertical donde dá la sombra del estremo del estilo en el instante del mediodia; se tirará por este punto una vertical, ó una perpendicular al orizonte, esta será la meridiana. Porque 1.° este punto en el qual dá el estremo de la sombra del estilo está en la meridiana, una vez que el estremo de la sombra ha de dar en dicha linea en el instante del mediodia. 2.° La meridiana ha de ser vertical, por ser la interseccion de dos planos verticales, es á saber, del plano del relox con el plano del meridiano.

586 La práctica de este método es mas segura quando el Sol declina ácia el polo inferior, que quando declina ácia el polo superior; porque en el primer caso la sombra del estremo del estilo dista menos del pie del estilo que en el segundo, y anda menos espacio en un mismo tiempo. Resulta de aquí que si hubiere un minuto de error, por señalar el punto de sombra un minuto antes ó despues de mediodia, estará menos distante de la verdadera meridiana, que si se hubiera señalado el mismo punto de sombra un minuto antes ó despues de mediodia, quando el Sol declina ácia el polo superior.

587 Cuestion VI. *Dada la declinacion del plano y*

la

la altura del polo sobre el orizonte, hallar el centro del relox. Fig.

Sea *HR* la orizontal; *PD*, la vertical que pasa por el pie del estilo *P*; *PDL*, el ángulo de declinacion; *CLM*, la meridiana. Tomaremos en la orizontal la parte *HL* igual á la hypotenusa *DL*, secante de la declinacion *PDL*, el punto *H* será el centro divisor de la meridiana (519). Tiraremos despues la *CH* que forme con la orizontal el ángulo *CHL* igual á la altura del polo respecto del orizonte, el punto *C* donde la linea *CH* encontrará la meridiana, será el centro del relox. Porque ya que *H* es el centro divisor de la meridiana, *CL* representa el arco del meridiano que mide el ángulo *CHL*. Pero este ángulo es la altura del polo respecto del orizonte, cuya medida es el arco del meridiano comprendido entre el orizonte y el polo; luego la parte *CL* de la meridiana representa este arco comprendido entre el orizonte y el polo. Luego ya que la linea *HLR* representa el orizonte, es preciso que el punto *C* sea el centro del relox, que representa el polo del mundo. 79.

588 Antes de manifestar como se traza la linea equinoccial, repararemos que si desde el vértice *S* de la altura del estilo se levanta una perpendicular *SB* á la *CS*, llamada el *Ege*, porque como pasa por el centro del relox y el vértice del estilo, representa el ege verdadero que ha de pasar por los mismos dos puntos; y si se prolonga dicha perpendicular hasta la substilar, el punto *B* donde la encontráre será uno de los puntos por donde ha de pasar 80.

la

Fig. 80. la equinoccial. Porque una vez que el punto *S* representa el vértice del estilo, se sigue que el plano del equador ha de pasar por dicho punto. Fuera de esto, el mismo plano es, del mismo modo que el radio equinoccial *SB*, perpendicular al ege del relox, que es el ege del mundo; luego dicho plano del equador encuentra la substilar en el mismo punto *B* que el radio equinoccial. Luego la linea equinoccial, que forma en el plano del relox la interseccion del equador, corta tambien la substilar en el punto *B*. Para trazar la equinoccial daremos dos métodos, el uno particular y el otro general.

589 Cuestion VII. *Dada la declinacion del plano y la altura del polo sobre el orizonte, trazar la linea equinoccial.*

Como toda línea recta remata en dos puntos, hemos de determinar dos puntos por donde ha de pasar la equinoccial; el uno está en la orizontal, y es el de seis horas; el otro está en la meridiana. 1.° El punto de seis horas se hallará tirando desde el centro divisor *D* una perpendicular á la linea *DL*, pues esta perpendicular *DR* encontrará la orizontal en el punto de seis horas. Porque como el ángulo recto *LDR* tiene su vértice en el centro divisor de la orizontal, y por otra parte el lado *DL* encuentra dicha orizontal en el punto de mediodia, es preciso que el otro lado *DR* del espresado ángulo recto remate en el punto de seis horas de la misma linea, pues la base *LR* representa el arco del orizonte comprendido entre el meridiano, y

el

el círculo de seis horas, cuyo arco es de 90.° 2.° Para Fig.
determinar el punto de la meridiana por donde ha de pasar la equinoccial, se levantará la *HM* perpendicular á *CH*; esta perpendicular encontrará la meridiana en un punto *M*, por el qual ha de pasar la equinoccial. Porque entre el polo del mundo y el equador hay un quadrante de círculo meridiano; luego el centro del relox que representa el polo del mundo dista de la equinoccial una parte de la meridiana que representa un quadrante del meridiano. Pero la parte *CM* representa el quadrante del meridiano, pues es la base del ángulo recto, cuyo vértice está en el centro divisor de la meridiana. Luego por estar el centro del relox en el estremo *C* de la parte *CM*, es preciso que la equinoccial pase por el otro estremo *M*, igualmente que por el punto *R*; por consiguiente si se tira una recta desde el uno de los dos puntos al otro, esta será la equinoccial. 80.

Esto manifiesta que se puede trazar la equinoccial, aunque no esté trazada la substilar. Suponemos que sea dada la posicion de la meridiana, cuya linea se traza por lo dicho (585).

590 Cuestion VIII. *Dados en un plano dos puntos de sombra y la declinacion del Sol al tiempo de señalar los dos puntos de sombra, señalar la linea equinoccial.*

Sea *S* el vértice del estilo *ST*; *V*, *X*, los dos puntos de sombra que se deben tomar muy distantes uno de otro. 81.

Fig. 81. 1.° Se tirará la linea *sv* igual á la distancia del vértice del estilo al punto de sombra *V*, y se hará el ángulo *usb* igual á la declinacion del Sol al tiempo que se señaló el punto de sombra *V*. Es provechoso valerse de una chapa cuya superficie sea llana y lisa, para tirar la linea *sv*, y hacer el ángulo *vsb*.

2.° Desde el punto *V* como centro, y con un radio arbitrario se trazará una circunferencia *FG*, y desde el punto *V* se tirarán muchos radios, como *VF* y *VG*. Se trazará otra circunferencia *fg* desde el centro *v*, y con el mismo radio que la primera.

3.° Se tomará con el compas la distancia del vértice del estilo al punto *F*; y con esta misma abertura, plantando la una punta del compas en el punto *s*, se trazará un arco que corte la circunferencia *fg* en el punto *f*. Se tomará igualmente la distancia del vértice *S* al punto *G*, y plantando en *s* la una punta del compas, se trazará con dicha distancia un arco que corte en *g* la circunferencia *fg*. Lo mismo se practicará respecto de todos los puntos señalados en la primera circunferencia.

4.° Desde el centro de la segunda circunferencia *fg* se tirarán radios á los puntos de interseccion de los arcos con esta circunferencia, cuyos radios se prolongarán, si fuere menester, hasta que corten la linea *sk* en los puntos *b* y *k*; se tomarán despues con el compas las distancias *vb*, *vk*, y se llevarán á los radios *VF* y *VG* desde *V*, y se tirará una curva *HK* que pase por los puntos *H* y *K* que ter-

terminarán dichas distancias, y por otros muchos que se señalarán del mismo modo. Fig. 81.

5.° Lo mismo se practicará respecto del otro punto de sombra *X*, y se trazará otra curva *NR*, del mismo modo que la primera, haciendo un ángulo *xsn* igual á la declinacion del Sol al tiempo de señalar este segundo punto de sombra, cuyo ángulo tenga el lado *sx* igual á la distancia del vértice del estilo al punto *X*.

Si se tira una recta tangente de una y otra curva, esta recta será la equinoccial respecto del vértice del estilo. En viendo al poco mas ó menos el parage de ambas curvas por donde ha de pasar la tangente, se tirarán ácia el mismo lado muchos radios desde los centros *V* y *X*, y así se determinará mayor número de puntos de las curvas, para trazarlas allí con mas exactitud.

Para demostrar esta operacion, hemos de considerar que si el Sol estuviera en el equador, al tiempo de tomar los dos puntos de sombra, la linea equinoccial pasaría por estos dos puntos; porque la linea que traza la sombra del Sol en un dia sobre un plano, representa el círculo que el Sol anda aquel mismo dia. Pero quando el Sol está á alguna distancia del equador, es evidente que la linea que pasaría entonces por los dos puntos de sombra no sería la equinoccial. Para determinar la posicion de esta equinoccial, es preciso imaginar un ángulo igual á la declinacion que tenia el Sol en el instante que se señaló el primer punto de sombra *V*, cuyo vértice esté en el estremo del

Fig. 81. estilo, y del qual el un lado sea la linea *SV* tirada desde dicho estremo al mismo punto de sombra. Si imaginamos que el otro lado del ángulo dá vuelta al rededor del primer lado que remata en dicho punto de sombra, este segundo lado, que hemos de suponer siempre prolongado hasta la superficie de la pared, trazará girando una linea curva en el plano, la qual señalará en alguno de sus puntos la distancia de la linea equinoccial al primer punto de sombra; luego dicha linea tocará la curva en el punto que señaláre la primera distancia. Se debe imaginar tambien otro ángulo igual á la declinacion que tenia el Sol al tiempo que se señaló el segundo punto de sombra, cuyo vértice esté tambien en el vértice del estilo, y el uno de sus lados remate en dicho punto de sombra. Si nos figuramos que este segundo ángulo dá la vuelta como el primero al rededor del lado que remata en el punto de sombra, el otro lado tambien trazará una curva al rededor del mismo punto; y esta curva señalará con alguno de sus puntos la distancia de la equinoccial al segundo punto de sombra. Por consiguiente dicha linea tambien tocará la segunda curva en el punto que señaláre esta distancia; luego la equinoccial ha de ser tangente de ambas curvas; y si se tira una linea que toque las dos curvas, esta será la equinoccial que se busca. Pero si se atiende á todo lo dicho en la resolucion de la cuestion, se echará de ver que las curvas trazadas por la revolucion de los dos ángulos son las mismas que dice el método. Por consiguien-

guiente practicándole se traza la equinoccial. Fig.

591 Aunque se puede tirar una tangente á la parte superior de las curvas ó á la parte inferior, es muy facil de determinar donde se debe tirar. Porque quando la declinacion del Sol es septentrional, la equinoccial toca la parte superior de las curvas; porque estando entonces el Sol mas próximo á nuestro zenit que quando está en el equador, se concibe que los puntos de sombra están mas bajos que quando está en el equador, ó lo que es lo propio, los puntos de sombra del Sol, quando anda el equador, están mas arriba de los que caen en el mismo plano quando está mas cerca de nuestro zenit que el equador. Y segun llevamos dicho, la equinoccial debe pasar por los puntos de sombra del Sol quando está en el equador. Por una razon contraria la tangente se ha de tirar á la parte inferior de las curvas, quando la declinacion del Sol es meridional. En todo esto hablamos de los planos que están en la parte septentrional de la Tierra entre los dos trópicos. Esto supuesto, la regla se aplica en general á todos los planos verticales.

592 Si se señalára el rastro de la sombra del Sol en un plano, este rastro solo sería una linea recta quando el Sol andaría el equador, porque entre todos los círculos que el Sol anda cada dia en el discurso del año, solo el equador tiene su centro en el estremo del estilo, que se puede considerar como el centro de la Tierra.

Esto se funda en que los círculos menores de la esfe-

Fig. ra se han de representar en un plano con lineas curvas. Porque como el centro de la tierra ó el vértice del estilo no está en el plano de estos círculos, las lineas tiradas desde la circunferencia de alguno de estos círculos, pongo por caso, desde un trópico al vértice del estilo, no estarán en el plano de este círculo, y estarán en la superficie de un cono, cuyo vértice será el mismo que el del estilo; y cuya base será el círculo de que hablamos. Si imaginamos estas lineas prolongadas hasta el plano del estilo, formarán la superficie de un cono opuesto al vértice con el primero, y la interseccion de esta superficie con el plano será la linea que representará la circunferencia del círculo menor. Pero es evidente que esta interseccion no será una linea recta, sino alguna de las secciones cónicas; sería una circunferencia de círculo si el plano fuera paralelo al círculo representado, porque la parte del plano comprendida en la superficie del cono, y el círculo representarían en tal caso unas secciones ó figuras semejantes por razon de su paralelismo.

593 Despues de trazada la equinoccial *HBM*, la
82. declinacion del plano se podrá averiguar del modo siguiente. Desde el punto *H* donde dicha linea corta la orizontal, se tirará una linea *DH* al centro divisor de la orizontal, y en el punto *D* se levantará una perpendicular *DL* á la *DH*; el ángulo *ODL* será la declinacion del plano. Porque como el ángulo *HDL* es recto, y el punto *H* es la interseccion de la orizontal con la equinoccial, el punto *L* ha

ha de ser la interseccion. de la misma línea con la meridiana, pues el arco del orizonte comprendido entre el equador y el meridiano es un quadrante de círculo. Luego el ángulo *ODL* ha de ser la declinacion del plano (510) porque es igual al que forma la vertical del plano con el meridiano. Fig. 82.

594 Cuestion IX. *Trazar la substilar de un relox.*

Una vez trazada la equinoccial, es muy facil la resolucion de esta cuestion, basta tirar desde el pie del estilo una perpendicular á la equinoccial. Así, se medirá *PB* que es la parte de la substilar comprendida entre el pie del estilo y la equinoccial. Pero en conociendo *PB*, y la altura del estilo *SP* que son dos lados del triángulo rectángulo *SPB*, hallaremos el ángulo *PSB* igual á *SCP*, que es la altura del polo respecto del plano, con hacer esta analogía: *La altura del estilo* SP *es á* PB, *como el seno total es á la tangente del ángulo* PSB.

595 Cuestion X. *Dada la elevacion del polo respecto del orizonte del lugar y la declinacion del plano, hallar el ángulo que forma en el centro del relox la substilar con la meridiana.*

Resuelve esta cuestion la siguiente analogía:

Como el seno total

Es al seno de la declinacion del plano,

Así la tangente del complemento de la altura del polo respecto del orizonte del lugar,

Fig. *Es á la tangente del ángulo que forma la substilar con la meridiana.*

80\. Para probar esta analogía, sea la orizontal *HR*; *CP*, la substilar, que pasa indispensablemente por el centro del relox y el pie del estilo; *CM*, la meridiana; el punto de interseccion *C* de la meridiana con la substilar será el centro del relox, porque ambas lineas pasan por el centro. El punto *P* será tambien el pie del estilo, porque es la interseccion de la orizontal y de la substilar. A mas de esto, se tomará en la vertical *ZPD*, que suponemos tirada, la parte *PD* igual á la altura del estilo, el punto *D* será el centro divisor de la orizontal. Si despues tiramos la *DL* al punto *L*, que es la interseccion de la meridiana con la orizontal, el ángulo en *D* será la declinacion del plano vertical (578). Finalmente, si en la orizontal tomamos la parte *HL* igual á la hypotenusa *DL*, el punto *H* será el centro divisor de la meridiana (519). Hágase despues el ángulo *CHL* igual á la altura del polo, la linea *CH* cortará la meridiana en el centro del relox, pues la parte *CL* de la meridiana representa el arco del meridiano comprendido entre el orizonte y el polo del mundo, que es el centro del relox. Todo esto presupuesto,

Los dos triángulos *CLP*, *CLH* son rectángulos en *L*. Si en estos triángulos fuere *CL* el radio siendo *C* el centro, el lado *HL* será la tangente del ángulo *HCL*, que es el complemento de la altura del polo *CHL*, por ser rectángulo el triángulo *CLH*; y el lado *LP* será la tangente del án-

ángulo *LCP* que forma la meridiana con la substilar. Pero Fig. 80.
suponemos que la altura del polo es conocida; luego lo será tambien su complemento; luego tambien conoceremos la tangente de este complemento ó del ángulo *HCL.* Por consiguiente en el triángulo rectángulo *DPL* conocemos tres cosas, es á saber el ángulo recto en *P*, el ángulo *D* que es la declinacion del plano, y el lado *DL* que es igual á la tangente *HL.* Podremos, pües, hacer la siguiente analogía para hallar el número de partes de *LP* proporcional al número de partes de la tangente *HL.*

Como el seno total
Es á la hypotenusa DL *que es la tangente del complemento de la altura del polo,*
Así el seno de la declinacion del plano
Es á la tangente LP *del ángulo* LCP;

ó lo que es lo propio,

Como el seno total
Al seno de la declinacion del plano,
Así la tangente DL *del complemento de la altura del polo*
Á la tangente LP *del ángulo* LCP.

596 Cuestion XI. *Dada la altura del polo respecto del orizonte, y la declinacion del plano vertical, hallar el ángulo en el centro del relox entre la substilar y el ege, cuyo ángulo se llama* Altura del polo respecto del plano.

Se resuelve por la siguiente analogía.

Como el seno total

Al

Fig. 80. *Al seno del complemento de la altura del polo respecto del orizonte,*

Así el seno del complemento de la declinacion del plano

Al seno de la altura del polo respecto del plano.

Yá dejamos dicho que *CPB* es la substilar; *HPR*, la orizontal; *CLM*, la meridiana; los dos puntos *C* y *P*, el centro del relox y el pie del estilo. Tambien dejamos dicho que el punto *D* es el centro divisor de la linea orizontal, con tal que la perpendicular *PD* sea igual á la altura del estilo *PS*; que el ángulo *PDL* es la declinacion del plano, y finalmente que el punto *H* es el centro divisor de la meridiana, con tal que se tome *HL* igual á la hypotenusa *DL*. Todo esto presupuesto, tiraremos la *CS* desde el centro del relox al punto *S*, que es el vértice del estilo, esta linea señalará la posicion del ege, pues pasa por el centro del relox y el estremo del estilo. Probaremos finalmente que la analogía antecedente dá el ángulo *PCS* que forma el ege con la substilar.

Si en el triángulo rectángulo *CPS* fuese *CS* el radío, y el centro *C*, la altura *PS* que es perpendicular á la substilar, será el seno del ángulo que buscamos; si en el triángulo rectángulo *CLH*, fuere *CH* el radio, y *C* el centro, la línea *HL* será el seno del ángulo *HCL*, pues es perpendicular á la meridiana *CL*. Pero el ángulo *HCL* es el complemento de la altura del polo *CHL*, por ser rectángulo el triángulo *CHL*. Luego una vez que suponemos conocida la altura del polo, el seno del complemento *HCL* tam-

tambien lo será. Por consiguiente en el triángulo rectángulo *DPL* conocemos tres cosas; es á saber, el ángulo recto *P*, el ángulo *D* que es la declinacion del plano, y la hypotenusa *DL* que es el seno del complemento de la altura del polo respecto del orizonte, pues *HL* = *DL*. Hallaremos, pues, el quarto término de esta proporcion: *Como el seno total, esto es, el seno del ángulo recto* P, *es al lado* DL, que es el seno del complemento de la altura del polo respecto del orizonte; *así el seno del ángulo* PLD que es el complemento de la declinacion del plano, *al lado opuesto* DP *ó* PS, que es el seno del ángulo *PSC* que buscamos. Fig. 80.

597 Supone la analogía demostrada que los senos *HL* y *PS* pertenecen á un mismo círculo, ó que los radios *CH* y *CS* son iguales entre sí. Sonlo con efecto, porque estos radios miden las distancias del centro del relox á los puntos *H*, *S*, que son los centros divisores de las líneas *CM* y *CPB* que representan los meridianos. Dejamos probado (524) que el centro del relox está á la misma distancia de los centros divisores de las lineas que representan meridianos.

598 Cuestion XII. *Dada la altura del polo sobre el orizonte del lugar y la declinacion del plano, hallar la diferencia de las longitudes entre el meridiano* CL *del lugar, y la meridiana del plano ó la substilar* CP.

599 Antes de resolver esta cuestion, recordaremos que (580) el plano del relox siempre es paralelo al orizonte de algun lugar de la tierra, y se puede tomar por di-

Fig. 80. dicho orizonte. Pero la diferencia de las longitudes entre las dos meridianas tiene por medida el arco del equador comprendido entre el meridiano del lugar donde está el plano, y el meridiano del lugar cuyo orizonte es paralelo á dicho plano, ó lo que viene á ser lo propio, es el ángulo en el polo que forman los dos meridianos. Hecha esta prevencion, la cuestion se resuelve por la siguiente analogía:

Como el seno total

Es al seno de la altura del polo sobre el orizonte del lugar,

Así la tangente del complemento de la declinacion del plano

A la tangente del complemento de la diferencia de los meridianos ó de las longitudes.

Al arco del equador que mide esta diferencia le representa aquí la parte *MB* de la equinoccial *EN*, cuya parte está entre la meridiana del lugar y la substilar. La medida del ángulo *BAM* es el mismo arco ó la misma línea *MB*, una vez que suponemos el vértice de este ángulo en el centro divisor *A* de la equinoccial, que se determina (519) tomando en la substilar la parte *BA* igual á la linea *SB* tirada desde el vértice del estilo. Por consiguiente el ángulo *BAM* es igual á la diferencia de las longitudes. Probemos, pues, que la analogía propuesta dá el valor de este ángulo.

Si en el triángulo rectángulo *HLM* fuere *HL* el seno

to-

total, y el centro *H*, el otro lado *HM* será la secante Fig. 80.
del ángulo *LHM*, que es el complemento de la altura del polo *CHL*, una vez que por construccion el ángulo *CHM* es recto (589). Pero *HM* = *AM* (523), porque los puntos *A* y *H* son los centros divisores de dos lineas que se cortan en el punto *M*, es á saber, de la equinoccial *EMN* y de la meridiana *CLM*. Luego la linea *AM* es la secante del complemento de la altura del polo sobre el orizonte; podemos, pues, suponer que esta linea es conocida, pues lo es la altura del polo. Si en el triángulo *LDR*, rectángulo en *D* (521), porque la linea *LR* que es una porcion de la orizontal, representa un quadrante de círculo comprendido entre el meridiano y el equador, y por otra parte el vértice del ángulo *D* es el centro divisor de la orizontal; si en dicho triángulo fuere el radio el lado *DL* = *HL* (519), y el centro *L*, el otro lado *DR* será la tangente del ángulo *DLR* ó *DLP*, que es el complemento de la declinacion *PDL*. Pero *DR* = *AR* (523), por ser los puntos *D* y *A* los centros divisores de las lineas *HR* y *ENR* que se cortan en el punto *R*. Luego *AR* es tambien la tangente del complemento de la declinacion del plano; podemos, pues, suponer que esta linea es tambien conocida. Luego en el triángulo *MAR*, rectángulo en *A*, porque su base *MR* representa el quadrante del equador, esto es el arco comprendido entre el orizonte y el meridiano, conocemos tres cosas, que son los dos lados *AM*, *AR*, y el ángulo recto *A*. Luego sa-

ca-

Fig. 80. caremos el ángulo *AMR* por la siguiente analogía, siendo el lado *AM* el radio, y el centro *M*: AM *ó* MH *que es la secante del complemento de la altura del polo sobre el orizonte del lugar, es al seno total, como el lado* AR *ó* DR, *que es la tangente del complemento de la declinacion del plano, á la tangente del ángulo* AMR *ó* AMB, *que es el complemento del ángulo* BAM. Pero los dos primeros términos, es á saber, la secante del complemento de la altura del polo y el seno total tienen uno con otro la misma razon que el seno total con el seno de la altura del polo, conforme se infiere del triángulo rectángulo *HLM*, en el qual si miramos el lado *HM* como la secante del complemento de la altura del polo, *HL* será el seno total; pero si miramos *HM* como seno total, y el punto *M* como centro, el lado *HL* será el seno del ángulo *HML*, que es igual á la altura del polo *CHL*. Se podrán, pues, mudar los dos primeros términos de la proporcion antecedente, y substituir en su lugar el seno total y el seno de la altura del polo, de donde resultará esta proporcion: *Como el seno total al seno de la altura del polo sobre el orizonte, así la tangente del complemento de la declinacion del plano á la tangente del complemento del ángulo* BAM, *que es la diferencia de las longitudes.*

600 Como las analogías de las tres últimas cuestiones son fundamentales en la construccion de los reloges, bueno será comprobar los cálculos que se hubieren hecho. Para este fin se buscará el ángulo de la substilar con la me-

meridiana por medio de la proporcion siguiente, que su- Fig.
pone las analogías de las dos últimas cuestiones, y si se sacare el mismo valor que saliere por la analogía de la cuestion (595), será señal de estar bien hecho el cálculo. Esta és la proporcion: *El seno total es al seno de la altura del polo sobre el plano, como la tangente de la diferencia de los meridianos es á la tangente del ángulo que se busca.*

601 Por ser el primer término de la analogía propuesta (599) siempre mayor que el segundo en la esfera oblicua, tambien será el tercero mayor que el quarto. Por consiguiente el complemento de la declinacion del plano es mayor que el complemento de la diferencia de las longitudes; y por lo mismo la declinacion del plano siempre es menor que la diferencia de las longitudes.

602 Una vez determinada la altura del polo sobre el plano, y la diferencia de las longitudes, se puede determinar el lugar de la tierra cuyo orizonte es paralelo al plano del relox. Supongamos un plano del mediodia situado en la parte septentrional de la tierra. Si la altura del polo sobre dicho plano fuere de $32^\circ\ 36'$, y la diferencia de las longitudes $42^\circ\ 55'$, el plano será paralelo al orizonte del lugar que está á $32^\circ\ 36'$ de latitud meridional; y la longitud de dicho lugar será $42^\circ\ 55'$ mayor ó menor que la del lugar donde está el plano, será mayor si el plano declinare ácia el oriente, y será menor si declinare ácia el occidente. Decimos que el espresado plano será pa-

ra-

Fig. 80. ralelo al orizonte de un lugar que está á 32°. $36'$ de latitud, porque como suponemos este plano paralelo al orizonte del lugar que se busca, el ege de la tierra debe formar ángulos iguales con uno y otro. Pero el ángulo que forma el ege sobre el plano es la altura del polo sobre el plano, y el ángulo que forma este ege sobre el orizonte de un lugar es la altura del polo sobre el orizonte, que siempre es igual á la latitud del lugar. Por consiguiente la altura del polo sobre un plano es igual á la latitud del lugar cuyo orizonte es paralelo á dicho plano.

Diferentes modos para trazar reloges.

603 Antes de trazar un relox, se le han de dar al plano dos ó tres manos de color al oleo con el fin de borrar todas las lineas y puntos que hubieren servido para determinar la declinacion del plano; y despues de trazadas las lineas horarias, se dará otra mano, para borrar muchas lineas que solo sirven para tirar las horarias.

604 Cuestion I. *Dada la declinacion del plano y la elevacion del polo sobre el orizonte del lugar, trazar un relox vertical por un método geométrico, con tal que el centro del relox no esté muy distante de la linea orizontal y de la equinoccial.*

1.° Se trazará en el plano propuesto la vertical *ZPD*, y despues la orizontal *HR*; el punto *P* de interseccion de las dos lineas será el pie del estilo.

2.° Se tomará la linea *PD* igual á la altura del es-

ti-

tilo, que bien que sea arbitraria debe tener alguna proporcion con la altura que se le diere á la meridiana, y ser, pongo por caso, su tercio; desde el punto *D*, centro divisor de la orizontal, se tirará la linea *DL* de modo que el ángulo *PDL* sea igual á la declinacion del plano. Fig. 80.

3.° En el punto *L* se levantará la perpendicular *CLM* á la orizontal *HR*, y será la meridiana.* Despues de tomar en la orizontal la parte *LH* igual á la hypotenusa *DL*, desde el punto *H* que es el centro divisor (519) de la meridiana, se tirará la linea *CH* que forme el ángulo *CHL* de la altura del polo sobre el orizonte del lugar; el punto de interseccion *C* de esta linea con la meridiana será (587) el centro del relox.

4.° Por el centro *C*, se tirará la recta *CPB* que pasa por el pie del estilo, esta será la substilar (489); á la substilar se levantará la perpendicular *PS* igual á *PD* ó á la altura del estilo; despues se tirará desde el centro *C* la linea *CS* que pase por el punto *S*; y enseñará la posicion del ege respecto de la substilar, porque el ege ha

 de

* Es facil de probar que la perpendicular *CLM* á la orizontal *RH* es la meridiana. Porque en conociendo la declinacion del plano *PDL*, conocemos tres cosas en el triángulo rectángulo *PDL*, es á saber el ángulo recto *P*, el ángulo de la declinacion *D*, y el lado *DP* igual á la altura del estilo *PS*. Por consiguiente se determinará el lado *PL* que es la tangente de la declinacion *PDL*, siendo *DP* el radio. Pero en conociendo la distancia *PL* del punto *P* que es el pie del estilo al punto *L*, se levantará en el punto *L* una perpendicular á la linea orizontal, y será la meridiana.

Fig. 80. de pasar por el centro del relox (481), y el vértice del estilo.

5.° En el punto *S* se levantará á la linea *CS* la perpendicular *SB* que será el radio equinoccial; por el punto *B* se tirará la perpendicular *EBN* á la substilar; esta será la equinoccial (588), cuyo punto *M* ó su interseccion con la meridiana es el punto de las doce en la equinoccial; y su interseccion *R* con la orizontal es el de seis horas (504).

6.° Se tomará en la substilar la parte *BA* igual al radio equinoccial *SB*, el punto *A* será el centro divisor de la equinoccial (519). Hecho esto, desde el centro *A* y con un rádio arbitrario se trazará la circunferencia *FKGI*.

7.° Desde el punto *A* se tirará una lineà que pase por el punto *M*, y encuentre la circunferencia en un punto como *K*, ú otra que pase por el punto *R*, y corte tambien la circunferencia en *O*; despues se dividirá la circunferencia en 24 partes iguales, empezando desde el punto *K*, ó el punto *O*, y desde el centro *A* se tirarán lineas á los puntos de division, prolongándolas, si fuere menester, hasta que encuentren la equinoccial; los puntos donde estas lineas cortaren la equinoccial serán puntos horarios, quiero decir que cada linea horaria ha de pasar por alguno de dichos puntos.

8.° Desde el centro del relox se tirarán lineas á los puntos horarios, estas serán las lineas horarias en cuyos es-

estremos se señalarán las horas, teniendo presente que las horas de por la mañana han de estar al occidente de la meridiana, y las de por la tarde al oriente. Concluido todo esto, si se planta una varilla de hierro de modo que pase por el vértice del estilo, y remate en el centro *C* del relox, será el ege del relox, cuya sombra señalará las horas. Tambien se podrian señalar las horas con un estilo cuyo pie fuese el punto *P*, y la altura igual con *PD* ó *PS*. Fig. 80.

605 Para dar la razon de esta práctica, figurémonos que el triángulo *BCS* está levantado perpendicularmente al plano del relox, y que el círculo *FKGI* está en tal situacion que la linea *AB* coincide con la linea *SB*, el punto *A* con el vértice *S*, y que el plano del círculo sea perpendicular al ege del relox; en estos supuestos el círculo representará un relox equinoccial, porque será paralelo al equador del mundo. Por consiguiente los radios tirados á los puntos de las divisiones de la circunferencia son las lineas horarias de este relox equinoccial. Luego los puntos donde estos radios cortan la equinoccial que es la interseccion del círculo elevado con el plano vertical declinante, son puntos horarios. Pero estos puntos no discrepan de aquellos donde los radios encuentran la equinoccial quando el círculo está echado sobre el plano del relox. Por consiguiente los puntos de la equinoccial determinados por el método propuesto, son puntos horarios, y las lineas tiradas desde dichos puntos al centro del relox son lineas horarias.

 La

Fig. 606 La substilar ha de estar en distinta situacion respecto de la meridiana conforme decline el relox ácia el oriente ó ácia el occidente. Supongamos primero que el plano está vuelto oblicuamente al medio dia, si declinare ácia el oriente, la substilar deberá estar á la izquierda de la meridiana; pero deberá estar á la derecha si declinare ácia el occidente. Supongamos ahora que el plano está vuelto oblicuamente al norte; sucederá todo al revés.

607 Cuestion II. *Dadas la declinacion del plano y la elevacion del polo respecto del orizonte del lugar, trazar un relox vertical por un método geométrico, sea poca ó mucha la distancia entre el centro del relox, y las lineas orizontal y equinoccial.*

83. 1.° Se trazará primero en el plano del relox la linea *ZPD* vertical ó perpendicular al orizonte, despues la orizontal por lo dicho (575).

2.° Se tomará despues desde el punto de interseccion *P*, que es el pie del estilo, la linea *PD* igual á su altura. Aunque esta altura se toma á arbitrio, ha de tener alguna proporcion con la longitud de la meridiana, y ser pongo por caso su tercera parte. Desde el punto *D* que es el centro divisor de la orizontal, se tirará la linea *DL* que forme el ángulo *PDL* igual á la declinacion del plano.

3.° En el punto *L* se levantará la perpendicular *CLM* á la orizontal *HR*, esta será la meridiana; tomando despues en la orizontal la parte *LH* igual á la hypotenusa *DL*,

DL, se tirará desde el punto *H*, que es el centro divisor Fig.
de la meridiana (519), la linea *CH* que forme el ángu- 83.
lo *CHL* de la altura del polo sobre el orizonte del lugar.

4.° En el punto *H* se levantará la *HM* perpendicular á *CH*; el punto *M* donde la linea *HM* encuentra la meridiana, es uno de los puntos de la equinoccial (589). Despues se levantará en el mismo punto *D* la perpendicular *DR* á la *DL*, el punto *R*, interseccion de *DR* con la orizontal, será el punto de seis horas (589), que es otro punto de la equinoccial; por consiguiente con tirar la linea *EN* que pasa por el punto *M* y el punto *R*, esta será la equinoccial.

5.° Se tirará la linea *CPB* que pase por el pie del estilo y sea perpendicular á la equinoccial, esta será la substilar; despues se levantará la *PS* perpendicular á la substilar, de modo que sea igual con la altura del estilo; y desde el punto *S* se tirará la *SB* al punto *B*, que es la interseccion de la substilar con la equinoccial; este será el radio equinoccial.

6.° Desde el punto *S* se tirará la *CS* perpendicular al radio *BS*; esta señalará la posicion del ege respecto de la substilar; despues se tomará en el ege *CS* el punto *s* á arbitrio, en el qual se levantará la perpendicular *sb* al ege, y por lo mismo paralela al radio *SB*; y por el punto *b* de la substilar se tirará la *ebn* perpendicular á la substilar, ó, lo que viene á ser lo propio, paralela á la equinoccial *EBN*; esta será otra equinoccial.

Fig. 83. 7.° Se hará la parte *BA* de la substilar igual al radio *SB*, y la parte *ba* igual al otro radio equinoccial *sb*. Hecho esto, desde los puntos *A* y *a* como centros, y con un radio arbitrario se trazarán dos circunferencias, que para mayor facilidad bueno será que sean iguales. Desde los centros *A* y *a* se tirarán radios á los puntos *M* y *m* que cortarán las circunferencias en algunos puntos *K* y *k*. Finalmente se dividirá cada circunferencia en 24 partes iguales, empezando desde los puntos *K* y *k*.

8.° Desde los centros de los círculos se tirarán á los puntos de division radios, prolongándolos si fuere menester, á fin de que los del primer círculo encuentren la primera equinoccial, y los del segundo encuentren la segunda; los puntos de division en una y otra equinoccial serán puntos horarios. Por consiguiente si se tiran lineas de modo que cada una pase por dos puntos correspondientes de las equinocciales, que sean por egemplo uno y otro los puntos de diez horas, estas lineas serán lineas horarias que será menester señalar con caracteres que espresen las horas correspondientes. La segunda equinoccial puede estar mas arriba ó mas abajo que la primera. Si desde el punto *s* se baja la perpendicular *sp* á la substilar, y en los puntos *P* y *p* se plantan estilos perpendiculares al plano cuyas partes fuera de la pared sean iguales á las alturas *PS* y *ps*, la vara de hierro que descansare en los estremos de los estilos será el ege del relox; por consiguiente su sombra señalará las horas dando en las lineas horarias. La sombra del

del estremo de cada estilo puede señalar tambien las horas, porque es evidente que estos estremos son puntos del ege. Hemos de probar que las lineas que pasan por los puntos correspondientes de las dos equinocciales son lineas horarias. Fig.

Es constante que los puntos determinados en ambas equinocciales por los radios de los dos círculos son puntos horarios, pues los centros de estos círculos son los centros divisores de las dos equinocciales. Fuera de esto, el ege es uno mismo, es una misma la substilar respecto de ambas equinocciales. Por consiguiente las lineas horarias de las dos equinocciales han de ser tambien las mismas. Luego las lineas que pasan por puntos correspondientes de las dos equinocciales son lineas horarias, cuya posicion queda determinada por los puntos correspondientes por donde pasa.

608 Quando el que traza el relox tiene á mano un compas comun muy grande, puede trazar con facilidad otra equinoccial; todo se reduce á que tire una paralela á la primera equinoccial; y es muy facil tirar una paralela á la primera equinoccial á la distancia que se quisiere.

609 Cuestion III. *Dada la declinacion del plano y la altura del polo sobre el orizonte del lugar, trazar un relox vertical por medio de los puntos borarios determinados por cálculo en la linea equinoccial, con tal que el centro del relox no esté muy lejos de la orizontal y de la misma equinoccial.*

Fig. 80. Suponemos que se hayan sacado por lo dicho (595, 596 y 598) tres ángulos, es á saber, el que forman en el centro del relox la meridiana y la substilar; el de la elevacion del polo respecto del plano del relox, y el que forma la diferencia de las longitudes. Tambien suponemos que se han trazado la meridiana *CM*, la substilar *CB*, y la equinoccial *EN*.

Sentado esto, si conociéramos los puntos horarios en la equinoccial, se deberían tirar lineas rectas desde el centro del relox á dichos puntos, y estas serían las lineas horarias. Todo está, pues, en determinar estos puntos horarios en la equinoccial. Pero estos puntos los determinan diferentes partes de la equinoccial *B* 1, *B* 3, *B* 10 &c. comprendidas entre la substilar y radios tirados desde el centro *A* á los puntos de division de la circunferencia *FGKI*, que suponemos dividida en 24 partes iguales, empezando desde el punto *K* ó el punto *O*, que son las intersecciones de la circunferencia con dos radios que pasan el uno por el punto de medio dia, y el otro por el de seis horas. Luego hemos de determinar la longitud de las lineas *B* 1, *B* 3, *B* 10, esto es, quantas partes cogen de aquellas en que suponemos dividida la altura del estilo *SP*. Con esta mira averiguaremos primero quantas partes contiene el radio equinoccial *SB*, ó *AB*, por medio del triángulo rectángulo *SPB* conforme diremos despues. Hecho esto, repararemos que pueden ofrecerse tres casos en la determinacion de los segmentos *B* 1, *B* 3, *B* 10 &c. de la equinoc-

noccial; porque el punto horario puede estar entre la meridiana y la substilar, tal es el punto 1; ó mas allá de la substilar respecto de la meridiana, como el punto 3; ó mas allá de la meridiana respecto de la substilar, como el punto de 10 horas. En los dos primeros casos el ángulo *BA*1 y *BA*3 es la diferencia entre la distancia del Sol al meridiano, y la diferencia de las longitudes. En el tercer caso el ángulo *BA*10 es la suma de la distancia del Sol al meridiano, y de la diferencia de las longitudes. Sea, por egemplo, la difereneia de las longitudes ó el ángulo *BAM* de 43°, el ángulo *BA*1 en el primer caso será de 28°, por ser 28 la diferencia que vá de 15 á 43. La distancia del centro del Sol al meridiano es de 15° á la una de la tarde. El ángulo *BA*3 será de 2° en el segundo caso, porque el Sol está 45° mas allá del meridiano á las tres de la tarde, y la diferencia de 45 á 43 es 2. Finalmente el ángulo *BA*10 en el tercer caso es de 73°, porque á las 10 de la mañana el Sol dista 30° del meridiano, y la suma de 30 y 43 es 73. Fig. 80.

Todo esto presupuesto, los puntos horarios se determinarán por la siguiente analogía: *como el seno total es al número de las partes que coge* AB *ó el radio equinoccial* SB, *así la tangente de la diferencia ó de la suma espresada es al número de las partes del segmento* B1, *ó* B3, *ó* B10 *de la equinoccial.*

Porque si en el triángulo rectángulo *AB*1, ó *AB*3, ó *AB*10, tomamos el lado *AB* por radio, siendo *A* el cen-

Fig. 80. centro, el otro lado *B* 1, ó *B* 3, ó *B* 10 será la tangente del ángulo *BA* 1, *BA* 3, *BA* 10, que es la diferencia ó la suma de la distancia del Sol al meridiano y de la diferencia de las longitudes. Luego es cierta la analogía (I. 665), pues consiste en que se considera primero el lado *AB* como radio, despues como que contiene cierto número de partes, y miramos igualmente *B* 1, ó *B* 3, ó *B* 10 como tangente del ángulo *BA* 1, ó *BA* 3, ó *BA* 10, y como que contiene un número de partes iguales á las de *AB*.

610 Se pueden determinar por un cálculo mas breve las partes de la equinoccial comprendidas entre la substilar y las lineas horarias. A este fin se tomará un radio equinoccial que no tenga mas que 1000 partes, y el lado *AB* = *SB* por radio dividido en 1000 partes, y los lados *B* 11, *B* 10, *B* 9, ó *B* 1, *B* 2, *B* 3 serán las tangentes de los ángulos en *A*. Supongamos que se ofrezca determinar *B* 3, en el supuesto de ser de 48° 52′ el ángulo *CHL* ó la altura del polo sobre el orizonte, la declinacion *PDL* del plano 35°, en cuyo supuesto el ángulo *BA* 3 será de 2° 5.′ Se buscará, pues, la tangente de este ángulo que se saca de 3637 ó 3638; pero como este número supone, por la formacion de las tablas, el radio de 100000 partes, y nosotros no le damos mas que 1000, hemos de quitar los dos últimos guarismos del número 3638, luego *B* 3 no tiene mas que 36 partes iguales. Del mismo modo se hallarán las demas partes de la equinoccial.

Si

79

81

83

Si alguna circùnstancia particular lo pidiera, tambien se podría tomar un radio de 1500 partes, y como este número tiene la mitad mas que 1000, tambien se le debería añadir al número 36 la mitad 18. Fig.

611 Cuestion IV. *Dada la declinacion del plano y la altura del polo sobre el orizonte del lugar, trazar un relox vertical por medio de los puntos horarios determinados por cálculo en dos lineas equinocciales, sea mucha ó poca la distancia del centro del relox á las lineas equinocciales.*

Para resolver esta cuestion, supondremos que se haya determinado (595, 596 y 598) 1.° el ángulo que forma la meridiana con la substilar. 2.° la altura del polo sobre el plano del relox. 3.° la diferencia de las longitudes. Tambien supondremos trazadas la meridiana, la substilar, y la equinoccial.

1.° Se determinarán por cálculo las partes de la equinoccial *BI*, *BXI*, *BX* &c. comprendidas entre la substilar y los puntos horarios. Para este fin se tomará un radio equinoccial de 1000 partes no mas; se considerará como radio la *AB* = *SB*, dividido en 1000 partes, y los lados *BXI*, *BX*, *BIX* ó *BI*, *BII* &c. serán las tangentes de los ángulos en *A*. 84.

2.° Se buscará la distancia del centro del relox á la equinoccial; con süponer el radio *BS* de 1000 partes, se hallará facilmente; porque en el triángulo *CBS* rectángulo en *S*, si tomamos *BS* por radio, siendo *B* el centro, la linea *CB* será la secante del ángulo *CBS*. Como

co-

Fig. 84. conocemos el ángulo *BCS* que es la altura del polo sobre el plano del relox, conoceremos tambien el ángulo *CBS* que es su complemento; se buscará, pues, el valor de la secante del ángulo *CBS*, suponiendo el radio de 1000 partes, esta secante será la distancia *CB*.

3.° Despues de determinada la distancia *CB* del centro del relox á la equinoccial, se tomará en la substilar el punto *b* distante de la equinoccial una parte aliquota de la distancia *CB*, pongo por caso, la quarta parte, un tercio &c; el punto *b* se puede tomar mas lejos ó mas cerca del centro que la equinoccial; por el punto *b* se tirará despues una linea perpendicular á la substilar ó paralela á la equinoccial; esta paralela será la segunda equinoccial.

4.° En esta segunda equinoccial se señalarán los puntos horarios; supongamos que esté mas inmediata al centro del relox que la primera, de modo que la linea *Cb* sea la mitad de la distancia *CB*; entonces las partes de la segunda equinoccial comprendidas entre la substilar y los puntos horarios no serán mas que la mitad de las partes correspondientes de la primera. Por egemplo, *b* 11 de la segunda equinoccial no será mas que la mitad de *BXI*, que es la parte correspondiente en la primera. Por consiguiente, si *BXI* contiene 1200 partes iguales de la escala, *b* 11 contendrá 600. Con esto quedará determinado el punto 11. Del mismo modo se hallarán los puntos horarios de la segunda equinoccial. Si la distancia *CB* fuese quádrupla de *Cb*, la parte *BXI* sería quádrupla de *b* 11. Pero si la segun-

gunda equinoccial estuviere del centro del relox á mayor distancia que la primera, y la distancia *Bb* fuere por egemplo la quarta parte de *CB*, entonces se le añadirá á *BXI* la quarta parte de esta longitud *BXI*, y se tomará *b* 1 1 igual á la suma, el punto 1 1 señalará el punto de las once en la segunda equinoccial. Si por egemplo, *BXI* fuese de 1200 partes, *b* 1 1 será de 1500. Fig. 84.

5.° Se tirarán lineas rectas que pasen por los puntos correspondientes de las dos equinocciales, pongo por caso, por los puntos *XI* y 1 1, y quedarán trazadas las lineas horarias que se cortarán en el centro del relox, si se las prolongare.

Despues de todo lo dicho, no hay en este método mas que un punto que necesite de prueba, es á saber, porque la parte *b* 1 1 de la segunda equinoccial, es mas corta ó mas larga que la linea *BXI* de la primera equinoccial, la quarta parte de *BXI*, en el supuesto de que sea *Bb* la quarta parte de *CB*; con este fin daremos la siguiente demostracion, en la qual suponemos la linea *CB* mayor que *Cb*.

El triángulo *bC*1 1 es semejante al triángulo *BCXI*, por ser paralelas las bases *b* 1 1 y *BXI*; luego *Cb* : *CB* :: *b* 1 1 : *BXI*. Pero la linea *Cb* es mas corta que *CB* la quarta parte de la distancia *CB*, por ser *Bb* la quarta parte de *CB*; luego la base *b* 1 1 es tambien menor que *BXI* la quarta parte de *BXI*; luego para hallar *b* 1 1, se debe restar de *BXI* la quarta parte de la base *BXI*, y el residuo será *b* 1 1.

Por

Fig. 84. 612 Por lo que mira á las tres lineas principales, esto es, la meridiana, la substilar, y la equinoccial, se tirarán en el plano conforme vamos á proponer.

1.° La meridiana se traza de modo que quando la declinacion del plano es de 40 ó 50°, ó mayor, la parte del plano que está del lado donde se han de tirar mas lineas horarias, sea mayor que la otra, á no ser que el plano sea muy ancho.

2.° Por lo que toca á la equinoccial, si distare mucho del centro del relox, y esto sucede siempre que la declinacion del plano es mucha, como de unos 70°, se practicará lo siguiente. Desde un punto de la parte inferior de la meridiana se tirará una linea que forme con esta meridiana un ángulo *CMB* igual al complemento del ángulo *MCB* que forma la meridiana con la substilar; esta linea será la equinoccial. Este ángulo agudo *CMB* ha de estar á un mismo lado de la meridiana con la substilar.

3.° Con el compas de vara se tomará la distancia *MB*, esto es, la tangente de la diferencia de las longitudes, que es la parte de la equinoccial que ha de estar entre la meridiana y la substilar, y en el punto *B* se levantará una perpendicular á la equinoccial; esta será la substilar.

613 Sucede con frequencia que el plano no es bastante grande para poder prolongar la primera equinoccial, esto es, la mas distante del centro, todo lo que conviene, para señalar en ella todos los puntos horarios. En este caso se tirará otra que corte en dos partes iguales en el punto *b*

la

la distancia *Cb* desde el centro á la segunda equinoccial, y Fig. entonces los intervalos señalados en esta tercera equinoccial desde la substilar hasta los diferentes puntos horarios, serán las mitades de los intervalos correspondientes en la segunda equinoccial. Y si no se pudiere prolongar bastante esta segunda equinoccial, se tirará otra que divida la distancia entre el centro y la tercera en dos partes iguales y los intervalos tomados en esta nueva equinoccial desde la substilar hasta los diferentes puntos horarios, serán las mitades de los intervalos de la tercera, y así prosiguiendo.

614 Cuestion V. *Dada la declinacion del plano y la altura del polo sobre el orizonte, hallar por cálculo los puntos horarios en la orizontal.*

Para hacerse cargo del método que vamos á propo- 85.
ner, es menester figurarse un relox orizontal hecho para la misma altura de polo sobre el orizonte que el relox vertical; este relox orizontal nos le figuraremos metido perpendicularmente dentro del plano vertical, de modo que su interseccion con dicho plano forme la linea orizontal del relox vertical, y que la linea meridiana del relox orizontal vaya á encontrar la meridiana del vertical. Es menester figurarse tambien que el relox orizontal esté bastante metido en el plano vertical á fin de que el estremo del ege del vertical entre en el centro *D* de la orizontal: (la linea *DP* nos la hemos de figurar perpendicular al plano del relox vertical): entonces la perpendicular *DP* tirada desde el centro á la linea orizontal será la altura del estilo del

Fig. 85. del relox vertical, y cada linea horaria como *DIII*, del relox orizontal será la hypotenusa del triángulo rectángulo *DPIII*, cuyo lado *DP* podemos tomar por el radio estando el centro en *D*, en cuyo caso la parte *PIII* de la orizontal será la tangente del ángulo *PDIII* del relox orizontal. Sentado esto, los puntos horarios se determinan en la linea orizontal del modo siguiente.

Estos puntos horarios, están del mismo lado de la meridiana respecto de la substilar, ó están del otro lado. En el primer caso se tomará la diferencia entre el ángulo horario del relox orizontal y la declinacion del plano, y la resta será el ángulo cuya tangente será parte de la linea orizontal, y esta parte estará comprendida entre el pie del estilo y el punto horario propuesto. Por consiguiente con tomar en la orizontal la longitud de esta tangente desde el pie del estilo ácia la meridiana, quedará determinado el punto horario que se buscare. En el segundo caso se sumará la declinacion con el ángulo horario en el centro del relox orizontal, la suma será el ángulo, cuya tangente será una parte de la linea orizontal, y esta parte estará comprendida entre el pie del estilo y el punto horario propuesto. Por consiguiente con determinar la longitud de esta tangente, y tomarla desde el pie del estilo ácia la meridiana, quedará determinado el punto horario que se buscare.

615 Una vez hallados en las tablas de las tangentes los números de partes iguales que ha de comprender la distancia desde el pie del estilo hasta cada punto horario en

en la orizontal, es facil de trazar el relox, con tal que Fig.
ademas de la altura del polo sobre el plano, sea conocido 85.
tambien el ángulo de la substilar con la meridiana. Este ángulo se determinará por lo dicho (595), y despues se paracticará lo siguiente.

1.° Se tirará una vertical y se la tomará por meridiana, en cuyo estremo superior se tomará un punto que se considerará como el centro del relox, que suponemos vuelto ácia el sur.

2.° Se trazará desde el centro una linea que forme con la meridiana el ángulo sacado por lo dicho (595), esta será la substilar; ha de estar á la izquierda de la meridiana quando el plano declina ácia el oriente, y á la derecha quando declina ácia el occidente: es todo al revés en los reloxes del norte.

3.° Se tomará en la substilar la distancia del centro *C* al pie del estilo *P*, y desde este punto se tirará una perpendicular á la meridiana; esta será la orizontal que se buscare, en la qual se señalarán los puntos horarios con una escala de partes iguales, tomando en esta orizontal desde el pie del estilo distancias iguales con las tangentes de los diferentes ángulos.

4.° Finalmente se tirarán líneas desde el centro del relox á los diferentes puntos horarios, y estas serán las líneas horarias. Pero si el centro del relox estuviere muy distante de la orizontal, se tirará una paralela á la orizontal, y en esta paralela que es otra orizontal, se determi-

Fig. narán los puntos horarios conforme vamos á manifestarlo.

85. 616 Cuestion VI. *Dadas la declinacion del plano, y la altura del polo sobre el orizonte, trazar un relox vertical por medio de dos lineas orizontales, sea la que fuere la distancia del centro del relox á la primera orizontal.*

Suponemos que se hayan determinado por cálculo dos ángulos principales, es á saber, 1.° el que ha de formar la meridiana con la substilar. 2.° la altura del polo sobre el plano.

1.° Se buscarán por cálculo (614) las partes de la orizontal *PI*, *PIII* &c. comprendidas entre la substilar y los puntos horarios.

2.° Tambien se determinará por cálculo la parte *CP* de la substilar comprendida entre el centro del relox y la orizontal. Esta distancia se determinará facilmente por medio del triángulo *CPS* rectángulo en *P*, tomando por la altura del estilo que es *PS*, una linea de 1000 partes iguales á las de la escala que sirve; porque si se toma *SP* por radio, siendo *S* el centro, será *CP* la tangente del ángulo *CSP*, complemento de *PCS*, altura del polo sobre el plano.

3.° Despues de determinada la distancia *CP* del centro del relox al pie del estilo, se tomará un punto *p* de la substilar que diste del pie del estilo una parte aliquota de la distancia *CP*, pongo por caso la tercera ó quarta parte &c. sea que el punto *p* esté mas cerca ó mas lejos del centro del relox que *P*, y por dicho punto se tirará una pa-

paralela á la primera orizontal; esta paralela será la segunda orizontal. Fig. 85.

4.° En esta segunda orizontal se señalarán los puntos horarios. Supongamos que esté mas próxima que la primera al centro del relox, de modo que la linea *Cp* sea la mitad de la distancia *CP*, entonces se determinarán los puntos horarios de la segunda orizontal, haciendo los intervalos entre la substilar y dichos puntos, mitades de los intervalos correspondientes en la primera orizontal; *p*3, por egemplo, ha de ser la mitad de *PIII*.

Si la segunda orizontal estuviere mas lejos del centro del relox que la primera, y la distancia *Pp* fuere, por egemplo, el quarto de la distancia *CP*, entonces al intervalo *PIII* se le añadirá el quarto del mismo intervalo, y la suma será igual á *p*3 de la segunda orizontal. Así, en el supuesto de ser *PIII* de 400 partes, *p*3 será de 500.

5.° Se tirarán lineas rectas que pasen por los puntos correspondientes de las dos orizontales, pongo por caso por los puntos *III* y 3, y estas serán las lineas horarias que se cortarán en el centro del relox, si se las prolongare hasta allá.

Se demuestra esta resolucion del mismo modo que la de la cuestion propuesta antes (611).

617 Quando el centro del relox está fuera del plano, conforme sucede quando es mucha la declinacion, pongo por caso de 70° ó mas, la substilar se traza del modo siguiente. Suponemos trazadas la meridiana y la orizontal;

 se

Fig. se toma en la orizontal la parte LP igual á la tangente
85. del ángulo PDL, que es la declinacion del plano; y por el punto P se tira una linea CP que forme con la orizontal el ángulo CPL igual al complemento del ángulo en el centro, que forma la meridiana con la substilar; esta linea CP será la substilar que se busca.

Cómo se coloca el Ege.

618 Hemos dicho que el ege del relox ha de ser paralelo al ege del mundo, para cuyo fin debe formar con la substilar, y por consiguiente con el plano (550) un ángulo igual á la altura del polo sobre el plano. No deja de tener su dificultad esta operacion, pero se vence con una escua-
86. dra doble de madera ABC, compuesta de dos partes principales AM y BC juntas perpendicularmente una con otra por medio de una espiga. Hay otras dos piezas NG y NH para mantener las otras dos firmes en su situacion. La primera pieza AM ha de tener como unos 3 pies de largo, y $2\frac{1}{4}$ pulg. de ancho; la segunda BC es de pie y medio de largo, y $2\frac{1}{4}$ pulg. de ancho; las otras dos que sirven de sustentáculos son algo menos anchas; pero el grueso de todas es uno mismo y de una pulgada al poco mas ó menos. En la primera pieza se traza la linea AM muy perpendicular al borde inferior EF de la segunda pieza. En la parte inferior de la pieza BC se plantan dos puntas E, F, que salgan como unas tres lineas, y estén á igual distancia del punto M: sirven estas dos puntas para impedir que la es-

cua-

cuadra doble se escurra á lo largo de la pared al aplicarla Fig.
el borde *EF*, conforme diremos dentro de poco. 86.

Estas puntas han de estar en el plano de la escuadra donde está trazada la linea *AM*, para lo qual es preciso que su raiz sea algo chata, y haya uno ú dos agugeros donde se afiancen en el plano de la pieza *BC* con clavos.

619 Tambien se hace uso de una triple escuadra 87.
abcn, particularmente quando el relox no tiene centro por causa de la mucha declinacion del plano. Se la coloca del lado donde debería estar el centro del relox para asegurar una de las puntas del ege, al tiempo de fijarle. Ha de haber en esta esquadra una linea *am* perpendicular al borde *ef*, y dos ó tres puntas *e*, *f*, *g* para asegurar este instrumento en el plano.

620 El ege ha de ser tan largo que su sombra aun quando es la mas corta, llegue á la parte mas baja de la meridiana. Su grueso ha de ser de 5 ó 6 lineas de diámetro, y un poco mas si el relox fuere muy elevado. Se procurará sea de un mismo grueso en toda su longitud, bien que ácia el centro del relox podrá ser un poco menos grueso; pero sus dos estremos han de rematar en dos puntas que estén en medio de su grueso, ó en el ege del mismo ege.

621 Por lo que mira á los sustentáculos, el mayor ha de estar ácia el medio del ege, algo mas apartado del estremo, que está en el centro, que del otro. El menor se debe poner en un punto del ege distante 4 ó 5 pulgadas

Fig. del centro del relox. La parte del sustentáculo mayor metida en la pared ha de ser de 5 ó 6 pulgadas, y la del menor de 4 pulgadas. Bueno será que la parte metida en la pared forme dos piernas curvas en forma de arcos. Cada sustentáculo ha de tener de grueso lo mismo que el ege en la parte donde le sostiene; pero ácia la pared ha de ser mas grueso y mas fuerte, particularmente el sustentáculo mayor. Resta determinar quanto ha de coger de largo la parte de cada sustentáculo entre la pared y el ege.

88. 622 Sea *LCX* un ángulo igual á la altura del polo sobre el plano; *CL*, la substilar; *CX*, el ege; *G*, es el punto del ege donde se quiere plantar el sustentáculo mayor: hemos de determinar *GH*. En el triángulo *CGH* rectángulo en *G*, conocemos el ángulo recto *G*, el ángulo *C* altura del polo sobre el plano, y con el compas de vara podemos medir al lado *CG*. Haremos, pues, la proporcion siguiente, siendo *CG* el radio y el centro *C*, en cuyo caso *GH* es la tangente del ángulo *C*: *El seno total es á la tangente de la altura del polo sobre el plano, como el lado* CG *es á* GH. Para hallar *EF*, diremos: *El seno total es á la tangente de la altura del polo sobre el plano, como* CE *es á* EF. Veamos ahora cómo se coloca el ege.

623 Conviene figurarse la *XL* tirada desde el estremo *X* del ege perpendicularmente á la substilar, y buscar la longitud de *XL* y de *CL*, que se hallará por medio del triángulo *CLX* rectángulo en *L*, cuyos ángulos y el lado *CX* son conocidos. Porque si consideramos el ege *CX* como

mo radío, la perpendicular *LX* será el seno de la altura Fig.
del polo sobre el plano, y el lado *CL* el seno de *CXL* 88.
complemento del mismo ángulo. Haremos, pues, estas dos analogías: *El seno total es al seno de la altura del polo sobre el plano, como el ege es al lado* XL; y despues: *El seno total es al seno del complemento de la altura del polo sobre el plano, como el ege es al lado* CL.

624 Despues de hallados estos dos lados *XL* y *CL*, 86.
se tomará en la escuadra doble la linea *DM* igual con *XL*, 88.
y con un lapiz se señalará el punto *D*; se tomará tambien en la substilar trazada en el plano la parte *CL* qual se hubiere sacado por el cálculo; despues se tirará por el punto *L* una perpendicular *OP* á la substilar, y se harán dos agugeros en la pared en los puntos de la substilar donde se han de meter los estremos de los sustentáculos; y esto se conocerá al poco mas ó menos con aplicar el ege al plano del relox, de modo que el estremo que ha de estar en el centro cayga encima del mismo centro, y que las partes esteriores de los sustentáculos estén comprendidas entre la substilar y el ege tendido en el plano; porque los aguge-ros se deberán hacer en los puntos donde los sustentáculos cortaren la substilar. Quando fueren bastante hondos estos aguferos para que quepan en ellos las partes interiores de los sustentáculos, se procurará poner al poco mas ó menos el ege en su situacion natural para conocer si dichos aguferos siguen la direccion que han de seguir los sustentáculos. Despues de hechos como corresponde los aguge-

Fig. 86. 88. ros, se aplicará el borde *EF* de la escuadra doble sobre la linea *OP*, metiendo en la pared las puntas de este instrumento, de modo que los puntos *M* y *L* se confundan en uno solo; colocando despues el ege en su situacion, se pondrá el estremo *X* sobre el punto *D* del instrumento, y se aplicará de este modo este instrumento junto al ege que por otra parte descansa en un clavo plantado de antemano en el centro del relox, en cuya cabeza hay un agugerito donde meter la punta del ege; este agugero es el verdadero centro del relox.

625 Estando colocada conforme acabamos de decir la escuadra doble junto al ege, cuyo otro estremo está en el centro del relox, no hay duda en que está en su verdadera situacion, pues forma con el plano del relox el mismo ángulo que el ege del mundo, es á saber el ángulo de la altura del polo sobré el plano. Se debe, pues, asegurar el ege en esta situacion; con esta mira se pondrán cuñas en los agugeros al rededor de los sustentáculos, manteniendo siempre la doble escuadra arrimada á la punta del ege, pero sin apretar mucho, á fin de que no se doble el ege. Despues de metidas las cuñas en los agugeros al rededor de los sustentáculos, particularmente á la parte donde se caería el ege si no se le sostuviera, se apartará un tantito del estremo del ege el punto *D* de la doble escuadra, para ver si el ege se mantiene en la misma situacion, lo que se verifica si al arrimar otra vez la doble escuadra á la punta del ege, esta punta remata todavía en el punto *D*.

Quan-

Quando esto se verifica, se fija al instante el sustentá- Fig.
culo menor, manteniendo siempre la doble escuadra ar- 88.
rimada á la punta del ege; y en estando algo seco el yeso, se repite la misma prueba, para ver si el ege se mantiene en la misma situacion; despues se fija el sustentáculo mayor. Pero antes de fijar estos sustentáculos, hay otra prueba que hacer.

626 Así que están puestas las cuñas, se toman en la linea *OP* partes iguales á cada lado del punto *L*, como *LO*, *LP*; despues se miden las distancias *XO*, *XP*; y si fueren iguales, será señal de estar bien colocado el ege, con tal que por otra parte la distancia *XL* sea la que corresponde, esto es, igual al quarto término de la proporcion de antes. Esta prueba se ha de repetir despues de fijados los sustentáculos, y aun quando se vá á quitar el andamio, por recelo de que los oficiales hayan tropezado con el ege, y alterado su situacion.

627 Los puntos *O* y *P* se han de tomar en parages donde la superficie de la pared no esté ni levantada, ni honda, porque si el uno de los dos puntos fuere mas alto ó mas bajo que el otro, la prueba saldría fallida. Si no se pudieren hallar dos puntos igualmente distantes de *L*, quales corresponde, y no se encontrase mas que uno, por egemplo *O*, que estuviera á la misma altura que *L*, se podría hacer igualmente la prueba, midiendo con un compas de vara la distancia *XO*, para ver si contiene tantas partes quantas ha de coger la hypotenusa del ángulo rec-

to

Fig. to *XLO*, cuyos dos lados son dados; si esto se verificare,
88. estará bien colocado el ege.

628 Ahora enseñaremos cómo se determina la longitud del ege, qual ha de ser, á fin de que su sombra, aun quando es la mas corta, esto es en el solsticio de invierno, cubra toda la meridiana en los reloges verticales. Su-
89. pongamos que el ege *CX* tiene de largo lo necesario, á fin de que correspondiendo entonces el Sol al trópico de Capricornio, su rayo que pasa por el estremo *X* del ege, vaya á parar al punto *I* de la meridiana, hasta donde se quiere que alcance la sombra mas corta; para hallar el lado *CX* tendremos que resolver el triángulo *CIX*. Pero en este triángulo conocemos el lado *CI*, no hay sino medirle. Conocemos el ángulo *CIX*, igual al complemento de la altura meridiana del Sol sobre el orizonte, esto es, del ángulo que forma el radio *XI* con un plano orizontal; finalmente conocemos tambien el ángulo *CXI*; porque si el Sol estuviera en el equador, el radio que arrojaría sería perpendicular al ege, porque hemos de considerar el vértice del ege como el centro del equador ó del mundo; por consiguiente el ángulo que forma en *X* el ege con el rayo del Sol, sería recto; luego yá que el Sol está mas bajo que si estuviera en el equador, y la diferencia es la declinacion del Sol, que entonces es de $23^\circ\ 28'$, el ángulo *CXI* será $23^\circ\ 28'$ menor que un ángulo recto, y será por lo mismo de $66^\circ\ 32'$. Haremos, pues, la siguiente analogía para determinar la longitud del ege, á fin de que su sombra meridiana al-

can-

cance hasta el punto *I* quando es la mas corta: *El seno del ángulo* CXI *es á* CI, *como el seno del ángulo* CIX *es á* CX; esto quiere decir: *El seno de* 66° 32′ *es á* CI, *como el seno del complemento de la altura meridiana del Sol en el solsticio inverno es á* CX. Fig. 89.

629 Si el centro del relox no estuviese en la superficie de la pared, será preciso valerse para colocar el ege, no solo de la doble escuadra, mas tambien de la triple. Pero antes

1.° Se buscará á qué punto de la substilar debe corresponder el estremo inferior del ege, para que su sombra alcance hasta el estremo inferior de la meridiana en el solsticio de invierno. Con este fin se debe determinar primero, por el triángulo *CBM* rectángulo en *B*, la longitud 90.
de la meridiana desde el centro *C* hasta el punto *M* que es la interseccion de la equinoccial con la meridiana. En este triángulo conocemos el ángulo recto *B*, el ángulo *MCB* (595) que forma la meridiana con la substilar, y finalmente el lado *BM* que es la distancia que coge la equinoccial entre la substilar y la meridiana (610); sacaremos, pues, el valor de *CM*. Del mismo triángulo sacaremos tambien el valor de la parte *CB* de la substilar. Despues de hallada *CM*, se medirá *MI* ó lo demás de la meridiana hasta el punto *I*, que está en el estremo inferior de dicha linea, y se añadirá á *CM*. Hecho esto, se buscará quanto debería coger de largo todo el ege *CX* para que su sombra meridiana llegára hasta el punto *I* en

el

Fig. 90. el solsticio de invierno. Esto se conseguirá por lo dicho (628) haciendo por medio del triángulo *CIX* la siguiente analogía: ***El seno del ángulo*** CXI ***es á*** CI, ***como el seno de*** CIX ***es á*** CX. Finalmente, despues de determinada la longitud de todo el ege, se buscará el punto *L* de la substilar, al qual corresponde el punto *X*, esto es el punto donde iria á parar una perpendicular bajada desde el punto *X* al plano. La analogía que dá el triángulo *CLX* para hallar este punto, es como sigue: ***El seno total es al ege*** CX, ***como el seno del ángulo*** CXL, ***complemento de la altura del polo sobre el plano, es á*** CL. Se tomará la diferencia que vá de *CL* á *CB*, y se señalará en la substilar un punto *L* que diste del punto *B* la cantidad de dicha diferencia; y será el punto *L* el que se busca. Se buscará tambien la linea *XL*, conforme digimos antes (623).

630 2.° Despues de mandado hacer el ege ó por mejor decir una parte del ege, como *VX*, con uno ó dos sustentáculos, cuya longitud se hubiere determinado (622), se medirá puntualmente el ege con un compas de vara, y se rebajará el número de las partes que cogiere, de las que corresponden á todo el ege *CX*, con esto quedará determinado el residuo *CV*, que servirá para hallar el punto *K* adonde irá á parar la perpendicular tirada desde el punto *V*; todo consistirá en hacer por medio del triángulo rectángulo *CKV* la siguiente proporcion: ***El seno total es á*** CV, ***como el seno de*** CVK, ***complemento de la altura del polo sobre el plano, es á*** CK. Restando este

quar-

quarto término del número de las partes de *CL*, el remanente será *KL*. Por consiguiente, si se señalare en la substilar un punto cuya distancia al punto *L* sea igual con dicho remanente, estará determinado el punto *K*. Fig.

631 3.° Las longitudes de las dos perpendiculares *VK* y *XL* se han de señalar en las lineas *am* y *AM* de la triple y doble escuadra, de modo que *dm* sea igual á *VK*, y *DM* á *XL*: por los puntos *K* y *L* se tirarán despues lineas *GH*, *OP* perpendiculares á la substilar. Tambien se mandarán hacer dos agugeros sobre la substilar en los puntos á propósito para plantar los sustentáculos, si hubiere dos, ó uno solo si no hubiere mas que un sustentáculo. Pero para saber en qué puntos de la substilar se han de hacer agugeros, se tomarán las dos partes *KH* y *PL* iguales con las perpendiculares *VK*, *XL*, y se tenderá el ege sobre el plano, de modo que los dos estremos *V* y *X* del ege correspondan á los dos puntos *H* y *P*; estando el ege en esta situacion, los agugeros se deberán hacer en los puntos donde los sustentáculos cortaren la substilar, y las partes de los sustentáculos que pasaren mas allá de la substilar determinarán el hondo de los agugeros. 86. 87. 90.

632 Despues de hechos estos, se aplicará el borde *ef* de la triple escuadra á la *GH*. Por manera que el punto *m* esté sobre *K*, y se hará que algun oficial mantenga el instrumento en esta situacion. Tambien se aplicará el borde *EF* de la doble escuadra á la perpendicular *OP*, de modo que el punto *M* coincida con el punto *L*. Finalmente se co-

Fig. colocará el ege en su situacion, metiendo los sustentáculos en sus agugeros, y haciendo que los dos estremos del ege que han de ser puntiagudos, correspondan á los dos puntos *D* y *d* de las escuadras; y para rematar, se fijarán los sustentáculos con las precauciones y verificaciones espresadas.

ELE-

85
C
Z
h
l
r
10
11
12
1
S
H
L
R
X
XI
XII
I
P
III
D
R
n
N
I
A
86
G
H
B
C
E
M
F
87
a
n
g
d
e
f
b
c
m
X
C
V
90
G
K
H
I
X
M
B
P
L
O

ELEMENTOS DE PERSPECTIVA.

Fig.

633 REpresentar en un quadro puesto entre el ojo y un obgeto la perspectiva de este obgeto, es lo mismo que señalar en el quadro cada uno de los puntos donde le atravesarian respectivamente todos los rayos de luz que desde cada punto de la superficie del obgeto puesta á la vista fuesen á parar al ojo; saldría perfecta la imagen del obgeto si á cada uno de dichos puntos del quadro se le diera el mismo color del rayo de luz que por él pasa. El arte que enseña cómo se dan estos colores, se llama *la Perspectiva Aerea*, y no entra en el número de las partes de la Matemática.

634 Se viene á la vista que quanto se representa en un quadro se ha de ver en una mirada, porque un quadro representa el instante de una accion que pasa, que por consiguiente solo se puede ver en una mirada.

635 Deseosos de tratar fundamentalmente quanto acerca de este punto nos hemos propuesto publicar, sentaremos primero los fundamentos geométricos de la Perspectiva, y daremos despues diferentes métodos prácticos para egecutar la de qualesquiera obgetos que se puedan ofrecer.

Fun-

Fig.

Fundamentos de la Perspectiva.

636 La definicion que hemos dado (633) de la Perspectiva está diciendo, que *la perspectiva de un punto qualquiera está en el punto del quadro donde el rayo que vá desde dicho punto al ojo, atraviesa el plano del quadro.*

637 *La perspectiva de una recta original que prolongada no pasaría por el ojo, es una recta que forma la interseccion del plano del quadro con el plano de un triángulo rectilineo, cuya base fuese la recta original, y los lados fuesen los dos rayos que desde sus estremos fuesen á parar al ojo.*

638 Para formar juicio de la perspectiva de una figura plana, conviene figurarse que todos los rayos tirados desde cada punto de la superficie visible de la figura propuesta hasta el ojo, forman una pirámide, cuya base es la misma figura plana, y el vértice está en el ojo. La figura que deja estampada en el quadro la interseccion de su plano y de la espresada pirámide es la perspectiva de la figura original propuesta. De aquí se infiere:

639 1.° *Que la perspectiva de un polýgono solo será una figura semejante á su original, quando el plano del polýgono fuese paralelo al plano del quadro.* Porque la seccion de una pirámide con un plano solo es una figura semejante á su base quando el plano secante es paralelo á dicha base (I. 601).

640 *Que la perspectiva de un sólido es una figura pla-*

plana que se compone de las perspectivas de cada una de las caras del sólido que el ojo puede ver á un tiempo. Fig.

641 *De qualquier modo que esté colocado el quadro, todas las perspectivas de quantas rectas originales se quisieren, paralelas entre sí, se han de encaminar al punto (dentro ó fuera) del quadro donde encuentra su plano una recta tirada desde el ojo paralelamente á dichas rectas originales.*

Porque sea la que fuere la situacion de dos ó mas rectas originales respecto del ojo, parece que ván á concurrir (VI. 399) en un punto; luego tambien parecerá que sus perspectivas ván á concurrir en algun punto. Pero el ojo ha de ver, y vé con efecto, en un mismo rayo el punto de concurso de las dos lineas originales, y el de sus perspectivas (636); luego el punto de concurso de las dos lineas perspectivas está en el punto del quadro donde atraviesa su plano la recta que vá desde el ojo al punto de concurso de las dos rectas originales. Y como el punto de concurso aparente de las dos lineas originales está á una distancia infinita del ojo, la recta tirada desde el ojo á dicho punto es paralela con ellas (I. 326); luego el punto de concurso de las perspectivas de las dos rectas originales está en el punto del quadro donde encuentra su plano (prolongado si fuere menester) una recta tirada desde el ojo paralelamente á dichas rectas originales. Síguese de aquí

642 1.° Que si las dos rectas originales fuesen tambien paralelas al plano del quadro, la recta tirada desde

Fig. el ojo á su punto de concurso aparente no podrá encontrar el plano del quadro, pues en este caso será paralela con él; luego las perspectivas de dichas rectas originales no podrán concurrir en un punto, y por lo mismo serán paralelas entre sí. *Por consiguiente si suponemos un quadro colocado verticalmente ó á plomo, las perspectivas de todas las rectas originales verticales, serán rectas verticales; las perspectivas de todas las rectas orizontales ó á nivel, y paralelas al plano del quadro, serán rectas trazadas á nivel en el quadro. Las perspectivas de todas las rectas originales paralelas al plano del quadro, é inclinadas al orizonte, son paralelas inclinadas al orizonte la misma cantidad que están inclinadas las originales.*

643 2.° *En un quadro vertical, las perspectivas de todas las rectas originales puestas á nivel, y al mismo tiempo perpendiculares al plano del quadro, han de concurrir todas al punto de vista del quadro.*

Porque el punto del quadro que llamamos *Punto de vista* es el punto donde vá á parar la recta tirada desde el ojo perpendicularmente al plano del quadro, que por lo mismo es paralela á dichas rectas originales.

644 *Si una recta original, paralela al plano del quadro, está dividida en partes iguales, su perspectiva estará tambien dividida en partes iguales; pero si la misma recta original dividida en partes iguales no fuese paralela al plano del quadro, su perspectiva no estará dividida en partes iguales.*

Sea

Sea AB la recta original dividida en quatro partes igua- Fig.
les en los puntos C, D y E, y paralela al plano del quadro 91.
figurado en GH; sea O el lugar donde ha de estar el ojo. La perspectiva de la recta AB será ab, y es evidente que si tiramos OA, OC, OD, OE, OB, los triángulos AOC, aOc; COD, cOd; DOE, dOe; EOB, eOb serán semejantes (I. 466). Luego yá que las bases AC, CD, DE, EB son iguales, lo serán tambien sus lineas homólogas ac, cd, de, eb. Pero si la posicion del quadro fuere PQ inclinada á la recta AB, los triángulos $a'Oc'$, $c'Od'$, $d'Oe'$, $e'Ob'$, yá no serán semejantes á sus correspondientes AOC, COD, DOE, EOB; luego como las bases AC, CD, DE, EB son iguales, no lo serán las bases $a'c'$, $c'd'$, $d'e'$, $e'b'$. Luego

645 1.° Por razon de los triángulos semejantes, es constante que las partes de la perspectiva de una recta original paralela al plano del quadro, y dividida en partes desiguales, serán tambien desiguales, bien que proporcionales á las partes homólogas de la recta original; y por consiguiente la perspectiva de una figura cuyo plano es paralelo al plano del quadro, es una figura semejante á la figura original.

646 2.° En un quadro, las lineas perspectivas paralelas entre sí están divididas en la misma razon que sus lineas originales, pero las lineas perspectivas que se encaminan á un punto de concurso, no están divididas en la misma razon que las lineas originales, porque en este último caso las rectas originales no son paralelas al plano del quadro.

Fig. 91. 647 *La perspectiva de una misma linea original es siempre de una misma longitud en el quadro, sea la que fuere su situacion respecto del orizonte y su distancia al ojo, con tal que siempre esté en un mismo plano paralelo al plano del quadro. Esto debe entenderse de quantas lineas originales iguales se quisieren, puestas todas en un mismo plano paralelo al del quadro, ó de un polýgono puesto donde se qüisiere en un mismo plano paralelo al plano del quadro.*

Esta proposicion es patentemente una consecuencia inmediata de lo que dejamos probado (639, 642 y 645); con todo nos detendremos en hacer mas patente su verdad. Concíbase que la linea original dada dando vueltas al rededor del uno de sus estremos fijo, traza con el otro estremo una circunferencia de círculo en un plano paralelo al del quadro; los rayos tirados desde el ojo á todos los puntos de esta circunferencia formarán una como pirámide cónica que el plano del quadro cortará paralelamente á su base. Luego (639) la perspectiva de dicha base en el quadro será tambien un círculo. Figurémonos ahora todos los diámetros posibles del círculo original prolongados indefinitamente ácia todas las direcciones, y que desde el centro se lleva á lo largo de estas prolongaciones la longitud del radio del círculo, estarán todas divididas en partes iguales, y se podrá considerar cada una de estas partes iguales como otras tantas situaciones posibles de la linea original en el mismo plano. Pero (644) las perspectivas de todas estas partes iguales han de ser tambien

bien rectas todas iguales; luego la perspectiva de una misma recta original puesta en quantos parages se quisiese de un mismo plano paralelo al del quadro, es una recta constante ó de una misma longitud. Fig. 91.

648 Sentado todo esto, pasaremos á resolver la siguiente cuestion, que es el fundamento de la Perspectiva: *Dado de posicion el plano del quadro, el lugar del ojo, y un punto detras del quadro, señalar en el quadro su punto de perspectiva.*

Para hacer mas perceptible la resolucion de esta cuestion, conviene hacerse cargo de que la posicion de un punto en un espacio absoluto solo se puede determinar por medio de sus distancias á tres planos dados de posicion, y diferentemente colocados unos respecto de otros. La determinacion de dicho punto se consigue con la mayor facilidad quando estos tres planos son perpendiculares entre sí, conforme se supone en la Perspectiva. Supónese por lo regular un plano indefinito *HR* que pasa por el ojo colocado en *O*; este plano está á nivel ó en situacion orizontal, por cuyo motivo se le llama el *Plano orizontal.* Su principal destino es proporcionarnos distinguir los objetos que están bajos de los que están altos, porque como todos los puntos que están en este plano están á nivel del ojo, no parecen ni altos ni bajos; los que están mas arriba de este plano parecen mas altos que el ojo, y los que están debajo del mismo plano, parecen mas bajos que el ojo. 92.

Supónese despues otro plano indefinito *VC*, que tambien

Fig. bien pasa por el ojo *O*, y está en situacion *vertical* ó á plo-
92. mo; llámasele el *Plano vertical*, y sirve para que distingamos los obgetos que se ven á la derecha de los que se ven á la izquierda, porque todos los que están en este plano, parece que están enfrente del ojo. Este plano es perpendicular al plano orizontal, pues el uno está á nivel y el otro á plomo.

Finalmente se supone un plano *TB*, y es el del quadro, colocado á alguna distancia del ojo, perpendicularmente al plano vertical, y al plano orizontal; por manera que los tres planos son perpendiculares entre sí.

La interseccion *br* del plano orizontal con el plano del quadro, se llama la *Linea orizontal* del quadro. La interseccion *ut* del plano vertical con el plano del quadro, se llama la *Linea vertical* del quadro. La interseccion *a* de la linea orizontal y de la linea vertical se llama el *Punto de vista* del quadro; la parte *Oa* del plano orizontal y vertical, que mide la distancia del ojo al plano del quadro, se llama el *Rayo principal.* Todo esto presupuesto,

649 *Resuélvese la cuestion por cálculo.* Sea *D* el punto dado, cuya perspectiva *d* hemos de señalar en el plano del quadro *TB*. Desde el punto propuesto *D* tírese al plano orizontal *HR* una perpendicular *DI*, y al plano vertical *VC* una perpendicular *DS*. Por el punto *I* tírese la *IA* perpendicular al plano vertical, y por *S* la *SA* perpendicular al plano orizontal. Es evidente que *DSAI* es un paralelogramo rectángulo, cuyo plano es perpendicular

al

al plano vertical *VC*, y al plano orizontal *HR*, y por consiguiente paralelo al plano del quadro *TB*. La linea *SA* ó *DI* mide la distancia del punto dado *D* al plano orizontal, ó su altura mas arriba del nivel del ojo; la *DS* ó *IA* mide su distancia al plano vertical, ó la cantidad que el obgeto está á la izquierda respecto del ojo; la recta *Aa* que es parte de la interseccion del plano vertical con el plano orizontal, y que por lo mismo es perpendicular al plano del quadro, mide la distancia del plano del paralelogramo *DSAI* al plano del quadro, y por consiguiente la distancia del punto dado *D* al plano del quadro *TB*. En virtud de todo esto, yá que segun suponemos la posicion del punto *D* es dada, las tres distancias *DI*, *DS*, *Aa* son tambien dadas de magnitud. Fig. 92.

Si desde el lugar *O* del ojo se tiran las rectas *OI*, *OD*, *OS*, resultará una pirámide quadrangular *ODSAI*, que el plano del quadro, paralelo á la base *DSAI*, cortará en *dsai*. Luego (638) el rectángulo *dsai* será la perspectiva del rectángulo *DSAI*, y por consiguiente el punto *d* será la perspectiva del punto dado *D*. Tambien es evidente que los rectángulos *dsai* y *DSAI* son semejantes por razon de su paralelismo que los constituye elementos semejantes de una misma pirámide; luego los lados del rectángulo *dsai* son proporcionales á los lados homólogos del rectángulo *DSAI*. Los triángulos semejantes *Oas*, *OAS* dán *OA* : *Oa* :: *AS* : *as*; luego *OA* es á *Oa*, como un lado qualquiera del rectángulo *DSAI* es al lado homólogo

Fig. 92. del rectángulo *dsai*. Luego podemos inferir estas dos proporciones *OA* ú *Oa* + *aA* : *Oa* :: *AI* ó *DS* : *ai* ó *ds*; y *OA* ú *Oa* + *aA* : *Oa* :: *AS* ó *DI* : *as* ó *di*; de donde se sacan las dos reglas ó analogías siguientes, que resuelven por cálculo la cuestion.

I. *Como el rayo principal mas la distancia del obgeto al plano del quadro*
es al rayo principal,
así la distancia del obgeto al plano vertical,
es á la distancia de su punto de perspectiva á la línea vertical del quadro.

II. *Como el rayo principal mas la distancia del obgeto al plano del quadro*
es al rayo principal,
así la distancia del obgeto al plano orizontal,
es á la distancia de su punto de perspectiva á la línea orizontal del quadro.

650 Supongamos, por egemplo, que esté el ojo á la distancia de 6 pies ó 72 pulgadas del plano del quadro, en el qual hemos de determinar el punto de perspectiva de un punto original distante 15 pies ó 180 pulgadas del plano del quadro, cuyo punto está 4 pies ó 48 pulgadas mas alto que el nivel del ojo, y 7 pies ó 84 pulgadas á la izquierda del plano vertical.

93. Sea *LTAB* el quadro dado que supongo rectangular; determinaremos en el quadro el punto *a*, enfrente del qual supondremos que ha de estar colocado el ojo, y que por lo

lo mismo será el *Punto de vista del quadro.* Por el punto *a* tiraremos una recta *tu* perpendicular á los dos bordes *TA*, *LB*, que será la linea vertical del quadro. Si el quadro no fuese un rectángulo, se debería tirar *tu* de suerte, que puesto el quadro en la situacion para la qual está destinado despues de concluido, sea *tu* vertical ó esté á plomo. Despues se tirará una recta *br* perpendicular á los lados *TL*, *AB*, esta será la linea orizontal del quadro. Si el quadro no fuese rectangular, se debería tirar la *br* perpendicular á la vertical *tu*. Hecho esto, haremos estas dos proporciones: Fig. 93.

$$72 + 180 : 72 :: 48 : x,$$
$$72 + 180 : 72 :: 84 : y.$$

Egecutando las dos reglas de tres, sale $x = 13, 71$ ó 13 pulgadas 8 lineas $\frac{1}{2}$, que determinan á qué distancia el punto prespectivo *d* está mas arriba de la linea orizontal *br* del quadro; é $y = 24$ pulgadas, que espresan la distancia á que el mismo punto *d* está á la izquierda de la linea vertical *tu*.

Hay diferentes métodos para colocar el punto *d* en el quadro, pero los mas exactos y acomodados son los siguientes.

651 I. Quando el quadro fuere rectangular, señálense en los dos lados del quadro dos puntos *E*, *e* á la distancia de 13 pulgadas 8 lineas $\frac{1}{2}$ de los puntos *b*, *r* de la linea orizontal, y tírese la recta oculta *Ee*, en la qual ha de estar el punto de perspectiva por la primera analogía.

Se-

Fig. 93. Señálense despues en los bordes del quadro, y á la izquierda de la linea vertical, dos puntos *K*, *b* distantes respectivamente 24 pulgadas de los puntos *t*, *u* de la linea vertical, y tírese la recta oculta *Kb*, en la qual ha de estar el punto de perspectiva por la segunda analogía. Está, pues, el punto en la interseccion *d* de las dos rectas *Ee*, *Kb*.

Para facilitar esta práctica que es la mas exacta quando se trata de quadros grandes, se podrán dividir los lados y los bordes del quadro en pulgadas, y tambien en lineas si se quisiere, empezando desde los puntos *t*, *u*; *r*, *b*, y yendo desde *t* ácia *L*, desde *t* ácia *B*; desde *u* ácia *T*, y despues ácia *A*; desde *b* ácia *T*, desde *b* ácia *L*; y finalmente desde *r* ácia *A*, y despues ácia *B*. Estas divisiones servirán igualmente para tirar en el quadro perpendiculares y paralelas al orizonte, cuya operacion ocurre muy amenudo quando se ofrece poner muchos objetos en perspectiva.

652 II. Si el quadro no fuese rectangular, se señalará en la linea vertical *tu* un punto *S* 13 pulgadas 8 lineas $\frac{1}{2}$ mas arriba del punto de vista *a*, por cuyo punto se tirará una perpendicular *Ee* á la linea vertical. Señálese despues en la linea orizontal un punto *i* á la izquierda del punto *a* y á la distancia de 24 pulgadas, por cuyo punto se tirará una perpendicular *Kb*; el punto *d* donde estas dos perpendiculares se cortan será el punto que se busca. En los quadros pequeños se hace sumamente facil la práctica de este método por medio de dos escuadras que es-

escusan el trabajo de tirar perpendiculares. Fig.

653 III. Tambien se puede determinar el punto *d* con dos compases sin tirar linea alguna. Abranse los dos compases, el uno lo que coge cabalmente la distancia á que el punto de perspectiva ha de estar de la linea vertical, el otro la cantidad que dicho punto ha de estar distante de la linea orizontal. Plántese la una punta del primer compas en el punto de vista *a*, y con la otra punta señálese en la linea orizontal un punto *i*; plántese la una punta del otro compas en *a*, y con la otra señálese en la linea vertical un punto *s*; cogiendo, pues, uno de los dos compases con cada mano, plántese la una punta del primero en *s*, y la una punta del otro en *i*, hágase que las otras dos puntas de los compases concurran en un mismo punto del quadro, este será evidentemente el punto *d* que se busca. 93.

654 *Resuélvese la cuestion sin cálculo.* Sea *TB* el plano del quadro; *ut*, la linea vertical; *rb*, su linea orizontal; *a*, el punto de vista; *D*, un punto dado, que en la primera figura está mas alto, y en la otra mas bajo que el punto de vista *a*. Imaginemos que por el punto *D* pasa un plano orizontal *KF*, paralelo por consiguiente á la linea orizontal *rb*; sea *XZ* la interseccion de este plano con el plano vertical que nos hemos de figurar que pasa por la recta *ut* y por *XZ*; sea *BY* la interseccion del plano *KF* con el plano del quadro. Si desde el punto *D* se baja á *BY* la perpendicular *DE*, el punto *E* se llamará el *Punto de incidencia*, y la perpendicular *DE* medirá la distancia del obge- 94. 95.

Fig. geto al plano del quadro. Tírese desde el punto de vista a
94. al punto de incidencia E la recta aE; trasládese la distan-
95. cia DE del objeto al plano del quadro, sobre BY desde el punto E hasta G (tomando el punto G como se quisiere ácia B ó ácia Y); y llévese desde el punto de vista a, sobre la linea orizontal br, el rayo principal aO, por manera que el punto O esté en una situacion opuesta á la del punto G; quiero decir, que el punto O se ha de señalar á la derecha del punto de vista a, si el punto G se hubiere señalado á la izquierda del punto de incidencia E, y recíprocamente. Tírese GO, y en el punto d de su interseccion con aE estará la perspectiva del punto dado D.

Para probarlo, tírese por el punto d la linea LN paralela á la linea vertical ut, y por consiguiente perpendicular á la linea orizontal br y á BY. Los triángulos dGE, daO son semejantes, las rectas dN, dL son sus alturas, y son por lo mismo una de sus dimensiones homólogas. Luego $Oa : GE :: dL : dN$, y (I. 188) $Oa + GE : Oa :: dL + dN$, ó $at : dL$. Esta es la segunda analogía que sacamos antes (649), pues at mide la distancia entre el ojo y el nivel del objeto, y por lo mismo la distancia del ojo al plano orizontal. Finalmente, por razon de las paralelas dL, ut que la linea aE corta, los triángulos adL ó asd y atE son semejantes, luego $at : as$ ó $dL ::$ tE ó $DS : ds$. Pero acabamos de ver $Oa + GE : Oa :: at : dL$; luego $Oa + GE : Oa :: DS : ds$; esta es la primera analogía de la primera resolucion (649),

Se

655 Se viene á los ojos que la construccion de esta Fig.
cuestion siempre será la misma, sea que se suponga el plano del quadro levantado perpendicularmente sobre el plano *KF*, sea que le supongamos echado sobre el mismo plano, con tal que la linea *BY* represente la linea donde el quadro corta el plano *KF*, y que la linea vertical *tu* del quadro se mantenga sobre la linea *ZX* del mismo plano *KF*; y así lo entenderemos en los dos primeros de los métodos siguientes. 94. 95.

Práctica de la Perspectiva.

Primer método que se llama del Trapecio perspectivo.

656 Se formará un quadrado *ABDE* que represente el campo original del quadro, esto es, todo el espacio que han de llenar los obgetos que se quieren dibujar, á cuyo campo se le llama el *Plano Geométrico*. Se dividirá este quadrado en otros muchos tan chicos como sea posible, se supondrá que el borde inferior del quadro *VB* está puesto junto al lado *BA* del quadrado *AD*, y se tirará en el plano de este quadro la linea orizontal *QO* á la altura que se tuviere por conveniente, y la linea vertical *VI*, conforme se supusiere el espectador en frente del medio ó ácia uno de los lados del quadro; por manera que *S* será el punto de vista, y *SI* medirá la distancia á que el ojo estuviere del suelo. Por el punto *S* se tirarán á todas las divisiones del lado *BA* las rectas *SB*, *SG*, 96.

Fig. 96. *SG*, *SI*, *SC*, *SM*, *SA*; se determinará el rayo principal por la distancia á que se supusiere que el ojo ha de estar del quadro, y se llevará al uno y otro lado del punto *S* sobre la linea orizontal, prolongada si fuere menester, pongo por caso hasta *O* y *Q*. Por estos puntos se tirarán á las divisiones del quadro *AB*, las rectas *OB*, *OG*, *OI*, *OC*, *OM*, y las *QA*, *QM*, *QC*, *QI*, *QG*, *QB*, y sus intersecciones *e*, *k*, *l*, *n*, *r*, *d*, *t*, *p*, *f*, *b* con las rectas *SA*, *SB* determinarán los puntos por donde se deberán tirar las rectas *de*, *tk*, *pl*, *fn*, *br*, que formarán con las rectas *gG*, *iI*, *cC*, *mM* un conjunto de trapecios dentro del trapecio *BdeA*, cuyo conjunto será la perspectiva del quadrado *BDEA*, y de todos sus quadraditos.

Que *BdeA* sea la perspectiva del quadrado *BDEA*, es cosa muy evidente; porque el punto *A* es el punto de incidencia (654) del punto *E*, y la linea *AB* es igual á la distancia del punto *E* al plano del quadro; luego la interseccion *e* de las rectas *SA*, *OB* es (654) la perspectiva del punto *E*. El punto de incidencia del punto *K* está tambien en *A*, y $AG = AK$; luego su punto de perspectiva está en *k*, en la interseccion de las rectas *SA*, *OG*. Lo propio demostraríamos, si fuese menester, respecto de todos los demas puntos del quadrado *ABDE*.

657 La misma construccion manifiesta que la perspectiva *dBAe* se podría trazar sin acudir al punto de vista *S*, y solo con valerse de los puntos *O* y *Q*; porque las

rec-

rectas que sirven para formar dicha perspectiva son diagonales de los trapecios que resultan de las intersecciones de las rectas tiradas desde *O* y *Q* á las divisiones del lado *AB* del plano geométrico. Pero la egecucion de la perspectiva qual la hemos propuesto, es mas exacta, porque las rectas *Gg*, *Ii*, *Cc* se han de dirigir (643) al punto de vista *S*, por cuyo medio se tiran con mas puntualidad, que por medio de los ángulos de los trapecios. Fig. 96.

Las rectas *dB*, *gG*, *iI*, *cC* &c. cuyas divisiones desiguales representan las divisiones iguales de las rectas *BD*, *GR*, *IX*, *CY* &c. se llaman *escalas de degradacion de las longitudes*, porque su oficio es *degradar* el tamaño de los obgetos á medida que las partes de estos se van apartando del plano del quadro. Las paralelas *br*, *fn*, *pl* &c. se llaman *escalas de degradacion de las latitudes y alturas*, porque sirven para *degradar* las latitudes y alturas de los obgetos á medida que se van apartando del plano del quadro.

658 Una vez que el trapecio perspectivo representa en el quadro el campo que coge el quadrado *BDEA*, es manifiesto que si se dibuja en este quadrado la planta de los obgetos cuya perspectiva se ha de trazar en el quadro, de modo que las divisiones del quadrado sirvan de escalas para esta planta, será muy facil de poner en perspectiva la misma planta. Si nos propusiéramos, por egemplo, poner en perspectiva un quadrado puesto en el suelo oblicuamente respecto del quadro, y cuyos lados cogie-

sen

Fig. 97. sen cada uno tres pies; dibujaríamos en el quadrado *BAED*, despues de dar un pie á cada una de sus divisiones, el plano *IMNO* de dicho quadrado en la situacion oblicua propuesta, dando á cada lado tres lados de quadraditos, señalaríamos despues en el trapecio perspectivo, los puntos *i*, *m*, *n*, *o* correspondientes á los puntos *I*, *M*, *N*, *O*, dibujándolos en los pequeños trapecios de la quadrícula correspondientes á los quadraditos del plano geométrico, de modo que ocupasen en la quadrícula lugares homólogos á los que los puntos *I*, *M*, *N*, *O* ocupan en sus quadrados. Tirando finalmente las lineas *mi*, *io*, *on*, *nm* quedaría trazado el trapecio *ionm*, que sería la perspectiva del quadrado *IONM*.

659 Si el quadrado *IONM* fuese el plano de la base de un cubo cuya perspectiva quisiésemos trazar; desde los puntos *i*, *m*, *n*, *o* levantaríamos las perpendiculares al orizonte *iF*, *mP*, *nQ*, *oH*, y como la altura del cubo debería coger tres lados de quadraditos, haríamos cada una de dichas perpendiculares igual al ancho de tres trapecios, tomándolos con el compas en el parage de la quadrícula donde estuviese el pie de cada una, esto es, aplicando las puntas del compas paralelamente á *AB* ó á la misma distancia de *AB* que estuviese el pie de cada perpendicular. Finalmente tiraríamos *QP*, *PF*, *FH*, *HQ*, y estaría trazada la perspectiva del cubo. Porque las rectas que terminan las caras verticales del cubo, están colocadas verticalmente sobre el plano de la base, luego (642) las

las perspectivas de estas rectas han de ser rectas vertica- Fig.
les ó paralelas á *VK*; y como estas rectas tienen origi- 97.
nalmente su altura igual á tres lados de quadrados, su altura en perspectiva será igual (647) á tres anchos de trapecios, tomados en el mismo plano (paralelo al del quadro) en el qual se halla cada una de dichas alturas.

660 Acerca de todo esto hemos de hacer algunas advertencias.

I. En estas operaciones se considera el quadrado ó plano geométrico colocado detras del quadro respecto del ojo, y por lo mismo se han de dibujar en dicho quadrado ácia *AB* ó del lado del trapecio, los obgetos que se quisieren dibujar en la parte anterior del quadro, y ácia *DE* las que hubieren de parecer distantes.

661 II. Quando en una de las caras planas de un obgeto que se dibuja en perspectiva, y tambien en dos ó muchas caras paralelas qualesquiera, hay muchas rectas paralelas entre sí, quales son las molduras de los ornatos de arquitectura, es preciso, para abreviar y obrar con mas exactitud, determinar su punto de concurso, que en este caso se llama su *Punto accidental.* Pero quando dichas paralelas son al mismo tiempo lineas á nivel, conforme sucede las mas de las veces, su punto accidental está en la linea orizontal; por manera que despues de trazada la perspectiva de sola una de dichas paralelas, bastará prolongarla hasta la linea orizontal, y el punto donde la encontrare será el punto accidental de todas las pa-

Fig. ralelas. Porque una vez que, segun suponemos, todas las
97. espresadas lineas están á nivel, el rayo tirado desde el ojo á todas ellas está á nivel, y colocado por consiguiente sobre el plano orizontal; luego no puede encontrar el quadro sino en la linea orizontal.

Así, despues de determinada la posicion perspectiva *nm* de la recta original *NM*, se la prolongará hasta *R*, donde está el punto accidental de la perspectiva de la recta original *OI*, y de las perspectivas de los dos lados de la base superior del cubo que son paralelas á *NM* ó á *OI*. Lo propio digo del punto *L*, donde han de ir á parar las perspectivas de las paralelas *ON*, *IM* y de sus correspondientes en la base superior del cubo.

Pero si las rectas originales no fuesen rectas á nivel, se buscarían las perspectivas de dos de ellas, y prolongándolas por la parte ácia la qual se inclinaren, hasta que concurriesen una con otra, su punto de concurso sería el punto accidental de todas las demas.

96. 662 III. Si se quisiere llenar el hueco que queda á cada lado del trapecio perspectivo, se podrán prolongar de cada lado las rectas *de*, *tk*, *pl* &c. hasta el borde del quadro, y prosiguiendo tambien en ambos lados las divisiones de la linea *de*, desde el punto de vista *S* se tirarán por todas estas divisiones rectas que lleguen hasta los bordes del quadro, cuyas rectas formarán con las prolongaciones de *kt*, *lp* &c. otros trapecios que serán las perspectivas de otros quadraditos, y se trazarán, si se quisiere, al

al lado de los del quadrado grande *BAED*, con esto se ensanchará el campo del plano geométrico. Fig.

663 IV. Quando se hubiesen de dibujar en un quadro chico obgetos cuyas caras se ven con diferentes oblicuidades, será del caso acudir al trapecio perspectivo. Pero esto sería imposible de prácticar en los quadros grandes, particularmente si hubiesen de representar un número crecido de obgetos, distantes unos de otros, porque segun se echa de ver no sería posible construir un quadro ó plano geométrico bastante capaz. Sin embargo si se pudiese formar uno donde cupiesen todos los obgetos propuestos solo con disminuir todas sus dimensiones la mitad, un tercio &c; se podrían poner en perspectiva en un trapecio, y copiarlos despues en un quadro, duplicando, triplicando &c. todas las líneas trazadas en el trapecio, y resultaría una perspectiva tanto mas perfecta, quanto menos fuese preciso aumentar las dimensiones señaladas en el trapecio.

664 V. Tambien se podrá egecutar la operacion sin valerse de los quadraditos del plano geométrico, con tal que primero se haga un borrador puntual de todas las dimensiones, posiciones y distançias de todos los obgetos que hubieren de caber en el quadro. Porque dividiendo el borde inferior del quadro en quantas partes iguales se quisiere, de modo que cada una de ellas sea de una pulgada, de un pie, de una vara, ó en general de una de las medidas por las quales todo el tanteo se hubiere sacado, cuya medida llamaremos *un Módulo*, se formará un trapecio con

Fig. estas divisiones, y se considerará cada trapecio como una pulgada en quadro, ó un pie en quadro, ó una vara en quadro, ó en general como un módulo en quadro; se podrán, pues, dibujar en este trapecio todos los obgetos por el tanteo que se hubiere hecho.

II. *Método sin Trapecio.*

98. 665 Se supone así en este método, que algunos llaman del *triángulo de Elevacion*, como en el antecedente que el plano *EFGHI* de la base de cada obgeto original, que suponemos sea un prisma pentagonal, esté dibujado con todas sus proporciones á la misma distancia del borde del quadro que se quiere parezca distante.

En el plano del quadro tiro la línea vertical *VK*; prolóngola hasta mas allá del plano del obgeto original. Tiro la linea orizontal *SP*, en la qual tomo *SO* igual al rayo principal, al uno y otro lado del punto *S*. Desde un ángulo *B* del quadro señalo en su borde inferior una linea *BC* igual á la altura que ha de tener el obgeto original, y desde el estremo *P* de la linea orizontal tiro la *PC*. Busco despues en el quadro la perspectiva del vértice de cada ángulo del plano original, siguiendo la construccion declarada arriba (654). Por egemplo, para determinar la del punto *E*, tomo con un compas la distancia desde dicho punto á la linea vertical *VK*, llevo esta distancia desde *K* á *D*, y el punto *D* es el punto de incidencia del punto *E*. Tomo la distancia del punto *E* al borde in-

inferior *AB* del quadro, llévola desde *D* á *N* al otro lado del punto *O* respecto de *D*. Finalmente tiro las *SD*, *ON* cuya interseccion *e* señala la perspectiva del punto *E*. Fig. 98.

Del mismo modo se traza la perspectiva de todos los demas ángulos de la base del obgeto, en los quales se levantarán las perpendiculares *eT*, *fL*, *gM* &c. iguales respectivamente á las lineas $e'\,t'$, $f'\,l'$, $g'\,m'$ &c. comprendidas entre *PC* y *PB*, tirando desde los puntos *e*, *f*, *g* &c. paralelas al borde inferior *AB* del quadro. Lo demas se concluye y demuestra como en el método antecedente.

666 A este segundo método se le aplican igualmente todas las prevenciones que hicimos acerca del método antecedente. Se puede sacar tambien un tanteo puntual de las dimensiones, posiciones y distancias de cada punto de los obgetos originales, y formar despues por este tanteo una tabla de la distancia de cada uno de los puntos de la base de dichos obgetos á la linea vertical y al borde inferior del quadro, para señalar como antes los puntos *D* y *N*; se formará otra tabla de las alturas de cada parte del obgeto respecto del plano de su base, para determinarlas conforme acabamos de decir. La perspectiva saldrá tanto mas perfecta, quanto mas puntualmente se hubieren dibujado el plano y la elevacion, aunque á cada pie de las dimensiones del original no correspondiesen mas que dos ó tres lineas de longitud en el pitipie.

Fig.

III. Método que es el del Bastidor perspectivo.

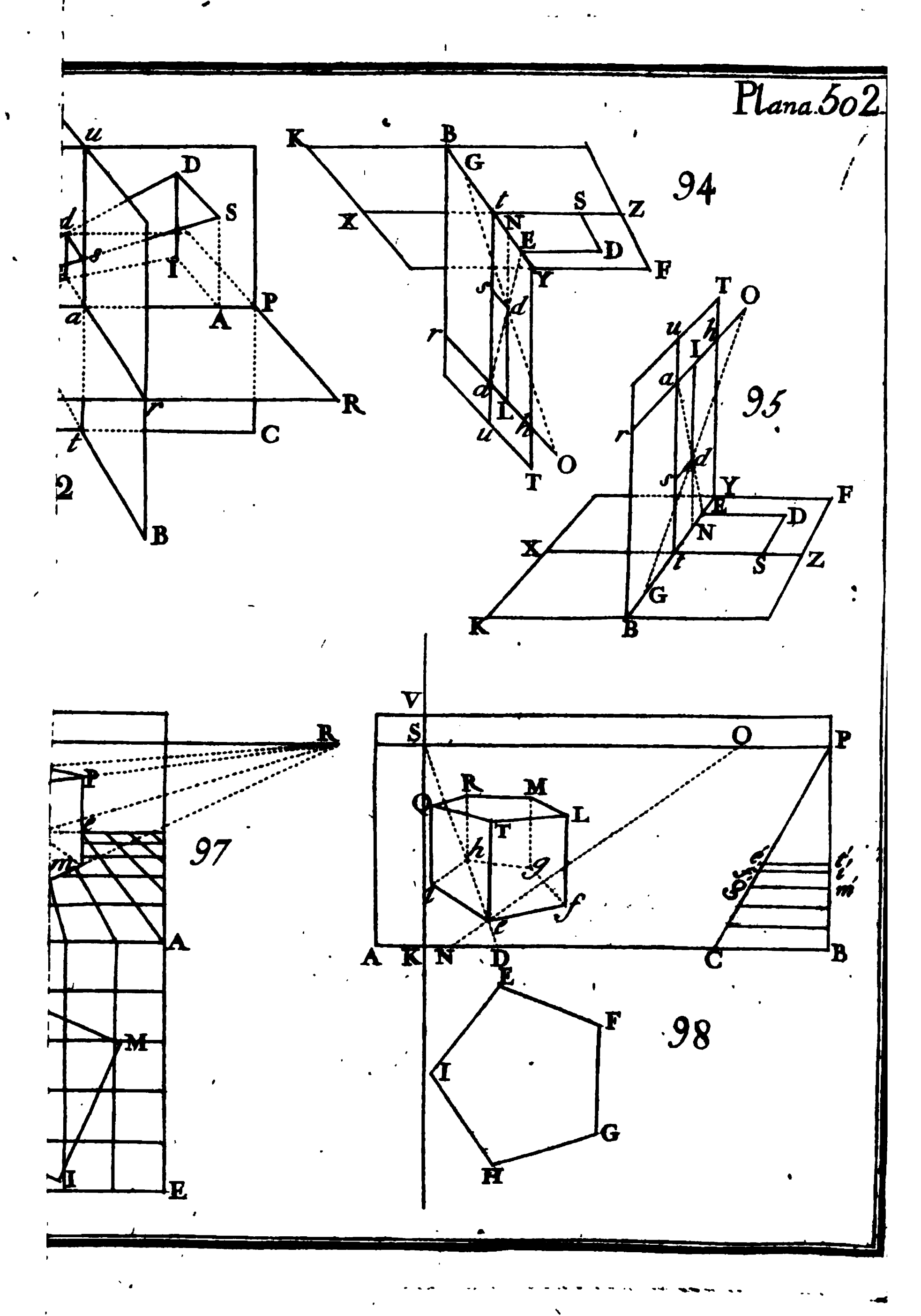
Por incluirse en este método los dos antecedentes, y llevarles algunas ventajas, es acreedor á que se le dé la preferencia. Una de sus principales circunstancias consiste en que para practicarle sirven los ángulos igualmente que los lados de las figuras cuya perspectiva se quiere trazar. Por estos motivos nos detendremos en declararle con alguna mas individualidad que los dos que dejamos declarados.

Preparacion del Bastidor perspectivo.

99. 667 Se señalará en el quadro el punto *S* para que sea el punto de vista, por el qual se tirará la linea orizontal *HSQ*, prolongándola al uno y otro lado mas allá del plano del quadro, quanto se pueda. Tírese la linea vertical *VT*, en la qual se señalará desde el punto de vista *S* un punto *C*, ácia *V* ó ácia *T*, tal que *SC* sea igual al rayo principal. Desde el punto *C* como centro, con una abertura de compas arbitraria (quanto mayor fuere, mejor será) trácese un arco *AB* de unos 60 ó 70 grados, divídase en grados, ó por lo menos de diez en diez grados, empezando desde el punto *A*. Por *C* y por todos los puntos de division tírense radios hasta la linea orizontal que quedará dividida por un lado, llévense las mismas divisiones al otro lado del punto *S*, á fin de que esté dividida en toda su longitud.

Para abreviar, se podrá aplicar sobre *CA* un semicírculo graduado, y con un hilo muy sutil asegurado en su cen-

Plana 502



centro, se podrán señalar sobre la marcha las divisiones de la linea orizontal. Fig. 99.

668 Y como es patente por la construccion propuesta, que dichas divisiones contándolas desde el punto *S* son las tangentes de los ángulos formados en el punto *C*, cuyo radio ó seno total es *CS* (I. 667), es evidente que se determinarán mas facilmente dichas divisiones, con hacer una escala particular *RD* dividida en quantas partes iguales se quisiere, con tal que 10 de estas partes sean cabalmente iguales al rayo principal, y que una de ellas esté subdividida en otras diez partes, y estas se podrán dividir á ojo en otras diez partes, lo que vendrá á ser lo propio que una escala dividida en partes milésimas del rayo principal. Por medio de esta escala y de la tabla de las tangentes, será facil señalar en la linea orizontal todas las divisiones necesarias.

669 En el borde inferior *EF* del quadro, señálense, empezando desde el uno de los lados *FG*, y prosiguiendo ácia el otro *EK*, quantas partes iguales se quisieren, cuyo destino será espresar las medidas ó *módulos* de las dimensiones de los obgetos originales. Desde el estremo *P* de la linea orizontal que está en el lado *FG*, señálese fuera del quadro un punto *Q*, tal que *PQ* sea igual al rayo principal; por este punto *Q* y por todas las divisiones del borde *EF* tírense rectas ocultas, ó bastará con aplicar succesivamente una regla, y su interseccion con el lado *FG* señalará otras tantas divisiones que se acotarán 1, 2, 3 &c.

Fig. Llévense finalmente estas divisiones al otro lado *EK*.

99. 670 Finalmente, señálense en el borde inferior *EF* del quadro, empezando desde el punto *T*, al uno y otro lado divisiones iguales á las que hubieren servido para determinar las divisiones del lado *FG*; acótense 1, 2, 3, 4 &c; y para facilitar todavía mas la práctica, señálense en el borde superior *GK*, empezando desde el punto *V*, las mismas divisiones, con los mismos números que las del borde inferior, y estará enteramente preparado el bastidor.

En este bastidor, las divisiones de la linea orizontal sirven para trazar las perspectivas de las lineas á nivel colocadas oblicuamente respecto del plano vertical. Las divisiones de las esquinas son *escalas de degradacion* de las longitudes ó de las distancias de los obgetos al plano del quadro; y las divisiones de los bordes superior é inferior son *escalas de frente*, esto es, escalas de las partes de los obgetos que son paralelas al plano del quadro.

671 Para hacerse cargo de los principios en que estriba esta construccion del bastidor, conviene figurarse 1.° que el centro *C* esté levantado sobre el punto de vista *S*, de suerte que el plano del triángulo rectángulo *SCH* sea perpendicular al plano del quadro. Es evidente que con esto el punto *C* es el lugar donde ha de estar el ojo del espectador, y que los grados del arco *AB* cuyo centro está en el ojo, son á propósito para medir los ángulos de oblicuidad de las lineas originales colocadas en el plano orizontal, respecto del plano vertical; se pueden, pues, se-

señalar en la linea orizontal los puntos donde van á parar los radios tirados desde el ojo á cada uno de dichos grados. 2.° Si suponemos igualmente que *PQ* esté levantada perpendicularmente sobre el plano del quadro, de modo que el ángulo *SPQ* sea recto; que al mismo tiempo la recta *FE* esté levantada perpendicularmente al mismo plano del quadro, pero al otro lado del ojo, y que por lo mismo el plano de todas las rectas tiradas desde *Q* á las divisiones de *FE* sea perpendicular al plano del quadro, siendo *FG* la interseccion comun de dichos dos planos; es evidente que las divisiones de *FE* señalarán distancias al plano del quadro medidas en el suelo. Por egemplo, *FN* señala un módulo de distancia mas allá del quadro, y probaremos que $F1$ es su perspectiva. Porque los triángulos rectángulos semejantes $QP1$, $FN1$, dan $PQ : FN :: P1 : F1$. Luego $PQ + FN : PQ :: P1 + F1$ ó $PF : P1$; y por ser esta analogía la segunda de la resolucion general (649), síguese que el punto 1 es la perspectiva del punto *N*. Lo propio demostraremos acerca de las demas divisiones. Fig. 99.

672 De donde se deduce que si no fuese posible prolongar el plano del quadro para señalar bastantes divisiones en los lados, se podrán señalar estas divisiones por un cálculo facil, y este es el rumbo que se debe seguir quando hay que trazar algun quadro grande.

Sea, por egemplo, el rayo principal *SC* de 10 pies, ó en general de 10 módulos; la altura del ojo mas arri-

ba

Fig. 99. ba del plano del suelo, de 6 módulos; para determinar todas las distancias $P1$, $P2$, $P3$ &c. en el supuesto de que cada una de estas divisiones haya de coger uno de estos módulos, tendremos las proporciones siguientes.

	10 + 1		5,45 = $P1$
	10 + 2		5,00 = $P2$
	10 + 3		4,61 = $P3$
	10 + 4		4,29 = $P4$
	10 + 5		4,00 = $P5$
Como	10 + 6	son á 10: así 6 son á	3,75 = $P6$
	10 + 7		3,53 = $P7$
	10 + 8		3,33 = $P8$
	10 + 9		3,16 = $P9$
	10 + 10		3,00 = $P10$
	10 + 11		2,86 = $P11$

De suerte que por medio de una escala dividida en partes decimales, de las quales la distancia de la linea orizontal al borde inferior del quadro coja 6,00 si el caso fuere el que proponemos, se podrán señalar con suma puntualidad en los lados del quadro todas las divisiones que se necesitaren.

673 Daremos otro método para dividir los lados, cuyo método por ser mas breve y facil merecería la preferencia respecto de los dos antecedentes, si no fuera porque pide mucho mas cuidado para precaver equivocaciones; es excelente para quando las divisiones de los lados han de espresar módulos grandes, como quando hay pocas

cas partes pequeñas que poner en perspectiva, y solo hay algunos puntos principales para guiar la mano del dibujante en la formacion de un borrador, ó de algun diseño hecho á prisa por el natural. Fig.

Señálese uno de los módulos en el borde inferior del quadro desde *F* á *N*. Llévese el rayo principal desde *P* á *Q* del mismo lado que *N*; tírense las *PN*, y *QF*. Por el punto de su interseccion *a* bágese á *PF* la perpendicular *a* 1; tírese *Q* 1, y desde su interseccion *b* con *PN* tírese á *PF* la perpendicular *b* 2. Tírese *Q* 2, y desde su interseccion *c* con *PN* bágese á *PF* la perpendicular *c* 3, y prosígase á este tenor por quantas divisiones se necesitaren. 100.

Por causa de las paralelas *QP*, *NF*, los triángulos *QPa*, *NFa* son semejantes; luego *PQ* : *FN* :: *Pa* : *aN*; luego *PQ* + *FN* : *PQ* :: *Pa* + *aN* ó *PN* : *Pa*. Pero los triángulos rectángulos *PNF*, *Pa*1 son tambien semejantes; luego *PN* : *Pa* :: *PF* : *P*1; luego finalmente *PQ* + *NF*: *PQ* :: *PF* : *P*1, esta es la analogía necesaria para señalar estas divisiones.

Consideraciones acerca de la linea orizontal del quadro.

674 Si suponemos que el ojo de un espectador esté colocado respecto del quadro, como lo ha de estar para considerar la perspectiva despues de concluida, y que mire al traves de dicho quadro (suponémosle transparente como un cristal) todo lo que el quadro le deja ver en un terreno indefinito, despejado, igual y á nivel como una vas-

Fig. vasta llanura; es evidente que verá el suelo terminado por una linea á nivel que se confunde con la circunferencia de un círculo que separa al parecer el cielo de la tierra, y cuyo centro es el ojo. La porcion visible de este círculo, que se llama el *Orizonte celeste*, ha de ser una linea recta; porque ya que el centro de este círculo ú orizonte está en el ojo, los radios que podemos imaginar tirados desde el ojo á todos los puntos de su circunferencia visible, forman un plano; será, pues, su interseccion con el plano del quadro la interseccion de los dos planos, que no puede menos (I.536) de ser una linea recta. Es evidente que la linea orizontal del quadro es la perspectiva de dicha porcion visible del orizonte celeste, y que las divisiones de la linea orizontal, son la perspectiva de los grados de dicho círculo.

675 Por ocupar el ojo el centro del orizonte celeste, se sigue que si dos rectas originales puestas sobre un plano á nivel que pasa por el ojo del espectador, están inclinadas una respecto de otra, de modo que el ángulo de su inclinacion esté en el ojo mismo, los grados del orizonte celeste, y por consiguiente las divisiones de la linea orizontal del quadro medirán dicho ángulo, y espresarán la inclinacion de las dos rectas.

Una vez que todos los planos paralelos entre sí parece que se juntan (VI.399) á una distancia infinita del ojo, el plano del suelo, y en general todo plano á nivel, parece que se inclina al plano orizontal que pasa por el ojo, para confundirse con él en la circunferencia del orizon-

zonte celeste; se infiere que *la linea orizontal del quadro es la linea donde se encuentran todas las perspectivas de todos los planos á nivel.* Fig.

Todos los planos á nivel en los quales están colocadas las partes que se pueden dibujar de los obgetos, están á una distancia finita unos de otros, siendo así que la circunferencia del orizonte celeste está á una distancia infinita del ojo. Luego el intervalo que hay entre estos planos es infinitamente pequeño respecto de la distancia á que está el ojo del punto donde parece que concurren; luego todos los planos á nivel que pasan á una distancia finita mas arriba ó mas abajo del ojo, son respecto de la circunferencia del orizonte celeste, y por lo mismo respecto de la linea orizontal del quadro, como un solo y mismo plano echado sobre el plano del orizonte celeste, ó confundido con el plano orizontal que pasa por el ojo. La perpendicular ó vertical tirada desde el ojo á todos estos planos á nivel, que mide el intervalo real que hay de unos á otros, es como un punto que se confunde con el centro del espresado orizonte.

Luego un ángulo qualquiera formado por dos rectas puestas en un plano á nivel, y colocado en la vertical que pasa por el ojo, es respecto de la circunferencia del orizonte celeste, ó de la linea orizontal del quadro, como si estuviera dentro del mismo ojo, y por consiguiente las divisiones de la linea orizontal pueden tambien servir para medirle, y determinar su perspectiva.

Fi-

Fig. Finalmente, los diferentes obgetos que el ojo puede alcanzar, y se han de dibujar en un quadro, están á una distancia finita unos de otros y respecto del ojo, siendo así que la circunferencia del orizonte celeste está á una distancia infinita; luego todos los puntos de que se componen las partes de dichos obgetos se deben considerar como infinitamente inmediatos respecto unos de otros, y respecto del ojo, y por consiguiente todos los ángulos que forman unas con otras, en planos á nivel, las rectas que terminan las caras y los lados de los obgetos, se han de considerar como en el centro del orizonte celeste, y se podrán medir con las divisiones de la linea orizontal.

676 De donde se sigue 1.° *Que las divisiones de la linea orizontal del quadro, pueden servir para medir y poner en perspectiva todos los ángulos que están en un plano á nivel qualquiera.*

677 2.° *Que para poner en perspectiva qualquier ángulo original, se debe determinar en el quadro* (dentro de poco diremos como se egecuta) *el punto de perspectiva del vértice, y tirar desde este punto dos rectas que vayan á parar á las divisiones que puedan señalar los grados del ángulo propuesto, ó que rematen en las mismas divisiones de la linea orizontal donde rèmatarian dos radios tirados desde el ojo paralelamente á cada lado de dicho ángulo.*

101. 678 3.° *Que si desde tantos puntos* C, D, E *como se quisieren del campo del quadro, se tiran dos rectas á las mismas divisiones* A, B *de la linea orizontal, los ángulos* ACB,

ACB, ADB, AEB *serán las perspectivas de ángulos originales iguales entre sí, y cuya medida es igual al número de grados que cogen las divisiones que hay entre* A *y* B; en nuestra figura son 30°. Con efecto, ya que *BC*, *BD*, *BE* ván á parar á un mismo punto accidental *B*, son las perspectivas (661) de tres paralelas; por lo mismo las rectas *AC*, *AD*, *AE* son las perspectivas de tres paralelas. Pero si tres paralelas encuentran otras tres paralelas han de estar igualmente inclinadas respecto de ellas, y formar por consiguiente con ellas ángulos iguales. Fig. 101.

679 Ultimamente 4.° que una recta como *DA* ó *EA* tirada en el quadro desde uno de sus puntos qualquiera *D* ó *E*, y terminada por un punto *A* de la linea orizontal, es la perspectiva de una linea original colocada en un plano á nivel é inclinada al plano vertical ácia la parte donde está el punto *A*, un número de grados igual al número que señala en qué grado está el punto *A*. Por egemplo *DA* ó *EA* son las perspectivas de dos rectas á nivel, que declinan 10° del plano vertical ácia la derecha.

Resolucion de varias cuestiones de Perspectiva práctica por el Bastidor.

680 Cuestion I. *Desde un punto dado* C *en un quadro tirar una recta perspectivamente paralela á una recta dada en perspectiva, como* DF. Suponemos estas rectas en planos á nivel.

Prolónguese *DF* hasta que encuentre la linea orizontal

Fig. tal en algun punto *B*, y tírese la *CB* (661).

101. 681 Cuestion II. *Formar en el estremo* D *de una recta dada en perspectiva* DF, *y puesta originalmente en un plano á nivel, un ángulo en el mismo plano de quantos grados se quisiere.*

Prolónguese *DF* hasta encontrar la linea orizontal en un punto qualquiera *B*; desde este punto cuéntese en las divisiones el número de grados propuesto del lado donde ha de estar el ángulo, como desde *B* á *A*, y tírese *DA*.

682 Si el ángulo propuesto fuere, por egemplo, de 60 ú 80°, se practicaría lo mismo, tomándo el punto *A* á 60 ú 80° del punto *B*; quiero decir, 20 ó 40° mas allá del punto de vista *S*.

683 Si el ángulo propuesto se hubiera de formar ácia la derecha del punto *B*, y las divisiones de la linea orizontal que hay mas allá de *B* no bastasen, se tomaría desde *B* ácia la izquierda un número de grados igual al suplemento del ángulo propuesto, como desde *B* ácia *A*; y por los puntos *A* y *D* se tiraría la *DR*, que formaría el ángulo perspectivo *BDR* del lado y número de grados que se pide.

102. 684 Cuestion III. *En el punto dado* D *de una recta* CE *puesta en perspectiva, levantar perspectivamente una perpendicular.*

Esta cuestion viene á ser la misma que la última. Se prolongará *CE* hasta la linea orizontal en *B*, se tomará un punto *A* que diste 90° del punto *B*, y se tirará la *AD*.

Cues-

685 Cuestion IV. *Desde un punto dado en un quadro, tirar perspectivamente una perpendicular á una recta dada.* Fig. 102.

Sea *CE* la recta dada, y *F* el punto dado. Se prolongará *CE* hasta el punto *B* de la linea orizontal, se tomará un punto *A* distante 90° del punto *B*; por *A* y por el punto *F* se tirará la recta *AD*; esta será la perpendicular que se pide.

686 Cuestion V. *Dada la distancia de un punto original colocado en el suelo al plano del quadro, y su distancia al plano vertical determinar su punto de perspectiva.*

Tírese una linea oculta por las divisiones del lado que señala la distancia al plano del quadro, y otra desde el punto de vista al punto de la division de la base ó borde inferior del quadro que señala la distancia del punto original al plano vertical; la interseccion de estas dos ocultas determinará el punto de perspectiva que se pide. Por egemplo, si la distancia al plano del quadro fuese de 4 módulos, y la distancia al plano vertical de 3 módulos á la izquierda, el punto de perspectiva estaría en *G*.

687 Si el punto dado en vez de estar en el suelo estuviera mas alto ó mas bajo, pongo por caso en un foso, se debería suponer una recta tirada desde dicho punto original perpendicularmente al suelo, cuya recta mediría la cantidad que el punto dado estuviera mas alto ó mas bajo que el suelo; y como esta perpendicular sería al mismo tiempo paralela al plano del quadro y al plano vertical,

Fig. 102. el punto del suelo adonde iría á parar la espresada perpendicular, estaría á la misma distancia de dichos planos que el punto original. Sería, pues, preciso determinar como antes en el quadro la perspectiva del punto del suelo donde rematase la perpendicular, y tirando por este punto una recta paralela á la linea vertical, se determinaría perspectivamente su longitud, segun la distancia del punto original al plano del suelo, conforme declararemos en la cuestion siguiente; el estremo de esta perpendicular sería la perspectiva del punto original dado.

688 Cuestion VI. ***Poner en perspectiva una recta original dada de magnitud y posicion.***

Supongamos que sea de 2 módulos la linea dada, y que el uno de sus estremos *G* haya de estar 3 módulos distante del plano vertical, y 4 módulos del plano del quadro. Busco por lo dicho antes (686) la perspectiva *G* de dicho punto; pero al determinar la del otro estremo pueden ocurrir tres casos que especificaremos.

689 1.° *Quando la linea original es paralela al plano vertical.* Supongamos que su estremo *G* haya de estar el mas inmediato al quadro; yá que la linea coge 2 módulos de largo, el otro estremo estará *6* módulos distante del plano del quadro. Tiro, pues, desde el punto *G* al punto de vista *S* una recta *GS*, y por los puntos *6*, *6* del lado tiro la linea oculta *6I6*; la interseccion *I* determina el otro estremo que se busca.

Pero si el punto *G* hubiere de ser el mas distante del

qua-

quadro, restaría 2 de 4, y por los puntos 2, 2 de los lados tiraría una linea oculta, y el punto que se busca, estaría en su interseccion con *S*3. Fig. 102.

690 2.° *Quando la linea original es paralela al plano del quadro*; entonces ó su estremo *G* ha de ser el mas inmediato al plano vertical, ó el mas distante; en este último caso es evidente que el otro estremo solo dista 1 módulo del plano vertical. Desde el punto de vista *S* tiro una recta oculta á la division 1 del borde inferior del quadro, y su interseccion *K* con la paralela á la linea orizontal que pasa por el punto *G*, determina el otro estremo que se pide.

Pero si el estremo *G* hubiese de ser el mas inmediato al plano vertical, el otro estremo distaría 5 módulos del mismo plano; tiraría, pues, desde el punto de vista *S* una linea oculta á la division 5.

691 3.° *Quando la linea original es oblicua al plano vertical y al plano del quadro*, como si hubiese de declinar 20° de la linea vertical ácia la derecha.

Por el punto *G* tiraré á la derecha del punto de vista una recta al grado 20 de la linea orizontal; desde el mismo punto *G* y á la derecha ácia donde declina la linea original, tiro la *GK* paralela á la linea orizontal, trazándola perspectivamente (690) igual á la recta original, esto es, de 2 módulos; desde su estremo *K* tiro una recta *KQ* que pueda cortar la linea *GL* que vá desde *G* al grado 20, ácia el lado donde ha de estar el estremo que busco, y vaya á rematar al grado de la linea orizontal que señala la mitad del com-

Fig. 1102. plemento del ángulo de inclinacion de la linea original respecto del plano vertical, cuya mitad es en este caso 35°, por ser 70° el complemento de los 20° que abraza el espresado ángulo de inclinacion. La interseccion de *QK* con *GL* determinará en *L* la perspectiva del otro estremo de la linea propuesta.

Porque nos será muy facil probar que el triángulo *GLK* es perspectivamente isósceles, y que sus dos lados iguales son *GL* y *GK*, en cuyo supuesto será *GL* perspectivamente igual á la linea propuesta, por serlo *GK* en virtud de la construccion. Es evidente desde luego que en el triángulo *GKL* el ángulo *L* es (677) perspectivamente de 55°; en el triángulo *SGH* será el ángulo *SHG* de 70°, por ser recto el ángulo *S*, y el ángulo *G* de 20°. Luego por ser *GK* y *SH* paralelas, será tambien de 70° el ángulo *G* del triángulo *GKL*. Rebajando, pues, de 180°, suma de todos los ángulos del triángulo *GKL*, la suma de 55° y 70°, la resta 55° será el valor del ángulo *GKL*, que sale perspectivamente igual al ángulo *GLK*, y por lo mismo son perspectivamente iguales los dos lados *GK*, *GL*.

692 Construyendo en un plano á parte, ó calculando por trigonometría un triángulo rectángulo cuya hypotenusa sea la recta original, y uno de los ángulos sea igual al ángulo de inclinacion que forma la linea propuesta con el plano vertical, el valor del lado opuesto á este ángulo determinará la cantidad que el otro estremo de la linea ori-

gi-

ginal dada dista del plano vertical mas ó menos que el punto *G*. Tirando desde el punto de vista *S* por *G* la recta *SM*, se tomará en las divisiones del borde inferior del quadro la cantidad *MP* que espresa quanto el estremo *L* que se busca de la linea propuesta, está originalmente mas cerca ó mas lejos del plano vertical; y tirando al punto de vista la recta *PS*, su interseccion con *GH* determinará en *L* el punto que se pide. Fig. 102.

693 Cuestion VII. *Dividir una linea dada en perspectiva en quantas partes iguales se quiera.*

Sea *PQ* la linea dada que hemos de dividir en quatro partes iguales. Desde un punto qualquiera *S* de la linea orizontal tiraremos por los estremos *P*, *Q* dos rectas *SD*, *ST* hasta la linea del borde inferior del quadro. Dividiremos el intervalo *DT* en partes iguales *DM*, *ML*, *LG*, *GT*, y con tirar *SM*, *SL*, *SG* &c. estará dividida la linea dada en partes iguales en los puntos *m*, *l*, *g*. Porque está patentemente interceptada entre paralelas originales *SD*, *SM*, *SL*, *SG*, *ST* (680), cuyas paralelas están á iguales distancias unas de otras, pues parten la *FD* en partes iguales. Luego parten tambien la *PQ* en partes perspectivamente iguales. 103.

694 Acerca de está operacion tenemos dos prevenciones que hacer. 1.° Para que salga mas perfecta se debe escoger el punto *S*, tal que esté quanto sea posible á distancias iguales de los estremos de la linea dada *PQ*.

695 2.° Si hubiéramos de dividir *PQ* en partes des-

Fig. 103. iguales entre sí, pero determinadas por algun borrador ó perfil; dividiríamos *TD* en partes proporcionales á las del borrador, cuya operacion se egecuta facilmente con la pantómetra, y las lineas tiradas desde el punto *S* á dichas divisiones cortarán la *PQ* en los puntos que se buscan.

696 Cuestion VIII. ***Desde un punto dado* A *en el suelo, trazar la perspectiva* AK *de una recta que forme originalmente con el plano vertical un ángulo tan grande que no se pueda señalar en la linea orizontal.***

Desde el punto dado *A* tiro al lado donde hay bastante lugar una recta *AH* paralela á la linea orizontal, haciéndola perspectivamente igual al rayo principal. Tomo en las divisiones de la linea orizontal una recta *OZ* desde el punto de vista *O* hasta el punto *Z*, que coja un número de grados igual al complemento del ángulo dado; miro en las divisiones del borde inferior del quadro de quantos módulos es la recta *OZ*, tiro *OH*, y tomo en ella *HK* perspectivamente igual á dicho número de módulos, será la recta *AK* la direccion de la linea que se pide.

Porque el ángulo *AHO* es perspectivamente recto y *AH* es igual al rayo principal; luego *HK* es perspectivamente la tangente de ángulo *HAK*, complemento del ángulo dado; será, pues, *AK* la direccion que se busca.

697 Si fuese determinada la longitud de la recta cuya direccion se busca, tomaríamos en la *AH* un punto *N* tal que fuese *AN* perspectivamente igual á la recta pedi-

dida, y tirando la *NC* al grado de la linea orizontal que señalase la mitad del complemento del ángulo dado (691), saldría la *AV*. Fig. 103.

698 Cuestion IX. ***Poner en perspectiva rectas perpendiculares al plano orizontal; ó, lo que es lo propio, poner en perspectiva las lineas de altura.***

I. Resolucion. Supongamos que se nos proponga levantar en el punto *Q* una perpendicular al orizonte, alta de $6\frac{1}{2}$ módulos. Por el punto de vista *O*, ú por otro punto qualquiera de la linea orizontal, y por el punto *Q* tiraremos una recta *OF*, hasta el punto *F* del borde inferior del quadro. Levantaremos en el punto *F* una perpendicular *FE* á este borde inferior, la daremos $6\frac{1}{2}$ módulos, tomándolos en las divisiones del mismo borde, y llevándolos desde *F* á *E*; tiraremos la *OE*, y su interseccion con una perpendicular *QI* á la linea orizontal tirada desde el punto *Q*, determinará en *I* el estremo superior de la linea que se busca.

Porque *OF* y *OE* son (678) las perspectivas de dos lineas á nivel paralelas entre sí, y por consiguiente las rectas *FE*, *QI* que interceptan, son originalmente iguales una con otra.

699 *II. Resolucion.* Bien se echa de ver que la distancia entre la linea orizontal y la perspectiva de un punto original puesto en el suelo, coge tantos módulos quantos se supone que hay en la altura del ojo respecto del suelo. Por egemplo, si se ha tirado la linea orizontal

Fig. 103. á la distancia de 5 módulos del borde inferior, tomándolos en las divisiones del mismo borde, en cuyo supuesto está el ojo 5 módulos mas alto que el suelo, la distancia del punto *Q* á la linea orizontal será de 5 módulos perspectivos; considerando, pues, *QR* como que coge 5 módulos, tomaremos mas arriba un punto *I* que diste del punto *Q* $6\frac{1}{2}$ de las cinco partes iguales que coge *QR*. Esto se egecuta facilísimamente con la pantómetra.

700 Cuestion X. *Dividir las lineas perspectivas de las alturas en partes iguales ó desiguales en razon dada.*

Como las lineas perspectivas de las alturas son paralelas al plano del quadro, se dividen en partes iguales ó desiguales en razon dada, ó con la pantómetra, ó con señalar en la *FE* los módulos del perfil, tomándolos en las divisiones del borde inferior del quadro, y tirar desde el punto *O* rectas á las divisiones de *FE*, que dividirán *QI* en la misma razon.

701 Cuestion XI. *Señalar en el quadro el punto accidental de las paralelas inclinadas al orizonte, y dadas de posicion.*

Una vez que las paralelas son dadas de posicion, si imaginamos planos verticales donde esté trazada cada una de ellas, estos planos verticales tambien serán paralelos entre sí, y se sabe qual es su posicion respecto del plano vertical del quadro. Pero puede suceder ó que sean paralelos á este plano vertical, ó que estén inclinados respecto de él una cantidad dada.

1.º

702 1.° *Quando los planos verticales son paralelos al plano vertical del quadro*, el punto accidental que se busca está en la linea vertical del quadro, mas arriba ó mas abajo que el punto de vista, una cantidad igual al número de grados que espresa el complemento de la inclinacion de dichas paralelas respecto del orizonte, tomándolos desde el punto de vista en las divisiones de la linea orizontal; el punto accidental estará mas arriba del punto de vista quando la inclinacion de las lineas propuestas apartare su vértice del plano del quadro, y estará mas abajo si dicha inclinacion arrimare el espresado vértice al plano del quadro. Fig.

703 Supongamos que ocurra trazar la perspectiva de un paralelipípedo rectángulo cuyas caras estén inclinadas al orizonte 39.°, estando arrimado paralelamente al plano vertical á un plano perpendicular al orizonte; como si fuera una vigueta arrimada á una pared paralela al plano del quadro, ó una tornapunta. Es patente en virtud de estas circunstancias 1.° que las aristas que terminan las caras del paralelipípedo son paralelas inclinadas al orizonte 39°, y que los planos verticales en que suponemos dichas aristas son paralelos al plano vertical del quadro. 2.° que los planos de las bases del paralelipípedo están tambien inclinados al orizonte la cantidad de 51° complemento de 39°, por razon de los ángulos rectos que componen los ángulos sólidos del paralelipípedo. 3.° que entre las ocho lineas que terminan las dos bases, hay quatro 104.

que

Fig. que son paralelas al orizonte (en la figura están puestas
104. en perspectiva y son *ab*, *dc*, *AB*, *DC*), es á saber, la que está en el suelo *AB* y su paralela *DC*, y la que está arrimada á la pared *ab* y su paralela *dc*, y las otras quatro *ad*, *bc*, *AD*, *BC* están inclinadas al orizonte 51.° De donde se sigue que hemos de determinar en la linea vertical dos puntos accidentales, el uno *T* mas arriba del punto de vista, para las rectas *Aa*, *Bb*, *Cc*, *Dd*, que terminan las caras, y cuya inclinacion aparta su vértice del plano del quadro; y el otro *P* debajo del punto de vista *S*, para las lineas *AD*, *BC*, *ad*, *bc*, que terminan las bases, y cuya inclinacion las arrima al plano del quadro. Tomaremos, pues, en las divisiones de la linea orizontal una recta igual al complemento de 51°, esto es, la tangente de 39°, y la llevaremos desde *S* á *T*, y otra linea igual al complemento de 39°, y la llevaremos desde *S* á *P*; la figura está diciendo lo demas.

704 2.° ***Si las paralelas dadas estuviesen en planos verticales que formáran un ángulo con el plano vertical del quadro***; como si supusiéramos que el paralelipípedo propuesto (703) estuviese arrimado á un plano que formára con el plano vertical un ángulo de 30°, ó lo que es lo propio, estuviera inclinado 60° al plano del quadro. Se
105. deberían señalar en este caso tres puntos accidentales, el uno en *T* para las lineas que terminan las caras, el otro en *Q* para los lados de la base que están arrimados el uno al suelo, y el otro á la pared, y sus paralelos; y el último

mo en *P*, para los lados de la base que solo tocan el suelo ó la pared con uno de sus estremos, y sus paralelos. Fig. 105.

705 Por lo que mira á la determinacion del punto accidental *Q* de las lineas que están en el suelo, no puede haber ninguna dificultad, siempre debe estar en la linea orizontal, en el punto que señala su oblicuidad respecto del plano vertical. Pero para determinar los otros dos, pongo por caso *T*, se practíca lo siguiente.

706 Tómese en la lina orizontal *VQ* la tangente *VE* del complemento de la inclinacion de las caras al orizonte. Llévese desde *O* á *F* en una perpendicular levantada en el punto de 45.° Tírese la *VF* que cortará en *R* la perpendicular *DT* levantada en el punto *D* donde está señalado el complemento de la declinacion de las caras respecto del plano vertical; llévese *OF* desde *D* á *K*, tírese *KR*, hágase *DT* = *KR*, y el punto accidental que se busca estará en *T*. Por el mismo camino se halla el punto *P*.

707 Para demostrar esta práctica, imaginemos que si se prolongára al infinito una recta inclinada, pongo por caso, 39° al orizonte, iría á parar á un punto del cielo elevado 39° sobre el orizonte, ó iría á rematar en la circunferencia de un *almicantarat* ó círculo menor de la esfera celeste, paralelo al círculo del orizonte del qual distaría 39.° Pero como la linea orizontal del quadro es (674) la perspectiva del orizonte celeste, *la perspectiva de un almicantarat es una hypérbola cuyo vértice está*

en

Fig. *en la linea vertical, siendo su primer semiege igual á la*
505. *tangente de la altura de dicho círculo sobre el orizonte, y siendo el segundo semiege el rayo principal.* Quiero decir, que el semiege principal es igual á la parte de la linea orizontal, que hay desde el punto de vista hasta la division que señala los grados de altura.

106. 708 Porque un círculo celeste paralelo al orizonte es la base de un cono óptico cuyo vértice está en el ojo, y la base del cono opuesto es un almicantarat que está á igual distancia debajo del orizonte. Sea, pues, A el lugar del ojo; ABH, el plano del orizonte celeste confundido con el suelo ó plano geométrico á una distancia infinita del punto A; PT, el plano del quadro; MEG, el almicantarat elevado sobre el orizonte los grados que coge el ángulo HAE, y KNI el almicantarat debajo del orizonte. Es evidente que como el plano del quadro PT corta los dos conos opuestos, paralelamente á su ege CL, las secciones mSM, Nsn son dos hypérbolas, cuyo centro está en el punto de vista B del quadro, siendo AD ó SB el semiege principal. Para probar que AB es el semiege conjugado, sea AD ó SB $= a$, SD, PC ó $AB = b$ (este es el rayo principal); AC ó $BP = x$, $PM = y$; luego $SP = x - a$. De los triángulos rectángulos semejantes ASD, SPE sacamos $AD : SD :: SP : EP$; luego $EP = \frac{bx - ab}{a}$, y $EC = EP + PC = \frac{bx}{a}$; $PG = PC + CG = \frac{bx + ab}{a}$. Pero la propiedad del círculo EMG dá (L. 474) $(MP)^2 = PE \times PG$; luego $yy = \frac{bbxx}{aa} - bb$; esta es (III. 149) la equacion

cion de la hypérbola cuyos semieges son a y b. Fig.

709 De donde se colige que si despues de hacer 105. $VC = VE$, se traza por el punto C que señala en el plano vertical una altura de 39°, una hypérbola CTB cuyos semieges sean VC y VO, será esta curva la perspectiva del almicantarat de 39°, y que el punto accidental cuya determinacion nos hemos propuesto, ha de estar en el punto de esta hypérbola donde la encuentra la perpendicular levantada en el punto D. Solo falta probar que la construccion propuesta (706) determina el verdadero lugar del punto T.

710 Sea, pues, VO, b; VC ú OF, a; VD, y; DT ó RK, x; los triángulos semejanres VDR, OVF dán $OV : OF :: VD : DR$, luego $DR = \frac{ay}{b}$, y $DR^2 = \frac{aayy}{bb}$, y por ser KD ó $VC = a$, será $(KD)^2 = aa$; pero el triángulo rectángulo KDR dá $(KR)^2 = (KD)^2 + (DR)^2$ ó $xx = aa + \frac{aayy}{bb} = (DT)^2$. Luego (III. 148) DT es una ordenada al segundo ege de una hypérbola cuyos semieges conjugados son VC y VO.

711 Síguese que VF es (III. 186) la asýmtota de la hypérbola CTB, por manera que determinado el punto T del almicantarat de 39°, es facil (III. 210 y 211) de trazar toda la hypérbola que es la perspectiva de dicho almicantarat.

712 No tiene dificultad la práctica de este método quando las inclinaciones y declinaciones de las lineas originales no pasan de 50 ó 60°; pero quando son mayores

Fig. 105. res es preciso acudir á prolongaciones muy incómodas de varias lineas en el plano del bastidor. Es tambien preciso pasarse entonces sin punto accidental, y determinar separadamente cada linea inclinada, buscando por trigonometría, ó por una operacion gráfica, que declararemos mas adelante, el punto del suelo al qual corresponde verticalmente el vértice de cada linea inclinada, y lo que coge de largo esta linea vertical, poniendo despues dicho punto y la vertical en perspectiva.

713 El que se hubiere hecho cargo de todo lo dicho hasta aquí, conocerá, con considerar la figura, quan facilmente se ha trazado la perspectiva del paralelipípedo propuesto (704).

714 Síguese tambien de lo probado (710) que en la formula $xx = \frac{aabb + aayy}{bb} = (bb + yy) \times \frac{aa}{bb}$, a es la tangente de la inclinacion I de las paralelas dadas, y es la tangente de la oblicuidad O del plano vertical del quadro respecto del plano vertical donde están colocadas, y b es el seno total R; es, pues, la fórmula $xx = (R^2 + T^2 O) \times \frac{T^2 I}{R^2}$. Pero es evidente que $sec^2 = R^2 + T^2$; luego $xx = sec^2 O \times \frac{T^2 I}{R^2}$; luego $x = sec\, O \times \frac{TI}{R}$. Pero por lo probado (II. 370) $sec = \frac{R^2}{\cos}$; luego $x = \frac{R^2}{\cos O} \times \frac{TI}{R} = \frac{R \times TI}{\cos O}$. De donde sacamos esta analogía : *Como el coseno de la oblicuidad del plano vertical del quadro respecto de los planos verticales donde están colocadas paralelas originales inclinadas al orizonte, es á la tangente de esta inclinacion; así el radio es á la distancia de la linea orizon-*

tal

tal del quadro al punto accidental de las mismas paralelas. Fig.

715 De donde se infiere que si por todos los grados señalados en la linea orizontal se tiran perpendiculares, serán otras tantas perspectivas de círculos máximos de la esfera perpendiculares al orizonte, cuyos grados son á propósito para medir todas las inclinaciones posibles de las rectas inclinadas al orizonte y al plano vertical. La linea misma vertical del quadro es uno de estos círculos máximos que podemos comparar con el meridiano de la esfera celeste. Si quisiéramos, pues, dividir en grados todos los verticales perspectivos, se viene á los ojos que tendría la linea vertical divisiones iguales á las de la linea orizontal; y que las divisiones de los demas verticales se señalarían facilmente por el cálculo de la analogía antecedente.

716 Pero para señalar gráficamente estas divisiones, 107.
sea *OQ* la linea orizontal; *SB*, la linea vertical; *OY*, el vertical que hemos de dividir. Llevaremos el rayo principal desde *O* á *Q*, y desde *O* á *M* la distancia *OS* del vertical propuesto al punto de vista. Si consideramos la linea vertical del quadro como el meridiano, la distancia *OS* será el *Azimut* del vertical que se ha de dividir. Tírese la *MQ*, y desde el punto *Q* como centro con el radio *QO* trácese el arco de círculo *ON*. Desde el punto *N* bágese á *OQ* la perpendicular *LN*, la linea *LQ* es patentemente el coseno del azimut, pues *OM* es su tangente y *NL* su seno. Llévese la *LQ* desde *Q* á *P*, del

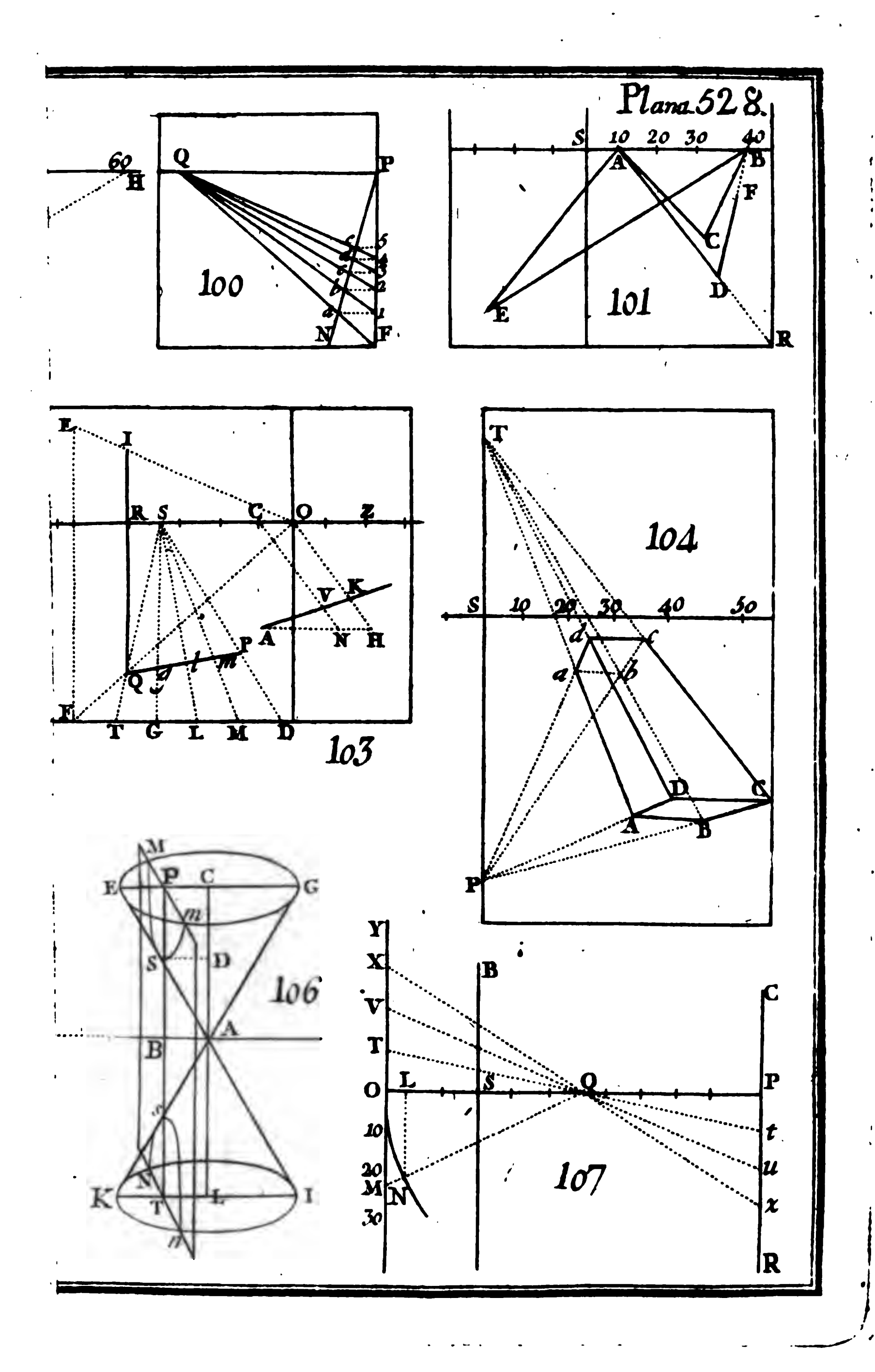
otro

Fig. otro lado del punto *O*. Tírese por *P* la perpendicular *CPR*
107. en la qual se señalarán de cada lado del punto *P*, como en *t*, *u*, *x* &c. las divisiones sacadas de la linea orizontal desde el punto *S*. Por el punto *Q* y por los puntos *t*, *u*, *x* &c. tírense rectas que determinarán los puntos *T*, *V*, *X* &c. de las divisiones que buscamos. Porque siendo, por egemplo, *Pt* la tangente de 10° cuyo radio es *OQ*, los triángulos rectángulos semejantes *QOT*, *QPt* darán *QP*: *Pt* :: *QO*: *OT*. Esta es la analogía de antes (714).

717 Suponiendo un cubo inscripto en la esfera celeste ó terrestre, por manera que el ege del equador ó de la eclíptica sea perpendicular á dos caras opuestas, se podrán proyectar, por las reglas que acabamos de dar, en las otras quatro caras, los puntos que están en la superficie de la esfera y cogen 45° de cada lado del equador ó de la eclíptica. Tambien se podrían proyectar puntos mas distantes, suponiendo prolongados los planos de dichas caras.

718 Cuestion XII. *Poner en perspectiva una figura colocada en un plano á nivel distante del plano del suelo.*

108. Tómese en las divisiones del borde inferior *AB* del quadro el número de módulos que espresa la altura del plano, llévese en ambos lados del bastidor desde *B* á *L*, y desde *A* á *K*, tírese la *LK*, y considérese esta recta como si fuese el borde inferior del quadro, el espacio *LCDK*, como si fuese el suelo ó el campo del quadro, de modo que la figura propuesta esté colocada en este


100
101
103
104
106
107

este suelo. Tendrá, pues, la recta *LK* todas y las mismas divisiones que *BA*; y servirá respecto de la figura dada para los mismos usos que *BA* respecto de los obgetos colocados realmente en el suelo. El destino de la linea orizontal y de sus divisiones no variará; pero por lo que toca á las rectas *CL*, *DK*, en las quales se han de tomar las distancias de los puntos de la figura dada al plano del quadro, sus divisiones no son las mismas que las de las rectas *CB*, *DA*, bien que sean proporcionales con ellas. Por lo qual se pueden sacar unas de otras con la pantómetra, ó gráficamente como sigue. Fig. 108.

Llévese la recta *DA* en el ángulo que se quiera desde *D* á *F*, de modo que sea *DF* = *DA*. Señálense en *DF* las divisiones de la recta *DA* que se han de llevar á *DK*, y despues de tirada *FK*, tírense por todos estos puntos á *DK* paralelas á *FK*, estas señalarán en *DK* las divisiones correspondientes á las de *AD*. Pongo por caso que queramos hallar en *DK* el punto que diste 2 módulos del quadro; tomaremos 2 módulos desde *F* á *G*, tiraremos *GH* paralela á *FK*, y será *KH* la medida de estos dos módulos de distancía al quadro en el plano elevado.

Lo mismo se practicaría puntualmente si se tratára de un plano mas alto que el plano orizontal ó mas bajo que el suelo, como si quisiéramos dibujar alguna figura dentro de un foso. Todo estaría en el primer caso en llevar *LK* mas arriba de *CD*, y en el segundo, debajo de *AB* como á *lk*.

719 Cuestion XIII. *Dada la perspectiva* B *del cen-*

Fig. 109. *tro de un círculo de un radio dado, pongo por caso de 3 módulos, trazar la perspectiva del mismo círculo.*

Por el punto dado *B* y el punto de vista *V* tírese una recta *FV*, y una paralela *DC* á la linea orizontal. Háganse (688) las *BC*, *BD* perspectivamente de 3 módulos. Tírense tambien por el punto *B* dos rectas *PG*, *OL* al punto de 45° de cada lado. Desde el punto de $22^\circ \frac{1}{2}$ de la derecha tírense por los puntos *C*, *D* dos rectas *CM*, *DN* que determinarán los puntos *M*, *N* en la recta *OL*; y desde el punto de $22^\circ \frac{1}{2}$ de la izquierda tírense por los mismos puntos *C*, *D* dos rectas que señalarán en *PG* dos puntos *K*, *I*. Finalmente trácese una curva regular por los ocho puntos hallados *C*, *I*, *E*, *N*, *D*, *K*, *F*, *M*; esta será la perspectiva del círculo dado.

720 Es patente que *sea la que fuere la situacion del círculo, su perspectiva ha de ser una elipse.* Porque los rayos tirados desde cada punto de la circunferencia de este círculo al ojo del espectador forman un cono cuyo vértice está en el ojo, y cuya seccion con el plano del quadro no puede menos de ser una elipse. Exceptúese el caso en que el círculo es paralelo al plano del quadro.

721 Se trazará con mas facilidad y precision esta elipse si por los puntos *E*, *F* se tiran paralelas á la linea orizontal, que formarán un trapecio *PLGO*, cuyo trapecio es la perspectiva de un quadrado, en el qual está inscripto el círculo original. Por consiguiente la elipse debe ir á tocar todos los lados de estos trapecios en los puntos *C*, *D*, *E*, *F*.

Si

Sí se para la consideracion en la operacion que resuelve la última cuestion, se echará de ver que sirve para hallar los vértices de los ocho ángulos de un octógono regular que estuviese inscripto en el círculo. Fig. 109.

722 Escusamos prevenir que el punto *B* no es el centro de la elipse, ni *DC* su ege mayor. El centro está en el punto *S* que ocupa el medio de la recta *EF*. Porque *OG* ó *PI* es una tangente de la elipse, y *DC* que es paralela con ella está dividida por medio en *B* por la recta *EF* que pasa por los puntos de contacto; luego *DC* es una doble ordenada cuyo diámetro es *EF*; luego el centro de la elipse está en su punto *S* del medio.

723 Por lo que toca á la situacion de los eges de esta elipse, varía segun sea la distancia del círculo original al plano vertical y al plano del quadro. Como este es un punto de poca importancia, nos contentaremos con prevenir en general que el ege mayor de una elipse que es la perspectiva de un círculo, no es otra cosa que la perspectiva de la cuerda del mismo círculo que vá á los dos puntos donde le tocan dos rayos visuales que van desde el ojo al mismo círculo. Véase acerca de las proyecciones lo dicho (III. 735 y sig.).

Egemplo y observaciones generales para trazar qualquiera especie de Perspectivas.

724 Quando ocurre trazar la perspectiva de un objeto compuesto de muchas partes, la habilidad del dibujante consiste en mirar con cuidado quales son las que es-

Fig. tán en una misma alineacion, en lineas paralelas, en unas mismas verticales, en unas mismas diagonales &c. á fin de que todas estas partes ocupen en la perspectiva los lugares que las corresponden, y no se multipliquen los errores de las operaciones.

110. 725 Supongamos, por egemplo, que se haya de trazar la perspectiva de un pedestal de orden Toscano, de suerte que una de las caras puestas á la vista esté inclinada 40° á la izquierda del plano vertical, y la otra cara 50° ácia la derecha; que el ángulo del plinto inferior, mas inmediato al ojo diste un módulo * del plano del quadro, y dos módulos del plano vertical ácia la izquierda; que sean finalmente todas las dimensiones del pedestal propuesto quales espresa la figura, que representa la mitad de dicho pedestal; no le hace el que esté toscamente dibujada, porque solo sirve para manifestar el orden y la situacion de las partes, pero han de estar puntualmente señaladas con números en su dibujo todas las dimensiones.

726 Con la mira de que sea mas perceptible quanto acerca del caso propuesto queremos declarar, nos valdremos de varias figuras para individualizar las diferentes operaciones que se han de egecutar, y con esto tambien escusaremos la confusion que ocasionaría forzosamente la multitud

* Para mayor individualidad hacemos cada uno de estos módulos la tercera parte del módulo que usan los Arquitectos, y para el orden toscano dividen en 12 partes; quatro de estas mismas partes componen nuestro módulo.

tud de líneas en una misma figura. Y formando desde luego el bastidor perspectivo con las dimènsiones que requiere el tamaño del quadro, tiro desde el punto de vista *V* al punto señalado 2 en el borde inferior del quadro, á la izquierda de la linea vertical, una recta *V*2; y por los puntos señalados 1 en los lados, tiro una recta 1*A*1 que señala en *A* la perspectiva de la esquina del pedestal, que está mas cerca del ojo (686). Fig. 111.

727 Desde el punto *A* tiro las rectas indefinitas *A*40, *A*50 que son las direcciones de las dos caras visibles. Desde el punto de vista *V* tiro al borde inferior del quadro á la division 8 ácia la derecha, una recta *V*8 cuya interseccion con 1*A*1 dá la *AC* (690) perspectivamente de 10 módulos, porque segun el perfil las caras del plinto inferior del pedestal tienen de largo 10 de nuestros módulos, ó 40 partes, conforme señala la figura 110. Desde el punto *C* tiro á 20° (mitad de 40° complemento de 50°) una recta *C*20 á la derecha, que dá en *E* la perspectiva del ángulo del plinto que se vé á la derecha (691). Hecho esto, concluyo facilmente la perspectiva *ADEF* del asiento del plinto, tirando desde *A* una recta á 5° que es la direccion de la diagonal, y desde *E* una recta *EF* á 40°, su interseccion *F* será la perspectiva del ángulo del plinto opuesto al ángulo *A*; por *F* y por 50° tiro una recta que vá á encontrar en *D* la recta *A*40.

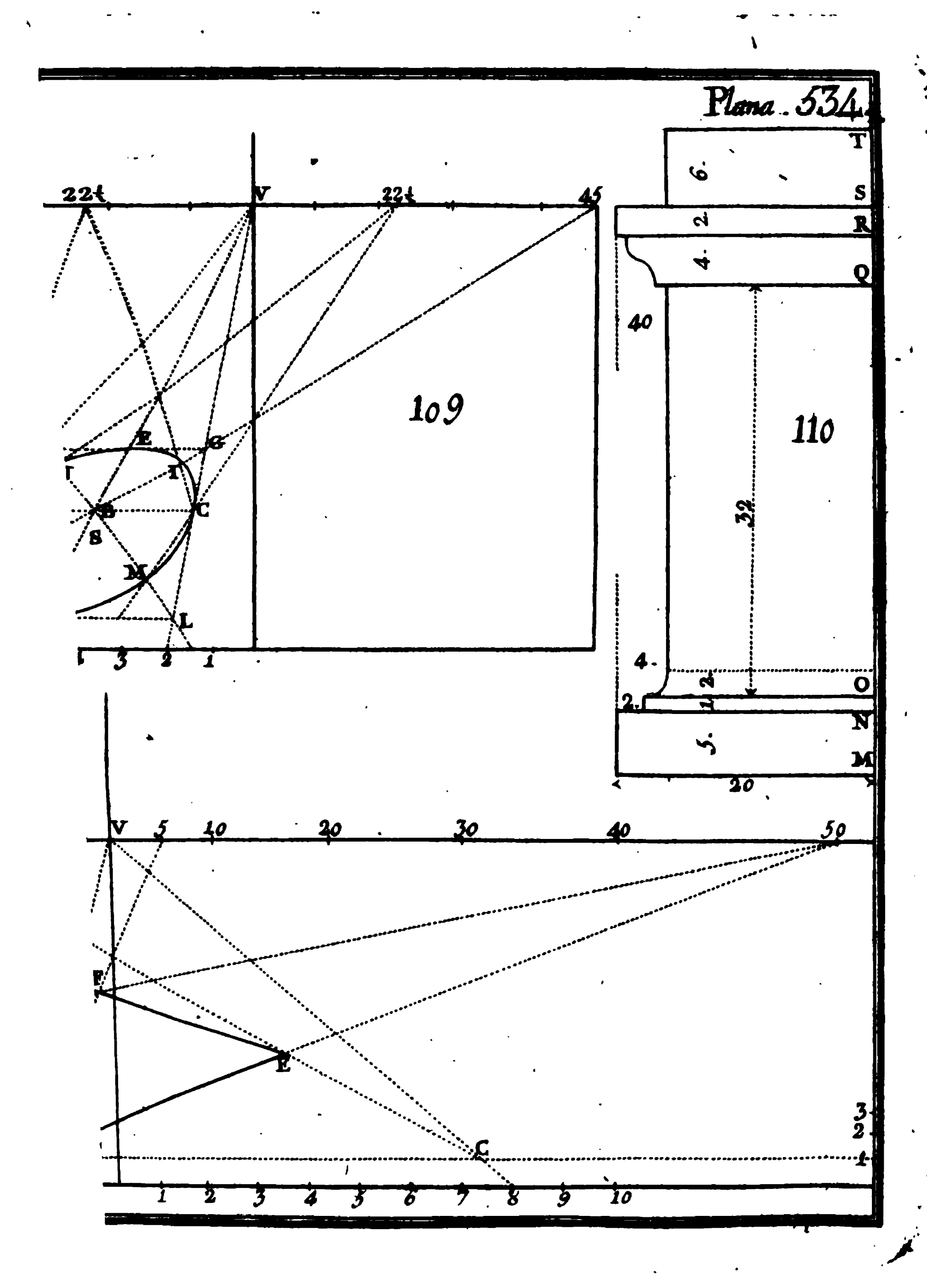
728 Y porque este plinto es quadrado, y son iguales todas las dimensiones de las molduras del pedestal, en ca-

Fig. cada una de sus quatro caras, infiero que no solo la dia-
111. gonal tirada desde el punto *A* al punto *F*, mas tambien todas las que se tiraren en el plano de todas las molduras, han de ir á parar al quinto grado á la derecha de la linea orizontal, por estar este grado á 45° de los dos puntos 40° á la izquierda, y 50° á la derecha.

729 Infiero igualmente que si imagino un plano perpendicular sobre la diagonal 5*A* del asiento del plinto, todas las diagonales de los planos de las molduras han de estar en dicho plano.

730 Por lo que 1.° Para poder señalar con facilidad los vuelos de dichas molduras, divido una parte de la espresada diagonal la mas inmediata al ojo en partes perspectivamente iguales (693). Por no confundir con divisiones el borde inferior del quadro, me valgo de la línea *AC* que es paralela con él. Y como se puede tomar á arbitrio el punto de la linea orizontal que ha de servir para egecutar esta division (693), elijo el punto de 40°,
112. tirando por él y por el punto *E* una recta hasta que encuentre en *G* la recta *AC* prolongada si fuere menester. Divido *AG* en 10 partes iguales por razon de los 10 módulos que ha de llevar la cara del plinto inferior. Subdivido las dos primeras partes que están ácia *A* en otras menores, pongo por caso cada una en dos partes iguales. Por estas divisiones tiro á 40° rectas que dividen *AF* en los puntos *H*, *K*, *L* que servirán para hallar los vuelos; señálolos con los mismos números que sus partes correspondientes en *AG*.

Es



22½
V
22½
45
E
G
I
C
S
M
L
3
2
1
109
T
6
S
2
R
4
Q
40
110
32
4
2
O
2
1 2
N
5
M
20
V
5
10
20
30
40
50
F
E
C
3
2
1
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10

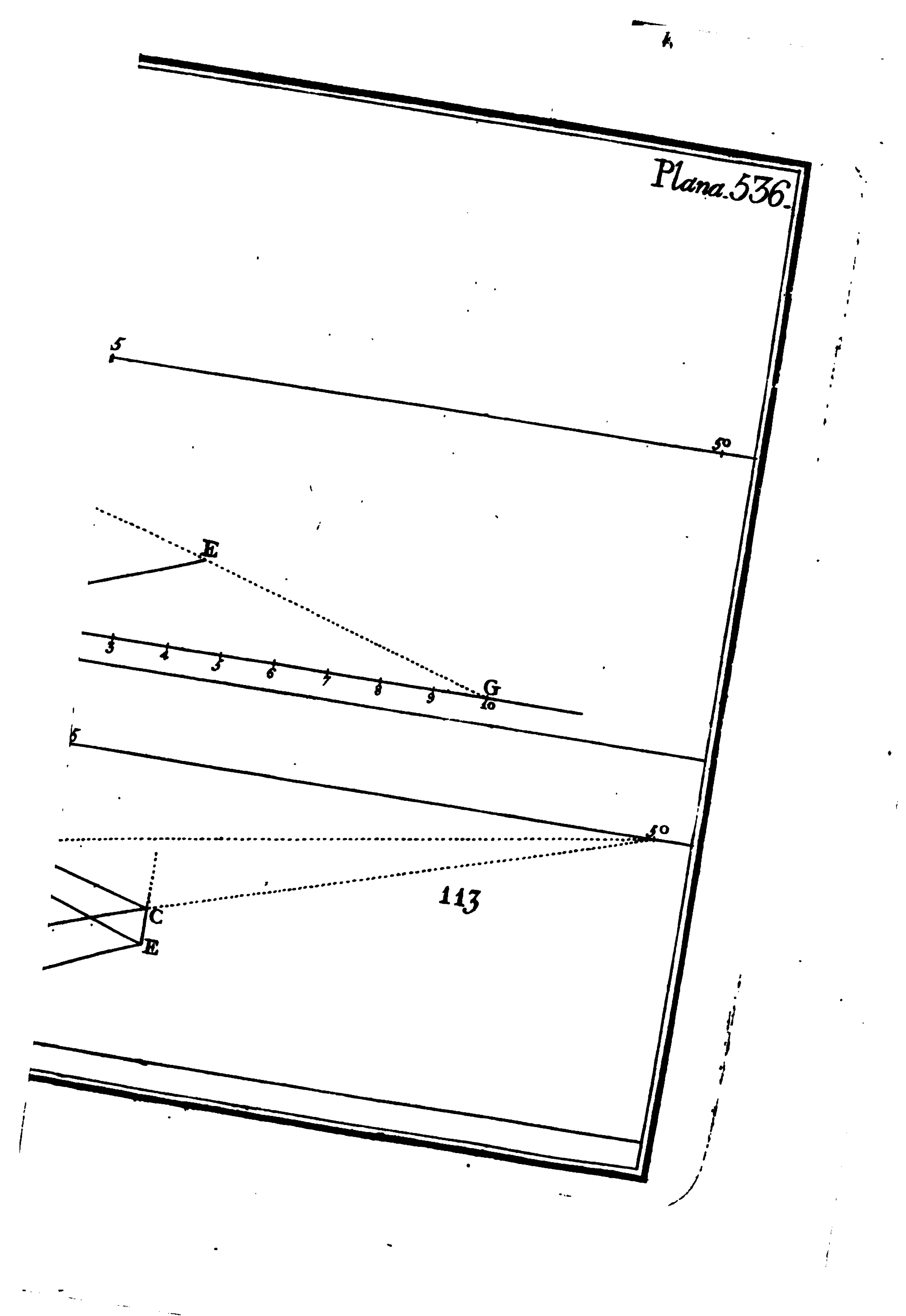
731 Es de observar que las partes *AH*, *HK*, *KL* no son medios módulos perspectivos; son cantidades que respecto de los medios módulos del tanteo, son lo que la diagonal de un quadrado es á su lado, ó lo que $\sqrt{2}$ á 1 (I. 519); las partes *Ab*, *bk*, *kl* son las que son medios módulos perspectivos. A las divisiones de la linea *AF* las llamaremos *Escala de los vuelos.* Fig. 112.

732 2.° Para sacar facilmente las divisiones de las alturas, prolongo la diagonal *FA* hasta el punto *M* del borde inferior del quadro, levanto una perpendicular indefinita *MT*, en la qual señalo con las divisiones del borde inferior del quadro todas las dimensiones de las alturas señaladas en el perfil con las letras *N*, *O*, *P*, *Q*, *R*, *S*, *T*. 110.
A la recta *MT* la llamaremos *Escala de las alturas.*

733 Estando todo así dispuesto, desde los quatro 113.
ángulos del asiento del plinto levanto perpendiculares indefinitas *AB*, *DI*, *FG*, *EC*, y tiro desde el punto *N* de la escala de las alturas una recta *N5* al punto 5 de la linea orizontal; su interseccion con *AB* dá en *B* la altura perspectiva *AB* de la esquina del plinto. Desde dicho punto *B* tiro al punto de 40° una recta que encontrando la perpendicular *DI*, dá el vértice de la esquina del plinto que se vé á la izquierda; y una recta al punto de 50° que dá en *C* el vértice de la esquina de la derecha. Desde el punto *C* tiro á 40°, y desde el punto *I* á 50° rectas, cuya interseccion señala en *G* el vértice de la esquina del plinto opuesta á la esquina *A*. Pero si la operacion se hubiere

Fig. hecho con exactitud, habrá de estar el punto *O* no solo en
113. la perpendicular *FG*, mas tambien en la diagonal *N*5. Estos dos modos de comprobar las operaciones, son los que deben dirigir al dibujante, é impedir que se amontonen las equivocaciones.

114. 734 Para poner en perspectiva el filete señalado *ON* en el perfil, tiro desde luego las diagonales *BG*, *IC*, y porque segun espresa el perfil, este filete ha de tener de 2 partes de módulo de vuelo, tomo en la escala de los vuelos una porcion *AH* = 2 partes. En el punto *H* levanto una perpendicular hasta encontrar en *D* la diagonal *BG*. El punto *D* es el ángulo inferior de dicho filete. Desde este punto tiro á 40°, y despues á 50° rectas que dán en la diagonal *IC* los dos ángulos inferiores *K*, *F*; desde estos puntos *K* y *F* tiro á 50° y á 40° dos rectas que se cortarán y darán el ángulo *E* cabalmente en la diagonal *BG*; por manera que el quadrilátero *DKEF* es la perspectiva del asiento del filete. Desde estos quatro ángulos levanto perpendiculares indefinitas, despues por el punto *O*, que señala en la escala de las alturas la altura del filete, y por el punto de 5° tiro una recta *O*5 que dá en el punto *V* de la perpendicular *DV* el vértice de la esquina del filete, y en *Y* el vértice de la esquina opuesta. Tiro á 40° y á 50° rectas que dan como antes los vértices de las dos esquinas laterales en *L* y *X*. Para comprobar estas operaciones, tiro desde los puntos *L* y *X* á los puntos de 40° y 50° dos rectas que se han de cortar en el punto *Y* hallado ya. Con es-


Plana.536.
5
50
E
3
4
5
6
7
8
9
G
10
5
50
113
C
E

esto queda concluida la perspectiva del filete. Fig.

735 Para trazar el dado, tiro las diagonales *LX*, *YV*, 115.
y porque, segun espresa el perfil, este dado se rehunde 1 módulo, ó 4 partes, tomo en la escala de los vuelos un espacio *AC* = 4 partes. Desde el punto *C* levanto una perpendicular indefinita, que encontrando la diagonal *VY* en el punto *K*, dá en este punto el ángulo inferior del dado, en el supuesto de que este dado no tenga escapo. Desde el punto *k* tiro á 40° y á 50° rectas que dan los puntos *B* y *D* en la diagonal *LX*, donde han de corresponder los ángulos inferiores vistos de lado, y tirando por los puntos *B* y *D* rectas á 50° y á 40° he de hallar en el punto *I* de la diagonal *VY* el ángulo opuesto al ángulo *K*. Así el quadrilátero *KBID* es la perspectiva del asiento del dado.

736 En los quatro ángulos de este quadrilátero levanto perpendiculares indefinitas *KE*, *BG*, *DF*, *IH*; y para darlas la altura correspondiente, desde el punto *Q* que señala dicha altura en la escala de las alturas, tiro á 5° una recta *Q*5 que dá en *E* el vértice de la esquina delantera. Desde este punto *E* tiro á 40° y á 50° rectas que dan en *G* y *F* los dos ángulos de los lados; desde *G* y *F* tiro á 50° y á 40° rectas que se han de cortar en la recta *Q*5, y dar en *H* el ángulo oppuesto al que se vé.

737 Para trazar el escapo del asiento del dado; desde el punto *P* que señala la altura del escapo en la escala de las alturas, tiro á 5° una recta que dá en *k* la altura de di-

Fig. 115. dicho escapo respecto de la esquina *KE*, y por medio de rectas tiradas como antes á 40° y á 50°, determino los demás puntos *b*, *d*, *i*; trazo, pues, una curva desde *b* á *L*, desde *d* á *X*, y desde *k* á *V*, teniendo presente que la concavidad de esta curva esté á la izquierda, porque se supone que el ojo está á la derecha del pedestal.

738 Ahora trazaré la basa del talon señalado *RQ* en el perfil, fig. 110, y el listel *SR* que está encima de este talon.

116. En el quadrado perspectivo de la parte mas alta del dado, tiro las diagonales *GF*, *EH*, prolongándolas un poco mas allá del dado, porque la basa del talon ha de volar; el vuelo de esta basa está señalado 3 partes de módulo en el perfil; por cuyo motivo en el punto *B* de la escala de los vuelos levanto una perpendicular *BC* que dá en *C*, donde encuentra la prolongacion de la diagonal *EH*, el ángulo delantero de la basa del talon; hecho esto, determino facilmente como antes los demás ángulos *I*, *L* en las prolongaciones de la diagonal *GF*, y el ángulo *K* en la diagonal *EH*.

739 Concluido esto, ya que el listel está en el mismo plomo que el plinto inferior, prolongo indefinitamente las perpendiculares que terminan los ángulos visibles *V*, *A*, *X* del plinto. Desde el punto *R* tomado en la escala de las alturas, tiro á 5° una recta *R*5 que dá en el punto *P* de la perpendicular *AP* el ángulo inferior del listel. Desde el punto *S* que señala en la escala de las alturas, la altura del

Plana. 538.

del mismo listel, tiro á 5° una recta *S*5 que dá en la misma perpendicular el vértice *p* de dicho ángulo; hecho esto, se trazan facilmente las otras dos esquinas visibles *Nn*, *Oo* con tirar rectas á 40° y á 50.° Fig. 116.

740 Y porque segun manifiesta el perfil la parte superior del talon remata debajo del mismo listel, con un vuelo de 1 parte de módulo, tiro la diagonal *NO* desde un punto tomado en la escala de los vuelos á 1 parte de módulo de distancia del punto *A*, levanto una perpendicular que vá á encontrar *R*5 en el punto *c*, donde ha de estar el ángulo de dicho talon; tirando desde *c* á 40° y 50° rectas que rematan en la diagonal *NO*, hallo los otros dos ángulos visibles *i*, *l*; trazo las curvas *iL*, *lL*, *Cc*, y queda concluida la perspectiva del talon. 117.

Solo falta el plinto superior; y como por lo que espresa el perfil ha de tener puntualmente el mismo vuelo que el dado, prolongo indefinitamente las rectas que terminan las esquinas de dicho dado. Desde el punto *T* que señala en la escala de las alturas la altura del plinto, tiro á 5° una recta *T*5 que encuentra en *E* la linea del ángulo delantero prolongado; es, pues, este punto *E* la perspectiva del ángulo superior del plinto; finalmente, tirando desde este punto *E* rectas á 40° y á 50° hallo los otros dos ángulos visibles en *G* y *F*.

741 En orden á las operaciones que acabamos de declarar, haremos algunas prevenciones.

1.° Si hubiese en el perfil alguna parte que hubiera de

Fig. 117. de tener mas vuelo que el ángulo inferior de la basa del obgeto, se podrian hallar estos vuelos en la escala, haciéndola divisiones mas acá del punto *A*.

742 2.° Si en el borde superior del quadro se hubiesen señalado las mismas divisiones que en el inferior, conforme lo hemos prevenido (670), se levantarán con facilidad todas las perpendiculares necesarias, porque bastará aplicar una regla encima de dos divisiones correspondientes de cada borde, de suerte que pase al mismo tiempo la regla por el punto donde se ha de levantar la perpendicular.

743 3.° En la práctica de la perspectiva son muy socorridas las diagonales, yá para comprobar las posiciones de los ángulos perspectivos de los polýgonos, yá para hallar los centros perspectivos de los mismos polýgonos. Por egemplo, tambien se hubieran podido comprobar todas las operaciones del egemplo antecedente con reconocer si todas las intersecciones mutuas de las diagonales que se han tirado están en una misma recta paralela á la linea vertical. Porque todas se han de cortar en el ege del pedestal, cuyo ege es una linea á plomo.

744 4.° Las intersecciones de las diagonales sirven para hallar en el suelo perspectivo el punto que corresponde á los vértices de los obgetos que rematan en puntos ó pirámides, quales son los campanarios, los chapiteles &c.

745 5.° Son muy acomodadas las diagonales para tra-

Plana 540.

trazar los vuelos; pero el uso que de ellas hemos hecho Fig.
en el artículo antecedente, solo sirve para los quadrados y los polýgonos regulares simétricos. Porque como los vuelos son de igual ancho en todas las caras del sólido, forman quadrados ó polýgonos regulares concéntricos, y por consiguiente los ángulos de dichos vuelos están en las diagonales que pasan por el centro de la figura del plano en el qual se colocan.

746 Quando estos planos no son quadrados, y son, 118.
lo que es mas comun, paralelogramos rectángulos como *ABCD*, cuyos lados *AB*, *CD* son de $3\frac{1}{2}$ módulos, y los lados *BC*, *AD* de $4\frac{1}{2}$ módulos, se han de tomar desde cada ángulo en los lados originalmente mas largos *AD*, *BC*, partes *AE*, *BF*, *DG*, *CH* perspectivamente iguales á los lados originalmente menores *AB*, *DC*, y que sean por consiguiente de $3\frac{1}{2}$ módulos en este egemplo, á fin de trazar en la superficie del rectángulo *ABCD* quadrados perspectivos *ABFE*, *DCHG*, cuyas diagonales *BE*, *AF*, *GC*, *DH* servirán, como antes, para hallar los ángulos de los vuelos, y tambien se podrá escoger una para que despues de dividida sirva de escala de vuelos.

747 Pero si el plano fuese un polýgono irregular, entonces, en lugar de un simple borrador de la disposicion, y de las dimensiones de las partes del obgeto cuya perspectiva se hubiere de trazar, se deberá formar geométricamente un plano exacto, donde estén señalados todos los vuelos con todas sus dimensiones y proporciones por una es-

Fig. escala bastante grande, á fin de que sean reparables las partes menores. En el espresado plano se tirarán dos perpendiculares que señalen la verdadera posicion del plano vertical, y la del quadro, para medir con el compas y la escala la distancia de cada punto á dichos dos planos, y trazar la perspectiva de dichos puntos por lo declarado antes (686 y 718).

Preparativos necesarios para poner en perspectiva muchos obgetos de magnitud y posicion determinadas.

748 Aunque por lo dicho hasta aquí parece que está al arbitrio del que traza una perspectiva suponer la distancia que quiera entre el ojo y el quadro, hay sin embargo acerca de esto una regla fija para determinar esta distancia que siempre se debe proporcionar con la estension de los obgetos que se han de ver en el plano del quadro. Porque si se quiere representar en el quadro, pongo por caso un edificio que tenga 30 varas de largo, no siendo mas que de 10 varas la distancia del ojo al quadro, es constante que por estar el ojo muy arrimado al quadro no podría percibir distintamente los dos estremos del edificio, porque sería muy obtuso (VI. 349) el ángulo que formarían en el ojo los rayos que le llegaren desde cada estremo del espresado edificio.

749 Es, pues, este ángulo el que nos ha de guiar en esta determinacion; pero antes de manifestarlo hemos de prevenir que llamaremos *Campo de la Escena* todos los ob-

obgetos que se han de dibujar juntos en la parte anterior Fig.
ó cara del quadro.

750 I. Quando son muchos los obgetos, ó lo que es lo propio, quando es muy grande el obgeto cuya perspectiva se ha de trazar, como si fuese un palacio, un jardin con sus calles &c. despues de trazados sus perfiles donde estén señaladas las distancias respectivas, las alturas y los gruesos de todas las partes, se calculará á qué distancia del quadro se ha de suponer el campo de la escena. Para esto se tomará primero en el perfil la altura del obgeto mas alto y mas inmediato al quadro, y se hará esta proporcion:

Como la altura del quadro
Es al rayo principal,
Así la altura del obgeto
Es á la distancia que ha de haber entre el ojo y el obgeto, para que toda su altura se pueda representar en el quadro.

Supongamos que *AB* es el obgeto mas inmediato y mas alto, siendo su altura de 16 módulos, la altura del quadro *TR* de 5 módulos, y el rayo principal *OT* de 10 módulos. Es patente que *RT* : *TO* :: *BA* : *AO*. Por el cálculo sale *AO* = 32 módulos; y por consiguiente *AT* = 22 módulos. Luego es preciso suponer el campo de la escena distante 22 módulos, para que se vea entero el obgeto mas alto y mas inmediato. 119.

751 II. Despues se indagará si suponiendo la distan-

Fig. tancía que acabamos de calcular, será bastante ancho el quadro para que en él quepa todo el campo de la escena; con esta mira se hará esta analogía:

Como la distancia del ojo al obgeto sacada por la analogía antecedente
Es al rayo principal,
Así el ancho del campo de la escena
Es al ancho que se le debe dar al quadro.

120. 752 Porque sea *AB* el ancho del campo de la escena = 48 módulos; *O*, el lugar del ojo distante de *AB* la cantidad *OC* = 32 módulos; *DE*, el ancho del quadro. Quando todo el campo de la escena cabe en el quadro, los rayos que ván desde el ojo á los estremos *A*, *B* han de pasar por los lados *D*, *E* del quadro. Los triángulos *AOB*, *DOE* son semejantes por razon de las paralelas *AB*, *DE*; luego las perpendiculares *OC*, *OF* son unas de sus dimensiones homólogas; luego *OC* : *OF* :: *AB* : *DE*. Por el cálculo sale *DE* = 15 módulos. Es, pues, preciso que tenga el quadro 15 módulos de ancho para que en él quepa el campo de la escena, atendido lo que coge de alto y de largo. Pero si el quadro no tuviese, por egemplo, mas que 12 módulos de ancho, entonces para que en él cupiese todo el campo de la escena, se deberian apartar los obgetos, y sabríamos quanto, egecutando la siguiente analogía, que es la inversa de la antecedente.

Como el ancho del quadro
Es al rayo principal,

Así

Así el ancho del campo de la escena Fig.
Es á la distancia del ojo donde se le ha de colocar 120.
para que quepa entero en el quadro.

Calculando esta analogía sacaremos, en virtud de los supuestos antecedentes, 40 módulos; y por consiguiente se debería apartar del quadro el campo de la escena la cantidad de 30 módulos.

753 III. La posicion de la linea orizontal y de la vertical del quadro se determina por medio del punto del campo de la escena enfrente del qual se supone colocado el ojo del espectador. Está, pues, este punto á una distancia determinada del uno de los lados del campo de la escena, y á una altura determinada respecto del plano del suelo. Una vez que estas distancias vengan señaladas en los perfiles, sirven para determinar á qué distancia del uno de los lados del quadro se debe trazar la linea vertical, y á qué distancia del borde inferior del mismo quadro se debe trazar la linea orizontal; para cuyo fin se calcularán las dos analogías siguientes.

Como la distancia del ojo al punto escogido en el campo de la escena,

Es al rayo principal;

Así la distancia del punto escogido al uno de los estremos del campo de la escena,

Es á la distancia de la linea vertical al borde del quadro, que está del mismo lado que el estremo respecto del qual se considera el punto escogido.

Fig. Porque claro está que *CO* : *FO* :: *CB* : *FE*. Despues,

120. *Como la distancia del ojo al punto escogido,*

Es á la altura del mismo punto respecto del suelo;

Así el rayo principal

Es á la distancia de la linea orizontal respecto del borde inferior del quadro.

121. Porque si *CE* representa el suelo; *CA*, la altura del punto escogido *A*; *DF*, el quadro; es evidente que *OA*: *AC* :: *OT* : *TD*.

754 Si el punto espresado se escogiera de modo que el ojo hubiese de estar enfrente de él, bien que no á la misma altura respecto del suelo; en este caso la analogía antecedente sacada de los mismos triángulos *OAC*, *ODT* sería

Como la distancia del ojo al punto del campo de la escena, que corresponde al punto escogido,

Es á la altura del ojo respecto del suelo;

Así el rayo principal

Es á la distancia de la linea orizontal al borde inferior del quadro.

122. 755 IV. Si el campo *AB* de la escena no fuese paralelo al plano *DE* del quadro, y le estuviese inclinado una cantidad conocida *BAL*; como si se quisiese representar la fachada de un edificio mirada un poco de lado, que llenase exactamente el ancho del quadro, serian algo mas dificultosos los cálculos preparatorios. Se podrán escusar haciendo varias tentativas, esto es, trazando la perspectiva de los quatro puntos de los estremos del obgeto pro-

propuesto, y arreglando las dimensiones del quadro por Fig. 122.
las del trapecio perspectivo que formasen los quatro puntos. Pero si se quisiese hacer directamente el espresado cálculo, se practicará lo siguiente.

756 Despues de determinado el punto F por donde se quiere que pase el plano vertical, y calculado por trigonometría ó tomado por medio de un plan exacto y un pitipie el valor de las lineas AL, FM, AH, FH, haremos $OP = r$, $DE = t$, $PE = x$, que es la distancia del borde E del quadro á la línea vertical; cuya distancia determinada por el cálculo siguiente, servirá para calcular lo demás. Sea tambien $BL = b$, $FM = HL = d$, $AH = f$; los triángulos semejantes BGL, OPE dan $OP : PE :: BL : LG$, ó $r : x :: b : \frac{bx}{r} = LG$. Luego $HG = d - \frac{bx}{r}$. Los triángulos semejantes HGO, PEO dán $PE : OP :: HG : HO$, ó $x : r :: d - \frac{bx}{r} : HO = \frac{dr}{x} - b$; finalmente los triángulos semejantes AHO, PDO dán $DP : PO :: AH : HO$, ó $t - x : r :: f : HO = \frac{fr}{t-x}$. Formando una equacion con los dos valores de HO, sale $\frac{dr}{x} - b = \frac{fr}{t-x}$, de donde sacaremos $xx - \frac{drx - btx - frx}{b} = - \frac{drt}{b}$, que, haciendo para abreviar $\frac{dr + bt + fr}{b} = a$, se reduce á $xx - ax = - \frac{drt}{b}$; luego $x = \frac{1}{2}a + \sqrt{(\frac{1}{4}aa - \frac{drt}{b})} = PE$. Una vez determinada PE, sacaremos PD, y despues haremos $PD : OP :: HA : HO$. Pero $PF = HO + HF - OP$, luego tendremos averiguada la distancia del punto de vista P del quadro al punto F del campo de la escena, por el qual ha de pasar el plano vertical.

Fig. 757 V. Por lo que mira á la posicion del ojo y su altura, es de advertir que en los quadros ordinarios, como los que sirven para adornar un quarto, se debe suponer el ojo 7 ú 8 pies mas alto que el suelo, excepto quando se han de representar muchos obgetos en un mismo piso, qual sería la pintura de un jardin: En este caso conviene levantar el ojo, de modo que la perspectiva no degrade mucho las partes ni las confunda, por manera que se puedan distinguir. Esta especie de perspectiva se llama *á vista de pajaro.*

758 Por esta razon solo debe sugetarse el pintor á colocar el ojo á la altura ordinaria de un hombre como de 5 á 5 pies y medio en las perspectivas que se han de ver desde muy lejos, y han de parecer una continuacion del piso donde está el espectador. Tal sería un estremo de galería prolongada por medio de un quadro de perspectiva, ó de un quadro colocado en lo último de un jardin. En las perspectivas para decoraciones de teatro, se debe suponer el ojo colocado ácia el medio del amfiteatro, y tres ó quatro pies mas alto que el nivel del mismo amfiteatro, á fin de que el suelo puesto en perspectiva parezca una continuacion del piso del teatro.

759 Todo lo que acerca de esto podemos decir en general, es que se debe escoger tal altura que puesto en ella el ojo, pueda ver lo mas distintamente que posible sea los obgetos que el quadro ha de representar indispensablemente, de modo que hagan buena vista. Esto solo se puede

con-

conseguir con hacer varios bosquejos. Porque *toda perspectiva ha de ser regular para que haga buena vista, bien que no toda perspectiva regular hace buena vista.* Esto es peculiar á todas las artes, y particularmente á las que estriban en principios que no son arbitrarios. Fig.

760 VI. El rayo principal ha de ser tambien proporcionado á la distancia de los obgetos detras del quadro, de modo que las partes de estos obgetos no queden ni minoradas ni muy desfiguradas. Y quando el quadro no se ha de ver desde lejos, ni ha de estar en un sitio fijo, se puede seguir esta regla: *El rayo principal no debe ser mas corto que la mitad de la diagonal del quadro, ni mas largo que la misma diagonal, quando se quiere que salgan bien dibujados todos los puntos de los principales obgetos.*

761 Porque nos enseña la esperiencia, y lo hemos probado (VI. 349) que con una mirada y sin menear la cabeza, no podemos ver todo un obgeto quando el ángulo que forman en el ojo los rayos que vienen desde los estremos del obgeto al ojo es obtuso, y que no se pueden percibir distintamente todas las partes visibles de un grupo de obgetos, quando el ángulo que forman en el ojo los rayos que le llegan desde los estremos del grupo no llega á 60.° De donde hemos de inferir que quando el ojo *F* 123.
dista del medio del quadro *D* una cantidad *DF* igual á la diagonal *BC* del mismo quadro, las distancias *FB*, *FC* del ojo á los ángulos *B*, *C* del quadro, son mayores que la diagonal *BC* (por ser la hypotenusa *FC* mayor que el la-

Fig. 123. do *FD* = *BC*), y por consiguiente el triángulo *BFC* es algo mas prolongado que un triángulo equilátero; luego el ángulo en el ojo es menor que 60°, y poco nos costaría probar que es de 53° 8′.

762 Pero quando el ojo *E* está á la distancia *ED* igual á la mitad de la diagonal *BC*, los triángulos *EBD*, *ECD* son rectángulos é isósceles; luego los ángulos *BED*, *CED* son cada uno de 45°, y el ángulo total de 90°.

763 En las perspectivas grandes, quales son las decoraciones de teatro, las de los jardines ó galerías que se deben suponer fuera del alcance regular de la vista, y cuyos obgetos se han de dibujar por lo mismo toscamente sin acabarlos, se debe colocar el ojo donde pidiere la situacion del lugar.

De la Perspectiva de las sombras.

764 El conocimiento de la perspectiva de las sombras es indispensable para los pintores, y particularmente quando se les ofrece pintar obgetos alumbrados del Sol ó de alguna luz inmediata, de modo que las sombras sean muy obscuras y bien terminadas.

765 El punto luminoso, es á saber, aquel que alumbrando un cuerpo opaco, ocasiona una sombra detras del cuerpo, y á la parte opuesta al punto luminoso, puede estar ó detras del quadro, ó en el plano del quadro, ó delante del quadro.

766 Quando el punto luminoso está detras del quadro,

dro, puede estar ó mas acá del obgeto alumbrado, y entonces la sombra se va apartando del quadro, y encaminándose ácia la linea orizontal; ó está mas allá del obgeto, y entonces la sombra se va acercando al quadro, encaminándose al borde inferior del quadro, si el obgeto estuviere mas bajo que la luz, ó ácia el borde superior, si el obgeto estuviere mas alto. Fig.

767 Quando el punto luminoso está mas acá del quadro, puede estar entre el ojo y el quadro, ó detras del ojo. En ambos casos la sombra se va apartando del plano del quadro, encaminándose en el suelo ácia la linea orizontal.

768 Si el punto luminoso fuere el Sol ó la Luna, habrá de estar ó detras del quadro y mas allá de los obgetos, ó en el plano del quadro, ó delante del quadro detras del ojo; porque no puede estar detras del quadro y mas acá de los obgetos, ni tampoco entre el quadro y el ojo, á no ser que se le suponga al zenit de algun punto que esté entre el quadro y el obgeto, ó entre el quadro y el ojo. Pero por causa de la distancia inmensa á que están de nosotros estos dos astros, ninguno de los dos casos propuestos se puede verificar sin que los astros estén al mismo tiempo al zenit de los obgetos, del quadro y del ojo, y por lo mismo en el plano del quadro.

769 De donde se infiere que son mas faciles de determinar las sombras del Sol y de la Luna que las de las luces inmediatas á los obgetos, quales son los velones ó las bugías.

Fig. Como es indispensable dar á conocer las propiedades generales de las sombras, primero que manifestemos el papel que hacen en la perspectiva, declararemos aquí lo que nos hace al caso acerca de las sombras en general.

De las Propiedades generales de la Sombra.

770 La *Sombra* es la privacion de la luz por causa de la interposicion de un cuerpo opaco. No se puede decir que vemos la sombra, porque sin luz nada se vé. Quando decimos que vemos una sombra, queremos dar á entender que vemos un espacio falto de la luz directa que le bañaba antes que se interpusiese el cuerpo opaco, pero alumbrado de la luz que reflecten los cuerpos inmediatos, ó que vemos los confines, ó linderos de la luz.

771 La sombra que arroja un cuerpo opaco siempre está en la direccion de los rayos de luz que le hieren, ó coge ácia el lado opuesto á la luz; por manera que si muda de lugar el cuerpo luminoso ó el cuerpo opaco, tambien muda de lugar la sombra.

772 Todo cuerpo opaco arroja constantemente tantas sombras diferentes quantos son los cuerpos luminosos que le alumbran; por consiguiente con multiplicar en el mismo lado del cuerpo opaco los cuerpos luminosos, que le alumbran, tambien se multiplican las sombras.

773 Quanto mas luz arroja el cuerpo luminoso, tanto mas densa parece la sombra; porque la luz debe parecer mas densa quando es mayor la copia de luz que alumbra los

los cuerpos inmediatos, que quando es menor. Se mide, pues, la densidad de la sombra con los grados de luz de que está privado un espacio qualquiera. Fig.

774 Si una esfera luminosa fuere igual con una esfera opaca que alumbra, la sombra que la última arrojare será cilíndrica; si la esfera luminosa fuere mayor que la opaca, la sombra formará un cono; si fuere menor, la sombra tendrá la forma de un cono truncado. Tambien reparará el que verificare estas proposiciones con esperimentos, que el arco que mide la porcion iluminante de la esfera luminosa, y el arco que mide la porcion alumbrada de la esfera opaca, son suplementos uno de otro.

775 Si quisiésemos determinar la longitud *QH* del 124.
ege del cono de la sombra que arroja una esfera opaca alumbrada de una esfera luminosa mayor que ella, dados los diámetros *IM*, *CG* de las dos esferas, y la distancia *GM* entre sus centros, practicaríamos lo siguiente.

Tiraríamos *FM* paralela á *CH*, y diríamos: FG, *diferencia de los semidiámetros de las dos esferas, es á la distancia* GM *de sus centros, como* CF ó IM, *semidiámetro de la esfera ópaca, es á* MH *distancia del vértice del cono umbroso al centro de la misma esfera.* Si la razon entre *PH* y *MH* fuese estremadamente pequeña, de modo que sea corta la diferencia entre *MH* y *PH*, se podrá tomar *MH* por el ege del cono umbroso; si no, de *MH* se restará *PM* que determinaremos como sigue. Buscaremos el ángulo *LMK* (I.669) por medio del triángulo *FGM* rectángulo en *F*,

en

Fig. en el qual conocemos *GM* y *FG*; con restar despues este
124. ángulo de 90°, sacaremos el ángulo *IMP*; hecho esto, será facil de determinar *MP* por medio del rectángulo *IPM*.

776 Lo que acabamos de decir podría servir para determinar quanto coge de largo la sombra de la tierra. Supongamos el semidiámetro *MI* de la tierra = 1, el semidiámetro *CG* del Sol = 153, y la distancia *GM* del Sol á la tierra = 34376 semidiámetros terrestres; sacaremos que la longitud *MH* de la sombra de la tierra, contando desde el centro, viene á ser de unos 225 semidiámetros.

777 Como es constante la razon entre la distancia *GM* del cuerpo luminoso y del cuerpo opaco, y la longitud *MH* de la sombra, por ser esta razon igual á la que hay entre la diferencia de los semidiámetros de los dos cuerpos, y el semidiámetro del cuerpo opaco, síguese patentemente que si menguare la distancia, tambien menguará la longitud de la sombra; por consiguiente si el cuerpo opaco se acercare al cuerpo luminoso, la sombra menguará.

125. 778 Si por los estremos *S* y *T* de un cuerpo opaco se tiran paralelas *TV* y *SQ*, el ángulo *TVS* que el rayo que pasa por el vértice *S* y termina la sombra en *V*, forma con *TV*, se llama *la altura del cuerpo luminoso.* Lo mismo se practíca aunque la recta *ST* tirada desde el un estremo del cuerpo opaco al otro sea perpendicular ó inclinada en un ángulo qualquiera á la recta *TV* tirada desde

un

un estremo *T* del obgeto al estremo *V* de la sombra. Fig.

779 En conociendo dos de estas tres cosas, es á 125.
saber, la altura del cuerpo luminoso, pongo por caso la altura del Sol respecto del orizonte, ó por mejor decir la de su limbo superior, la altura *TS* del cuerpo opaco, y la longitud *TV* de la sombra que este cuerpo arroja en un plano orizontal, siempre es facil de determinar la tercera. Todo está en resolver el triángulo rectángulo *STV*.

780 Manifiesta este triángulo que si la altura del cuerpo luminoso, del Sol pongo por caso, fuese de 45°, la longitud *TV* de la sombra será igual á la del cuerpo opaco.

781 Las longitudes *TZ*, *TV* de las sombras que un mismo cuerpo opaco *TS* arroja en un plano orizontal, con diferentes alturas del cuerpo luminoso, son como las cotangentes de estas alturas, ó si el cuerpo luminoso no fuere un punto, y tuviere alguna estension, como las cotangentes de las alturas de su borde superior. Por consiguiente como la cotangente de un ángulo mengua (I. 644) al paso que el ángulo crece, síguese que al paso que el cuerpo luminoso se levanta, la sombra mengua.

782 La sombra que un cuerpo opaco cuya situacion es vertical arroja en un plano orizontal, se llama *sombra recta*; y llamamos *sombra versa* la que arroja un cuerpo opaco en un plano vertical al qual dicho cuerpo es perpendicular.

783 Pero es evidente 1°. que la sombra recta *BE* es

Fig. 126. es á la altura del cuerpo opaco *BD*, como el coseno *EF* de la altura del cuerpo luminoso es al seno *FG* de la misma altura.

784 2°. Que siendo la misma la altura del cuerpo luminoso, la longitud del cuerpo opaco *AC* es á la sombra versa *AD* del mismo cuerpo, como la sombra recta *EB* es á la altura ó longitud del cuerpo opaco *DB*, y por consiguiente como el coseno de la altura del cuerpo luminoso es al seno de la misma altura.

785 3°. Que si los dos cuerpos opacos fuesen igualmente largos, *DB* será media proporcional entre *EB* y *AD*; quiero decir, que la longitud de un cuerpo opaco qualquiera es media proporcional entre su sombra recta y su sombra versa, siendo una misma la altura del cuerpo luminoso.

786 Tambien se echa de ver que quando el cuerpo luminoso está á la altura de 45°, la sombra versa es igual al cuerpo opaco.

787 4°. Que la sombra recta es á la sombra versa de un mismo cuerpo opaco, manteniéndose el cuerpo luminoso á una misma altura, como el quadrado del coseno de la altura del cuerpo luminoso es al quadrado del seno de la misma altura.

788 A no ser que el cuerpo luminoso sea un punto, la sombra no queda terminada de repente por el espacio iluminado, que está en su alrededor; se repara constantemente en sus límites una sombra debil que mengua

gua insensiblemente hasta desaparecerse. Fig.

789 Es facil de dar la esplicacion de este fenómeno. 127.
Sea *AB* un cuerpo luminoso, el Sol por egemplo; *ED*, un obgeto puesto en el suelo *DI*, y tírense los rayos *BF*, *CG*, *AH*. Es patente que si suponemos un ojo que camine desde *H* hasta *F*, irá perdiendo de vista poco á poco el disco del Sol, y que por lo mismo verá con tanta menos claridad quanto mas se fuere acercando al término *F* de la sombra, y llegado allí ya no le hiere ninguna luz directa. Luego la iluminación de las partes del espacio *HF* mengua tanto mas quanto estas partes están mas inmediatas á *F* donde cesa del todo la iluminacion.

790 Esta sombra debil que termina la sombra se llama *Penombra* (VII. 1188), y es patente que coge tanto mayor espacio, quanto es mayor el cuerpo luminoso, quanto mas lejos está el cuerpo opaco del plano en que da la sombra, y quanto mas oblicuamente la sombra dá en este plano. Porque en el triángulo *FEH*, el lado *FH* que mide la penombra, es tanto mayor que el ángulo opuesto *FEH* que mide el diámetro aparente del cuerpo luminoso, quanto mayor es la distancia *ED* del estremo *E* del cuerpo al plano *DI* donde dá la sombra, y quanto mas agudo es el ángulo *EHF* ó *EFD*.

791 La sombra verdadera de un cilindro puesto al Sol en una situacion vertical, en vez de llegar á 110 diámetros del cilindro, conforme resulta de lo dicho (776), no coge sino un espacio de 41 diámetros, quedándose uni-

Fig. uniforme é igualmente densa. Esta distancia es mayor quan-
127. do el Sol es mas luminoso. Pasados los 41 diámetros de distancia, el medio de la sombra no es mas que una penombra, y solo quedan de la sombra total dos rasgos negros muy angostos, que terminan dicha penombra en toda su longitud. Estos dos rasgos son igualmente densos que la sombra verdadera. El espacio que ocupa la penombra es cabalmente el mismo que la sombra debía ocupar, y lo manifiesta su ancho que es el mismo que el de la sombra. El ancho de la espresada falsa penombra que limitan los dos rasgos negros va menguando sin cesar, del mismo modo que la sombra verdadera, y al paso que se va angostando se pone mas clara, siendo así que los rasgos negros guardan su densidad y el mismo ancho, hasta que finalmente á la distancia de unos 110 diámetros, los rasgos negros que se fueron arrimando sin discontinuar se confunden en uno solo; y despues la sombra verdadera desaparece totalmente, y no se vé mas que la verdadera penombra. Por lo que mira á la verdadera penombra, ocupa su verdadero lugar en cada lado de los dos rasgos negros, y es cabalmente la misma que si la sombra verdadera tuviese todo su ancho y toda su longitud.

792 Es tambien muy digno de notar que quando la sombra dá muy cerca del cilindro, antes que degenere en falsa penombra, la verdadera penombra se vé limitada en la parte esterior por dos rasgos de una luz mas viva que la que viene en derechura del Sol. Estos rasgos se ensan-

sanchan y debilitan al alejarse del cilindro. Fig.

793 Si se hace el esperimento con globos, se verán las mismas apariencias, sin mas diferencia que la de la forma. Pero la sombra verdadera degenera mucho mas presto en falsa penombra que la del cilindro. La falsa penombra empieza á manifestarse á la distancia de unos 15 ó 16 diámetros del globo; se la vé en forma de un círculo terminado por un anillo circular negro y angosto al qual está contiguo otro anillo que forma la verdadera penombra, y mas allá de este se vé otro de una luz mas viva que la luz directa. Tenemos por escusado advertir que mengua el ancho del círculo de la falsa penombra, igualmente que el del anillo negro que le termina al apartarse del globo, y que por último desaparecen á la distancia de 110 diámetros, donde no queda mas que la verdadera penombra.

Propiedades de las sombras que se consideran en la Perspectiva.

794 *Las sombras del Sol naciente ó poniente son infinitas en los planos orizontales; ó en general, siempre que el Sol ó un obgeto luminoso está en el plano donde están colocados obgetos elevados, las sombras de estos obgetos se prolongan indefinitamente en el plano.*

Porque como las longitudes de las sombras son (781) como las cotangentes de las alturas del cuerpo luminoso respecto del plano alumbrado, quando la altura es nula, esto es, quan-

Fig. quando el cuerpo luminoso está en el plano que alumbra, la cotangente de dicha altura es infinita (I.644).

795 *Las sombras solares son* (786) *de igual longitud que los obgetos alumbrados, quando el Sol está á 45° de altura. No son sino su mitad, su tercio &c. segun el Sol está á 63° 26′, á 71° 34′, á 75° 58′ &c. de altura. Son duplas, triplas, quadruplas &c. quando el Sol está á 26° 34′, á 18° 26′, á 14° 2′ &c. de altura.* Todo esto lo hacen patente las tablas de las tangentes.

796 *La sombra de una recta original proyectada en un plano qualquiera es tambien una recta.*

Porque el punto luminoso es el vértice, y los dos rayos que pasan por los estremos de la recta original son los lados de un triángulo cuya base es la misma recta original. La sombra de esta linea es la prolongacion del plano de dicho triángulo mas allá de su base; luego la interseccion de este plano de sombra con otro plano que dé con él, ha de ser una linea recta (I.536), y esta interseccion es la sombra de la recta original proyectada en el plano.

797 Por consiguiente *dados en un plano dos puntos por donde ha de pasar la sombra de una recta, es dada la direccion de la misma sombra*; y recíprocamente, *para determinar la direccion de la sombra de una recta en un plano, basta determinar en el plano dos puntos de sombra.*

798 *La sombra de un obgeto alumbrado de un punto luminoso es un segmento ó trozo de pirámide, cuya parte trun-*

truncada tiene su vértice en el punto luminoso, y la base es la superficie alumbrada del obgeto. Este segmento coge indefinitamente á la parte opuesta al punto luminoso, basta que le ataja alguna superficie que le intercepta; y la porcion de dicha superficie que el segmento coge, es la sombra del obgeto alumbrado. Fig.

Pensamos que no necesita de prueba esta proposicion.

799 Por consiguiente 1.° *La sombra de un cuerpo alumbrado de un cuerpo luminoso inmediato, coge tanto mas espacio en la superficie donde dá, quanto mas cerca del obgeto está el punto luminoso, y quanto mas lejos está del mismo punto dicha superficie.*

800 2.° *La sombra de un cuerpo alumbrado de un obgeto luminoso infinitamente remoto, qual es el Sol ó la Luna, es un prisma que coge indefinitamente desde el obgeto alumbrado que es la una de las bases, basta que le intercepte otra superficie cuya porcion en que dá la sombra es la otra base. Porque entonces los rayos luminosos son paralelos entre sí.*

801 3.° *Prescindiendo de la penombra, las sombras solares son paralelas é iguales con las lineas rectas originales, quando dan en un plano paralelo á las mismas rectas.*

Porque los dos rayos que pasan por cada estremo de una de dichas rectas son paralelos entre sí; forman, pues, un paralelogramo con la linea y su sombra. Por donde se echa de ver 1.° *que las sombras solares de un obgeto tienen el mismo ancho que las dimensiones del obgeto que están directamente de cara al sol.* 2.° *Que las perspectivas*

Fig. *de las sombras paralelas á las rectas originales, deben dirigirse (661) á los mismos puntos accidentales que las perspectivas de las lineas cuyas sombras son.*

802 4.° El contorno de una sombra que dá en una superficie es una perspectiva, en la qual el punto luminoso ocupa el lugar del ojo, el contorno de la superficie alumbrada es el obgeto original, y la superficie que intercepta la sombra es el quadro.

803 *La direccion de la sombra de una recta vertical que dá en un plano qualquiera es tal, que se encamina al punto donde encontraría dicho plano la vertical ó plomada que pasa por el punto luminoso.*

128. Sea *L* un obgeto luminoso; *P* ó *p*, el punto donde su
129. plomada encuentra un plano qualquiera (inclinado, ó á nivel, mas alto ó mas bajo que el punto luminoso), en el qual están colocadas lineas verticales *AB* ó *CD*. Hemos de probar que su sombra *FB*, *ED* se dirige al punto *P* ó *p*. Porque como *AB* ó *CD* son rectas verticales, los triángulos umbrosos *FAB*, *EDC* están en situacion vertical, y sus planos prolongados ván á dar en el punto *L*; luego estos planos se cortan en la vertical *LP*; luego los lados *FB*, *ED* prolongados ván á dar en el punto *P* ó *p*.

804 Luego 1.° *Si la luz* L *fuese el Sol ó la Luna, la perspectiva de su punto vertical* P *en el suelo, estaría en la linea orizontal.* Porque la perpendicular tirada desde el Sol al plano del orizonte, no le podría encontrar sino á una distancia infinita del quadro.

2.°

805 2.° *Muchas luces que alumbran una misma vertical, engendran otras tantas sombras, dirigiéndose cada una de ellas al punto donde corresponde la plomada de cada luz, en la superficie donde dá la sombra.* Fig.

De las Sombras Solares ó Lunares, quando el Sol está en el plano del quadro.

806 I. *Quando el Sol está en el plano del quadro, y al mismo tiempo en el orizonte*; es lo mismo que si le supusiésemos naciente ó poniente, todas las sombras de los obgetos que están en el suelo son débiles, por ser debil la luz del Sol quando está en el orizonte, y son infinitás (794). Luego sus perspectivas se estienden indefinita y paralelamente á la linea orizontal, y si dan en alguna superficie elevada, se tuercen ácia arriba, hasta una altura igual á la del obgeto original. La figura 130 lo dá muy bien á entender.

807 II. *Quando el Sol está elevado un número determinado de grados*; se han de tirar las direcciones de las sombras *ab* desde el pie *a* de los obgetos paralelamente á la 131.
linea orizontal; y en el vértice *c* de cada obgeto se hará con la linea vertical *ca* un ángulo *acb*, igual al complemento de la altura dada del Sol, á fin de que el ángulo *abc* sea igual con esta altura, y la sombra remate en *b*; á no ser que lo estorve algun obstáculo, qual sería el sólido *A* ó la pared *bm*. En este caso, llegada la sombra á *d*, sube perpendicularmente ácia la parte superior de dicha superfi-

Fig. cie desde *d* á *e*. Porque como el plano del triángulo um-
131. broso *cab* es perpendicular al suelo, no puede menos de cortar la espresada superficie perpendicular al suelo, en la direccion de una recta tambien perpendicular al terreno. Despues la sombra camina desde *e* á *f* paralelamente á la linea orizontal; despues vuelve á parecer en el suelo en *gi* siguiendo su primera direccion. Como encuentra en *i* la pared *hm*, sube perpendicularmente por esta pared hasta encontrar la recta *cb* donde remata en *k*.

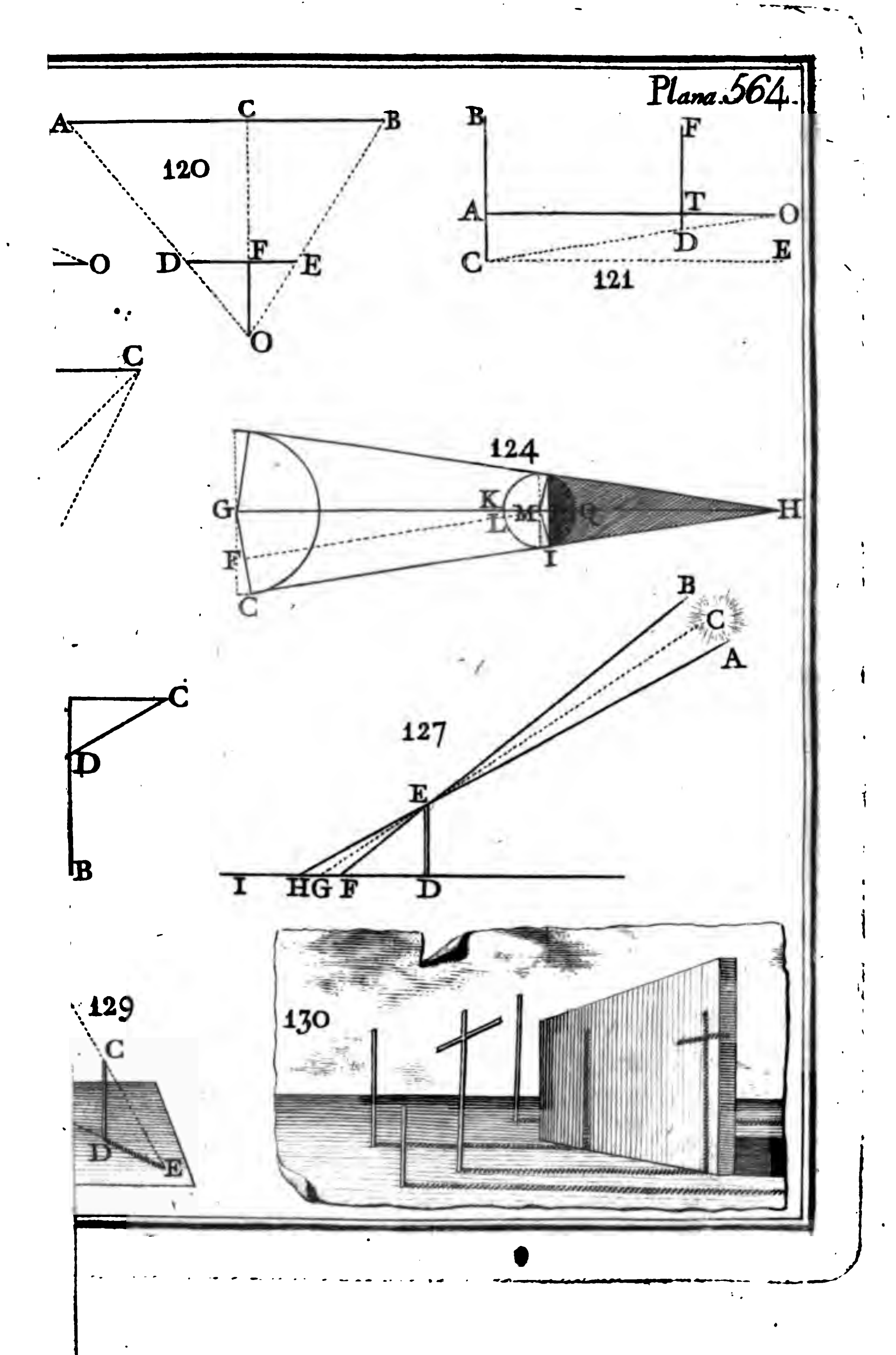
Por lo que mira á la sombra del sólido *A*, se ha determinado del mismo modo que se hubiera determinado la de *ac* si no hubiese encontrado obstáculo ninguno.

808 Quando la altura del Sol es arbitraria, se puede suponer en lugar de sus grados de altura cierta razon entre la altura de cada cuerpo, y la longitud de su sombra.

De las Sombras Solares ó Lunares, quando el Sol está detrás del quadro.

809 I. *Si el Sol estuviere en el orizonte*, ó fuere naciente ó poniente, será menester indagar (ó si fuese arbitrario, se determinará como se quiera) quanto el plano vertical que pasa por el ojo y el Sol, declina respecto del plano vertical del quadro; esto es, porqué grado de la division de la linea orizontal, ha de pasar el plano vertical donde está el Sol. (A este punto se le puede llamar el *Acimut del Sol*). Despues de señalado este punto en la linea orizontal prolongada si fuere menester, se podrá dibujar en

él,



A
C
B
120
O
D
F
E
O
B
F
A
T
O
D
C
E
121
C
124
G
K
M
L
H
F
I
C
B
C
A
C
127
D
E
B
I
HG
F
D
129
C
D
E
130

él, si se tuviere por conveniente, la mitad del disco del Sol mas arriba de la linea orizontal, tomando en las divisiones de esta linea 24 ó 25 minutos á derecha é izquierda de dicho punto, porque el Sol quando nace parece mayor que quando está elevado sobre el orizonte. Fig.

810 El punto de la linea orizontal donde está el centro del Sol, es el punto accidental de todas las sombras de las lineas verticales (803). Estas sombras son débiles, y se propagan al infinito acercándose al borde inferior del quadro, á no ser que dén con algun plano vertical ó inclinado, qual sería una pared ú otro cuerpo.

811 Supongamos que el acimut del Sol poniente sea 132.
de 40.° La sombra del cuerpo *A* la terminan dos rectas dirigidas al punto de 40° de la linea orizontal, y cogen indefinitamente ácia el lado opuesto. A la sombra del cilindro *B* tambien la terminan dos rectas que se dirigen á 40°; pero como encuentra un obstáculo en forma de tarima, sube perpendicularmente á *ei*, se propaga despues en *io* en el espacio á nivel, encaminándose siempre á 40°, sube perpendicularmente por *ot*; despues, caminando ácia 40°, se propaga en *tu*; finalmente sube por *ur*, donde remata en *r*, porque la altura *rn* respecto del plano del suelo es perspectivamente igual con la altura del cilindro.

812 II. *Si el Sol estuviere elevado sobre el orizonte*, se deberá señalar igualmente en las divisiones de la linea orizontal, el punto del acimut del Sol, que será el punto accidental de todas las sombras de las lineas verticales. He-

Fig. cho esto, si la altura del Sol fuese determinada, se calculará (ó si fuese arbitraria, se supondrá) la razon entre la longitud de las sombras y la altura de los obgetos, cuya razon es la misma (794) que hay entre el seno total y la cotangente de la altura del Sol. Como si el Sol estuviese á 20° de altura, y declinára 40° á la izquierda del plano vertical, saco que la cotangente de 20° es 2,75, esto quiere decir que en estos supuestos la sombra es $2\frac{3}{4}$ veces mas larga en los planos á nivel de lo que coge la altu-
133. ra del obgeto. Sea, pues, *ac* un obgeto vertical; por su pie *a* tiraremos una recta *ab* dirigida al punto *z* de 40.° Haremos (688) *ab* perspectivamente igual á $2\frac{3}{4}$ veces el obgeto *ac*; y si no hubiese obstáculo alguno, la sombra sería *ab*. Pero como tropieza con un prisma *pk*, la sombra vá desde *a* á *o*, al pie del prisma, sube perpendicularmente desde *o* á *e*, se propaga en la base superior desde *e* á *i*, encaminándose á 40°, finalmente vá á parar desde *f* á *b* mas allá de la sombra del prisma siguiendo su primera direccion.

813 La figura está manifestando que la sombra de este prisma se ha trazado con tirar indefinitamente *pg*, *qn*, *rm* dirigidas á 40°, y con hacer una de las tres, como *qn*, perspectivamente igual á $2\frac{3}{4}$ veces la altura *qt* del prisma; despues con tirar *mn* al punto de vista *s*, porque (801) el lado *kt* se dirige á dicho punto; y *ng* paralela á la linea orizontal, por ser paralela con ella la linea *td*.

814 Si se puede colocar el Sol en el quadro prolonga-

gado si fuere menester, como en *M*, entonces para deter- Fig.
minar el término *b* de la sombra del cuerpo *ac*, bastará 133.
con plantar una regla en los puntos *M*, *c*, y el término que se busca estará en el punto *b* donde la regla cortará la *zb* tirada desde el pie del obgeto ácia los 40.°

815 Es sumamente acomodado este método quando está á la disposicion del dibujante colocar el Sol donde quiera; pero si fuese preciso colocarle á una altura determinada, sería indispensable hallar el valor de *Mz* por el método declarado (706 y sig.).

De las Sombras solares, quando el Sol está detrás del espectador.

816 Todas las sombras se pueden determinar en este caso del mismo modo que en lo dicho poco ha (809 y sig.), con figurarnos que el Sol está en un punto del cielo debajo del orizonte diametralmente opuesto al punto donde está en realidad mas arriba del mismo orizonte. El grado de acimut del Sol se señala en la linea orizontal del lado opuesto al lado donde está realmente el Sol respecto del plano vertical. Despues se calcula, si es menester, ó se supone si hay arbitrio, la razon entre la longitud de las sombras y la altura de los obgetos; se determina perspectivamente la longitud de estas sombras, teniendo presente que siempre deben ir desde el pie de los obgetos ácia el punto de acimut.

817 Tambien se puede colocar el lugar del Sol en

Fig. el quadro, ó á arbitrio, ó geométricamente si fuere necesario, para terminar las sombras. Supongamos, por egemplo, que esté el Sol á la izquierda y detrás del espectador declinando 40° del plano vertical, y elevado 20° sobre el orizonte, y que se nos proponga trazar la sombra del
134. plano vertical *ac*. Desde el pie *a* del obgeto tiro ácia el punto *z*, que está á 40° de la linea vertical á mano derecha, la direccion *az* de la sombra. En la *zM* perpendicular á *Sz* coloco el lugar *M* opuesto al del Sol, de modo que *zM* sea la perspectiva de un arco celeste vertical de 20.° Tiro *Mc* que determina el término de la sombra en *b*.

818 Porque la sombra solar de un punto qualquiera que no fuese interceptada, iría á parar á un punto del cielo opuesto al punto donde está el Sol; luego el punto del cielo opuesto al lugar donde está el Sol, el punto donde es interceptada la sombra, y el punto que arroja esta sombra están en una misma linea recta.

De las Sombras originadas de una luz inmediata á los obgetos, qual es la de una bugía, vela, velon &c.

819 I. *Quando la luz está detrás del plano del quadro.*

Para trazar con facilidad las sombras, se debe dibujar en el quadro, prolongado si fuere menester, la perspectiva de la luz, y la del punto del suelo donde corresponde su vertical, á este punto le llamaremos el *Pie del obgeto luminoso.* Porque es un punto accidental adonde se dirigen todas

las

las sombras de esta luz; se hallan y terminan por el método declarado antes (809 y sig.); pero prevenimos que si la luz estuviera mas baja que el obgeto, la sombra se estamparía en el techo, dirigiéndose al punto donde le encontraría la vertical de la luz. Fig.

820 II. *Quando la luz está en el plano del quadro.*

Se dibujará la perspectiva de la luz y la de su pie, cuya operacion es facil; porque siendo nula su distancia al plano del quadro, la distancia de la luz á los planos vertical y orizontal es la misma que la distancia de su punto de perspectiva á la linea vertical y á la linea orizontal. La perspectiva del pie de la luz está en el borde inferior del quadro, y las sombras se determinan como antes.

821 III. *Quando la luz está entre el quadro y el ojo.*

Sirven tambien para este caso los mismos métodos, trazando en el quadro la perspectiva del punto luminoso, y de su pie. Con esta mira se substituirá en las dos analogías de la resolucion general (649), *como el rayo principal* (en lugar de *mas*) *la distancia del punto luminoso al quadro &c.*

Porque si consideramos el plano *ASDI* como el plano 135.
del quadro, de modo que *SA* sea la linea vertical, *AI* la linea orizontal, y tomamos el plano *asdi* por el plano paralelo al plano del quadro, en cuyo punto *d* está la luz, es evidente que entonces *AO* es el rayo principal; *Aa*, la distancia de la luz al quadro; *as* ó *id* su distancia al plano orizontal; *ai* ó *sd*, su distancia al plano vertical, y que te-

Fig. 135. tenemos *Oa* ú *OA* — *Aa* : *OA* :: *ai* ó *sd* : *AI* ó *SD* :: *as* ó *id* : *AS* ó *ID*. Acerca de esto prevenimos que la luz no debe estar ni muy alta, ni lejos del plano vertical, ni muy arrimada al plano paralelo al plano del quadro, que pasaría por el ojo. Porque entonces los puntos de perspectiva caerian mucho mas allá de los bordes del quadro; y la perspectiva del pie de la luz cae forzosamente debajo del borde inferior del quadro.

822 Como en este caso la luz hace bastante buena vista en el quadro, si se puede colocar la luz á arbitrio, se la deberá suponer á una distancia de los planos orizontal y vertical, tal que su perspectiva caiga ácia uno de los lados del quadro algo fuera, y algo mas arriba de la linea orizontal.

823 IV. *Quando la luz está detrás del espectador.*

Aunque en estas circunstancias se logra ver con mucha distincion los obgetos poco distantes, es sumamente dificil el determinar las sombras; porque no se puede trazar en el quadro ni la perspectiva del punto luminoso ni la de su pie, y por consiguiente no puede haber punto accidental adonde concurran las direcciones de las sombras. Por esta razon es un caso de que se ha de huir todo lo posible; si damos aquí reglas para hallar las sombras, no llevamos mas fin que el de completar el asunto.

824 Es menester, pues, 1.° calcular la distancia desde el punto de vista al punto de la linea orizontal, ácia el qual se ha de encaminar la sombra de cada uno de los ob-

obgetos verticales. Y así, si los puntos iluminado y luminoso están á un mismo lado respecto del plano vertical, se dirá: *Como la suma de las distancias desde los puntos iluminado y luminoso al plano del quadro, es á la diferencia de sus distancias al plano vertical; así el rayo principal es á la distancia que se busca*, y se ha de señalar en la linea orizontal ácia el mismo lado que el punto iluminado, quando la distancia al plano vertical fuere mayor que la del punto luminoso, y ácia el lado opuesto si fuere menor. Fig.

825 De aquí se colige que si los puntos iluminado y luminoso están á una misma distancia y á un mismo lado del plano vertical, la sombra se dirige al punto de vista.

826 Pero quando el punto iluminado estuviere al lado opuesto del punto luminoso, se ha de decir: *Así como la suma de sus distancias al quadro, es á la suma de sus distancias al plano vertical; así el rayo principal es á la distancia entre el punto de vista y el punto de la linea orizontal al qual se dirige la sombra*, y en este caso dicho punto se toma siempre del mismo lado que el punto iluminado.

827 Este cálculo es puntualmente el mismo que el de 136.
la inclinacion de la base del triángulo umbroso respecto del plano vertical. Sea *L* el pie del punto luminoso en el suelo; *GE*, el plano vertical; *IK*, el plano del quadro; *B*, el punto del suelo adonde corresponde el plomo del punto iluminado. Despues de tiradas *LD* paralela al plano vertical, y *LB*, se echa de ver que la *LB* es la direccion de la sombra en el suelo, y está inclinada al plano vertical lo

que

Fig. que coge el ángulo *DLB*. Pero es constante que el trián-
136. gulo *DLB* dá *DL* ó *DF* + *FL* : *BD* ó *EL* — *GB* :: *R*: tang *DLB*; y por ser (668) las divisiones de la linea orizontal tangentes cuyo radio es el rayo principal, *DF* + *FL* : *EL* — *GB*, como el rayo principal es á la distancia entre el punto de vista y el punto de la linea orizontal adonde la sombra se debe dirigir. Como *B* está mas inmediato que *L* al plano vertical, la inclinacion de *LB* encamina esta direccion ácia el lado del plano vertical opuesto á aquel en donde está el punto iluminado. Si aplicamos, como es facil, lo que acabamos de decir á los puntos iluminados *A* y *C*, se demostrarán los demás casos.

828 2.° Se calculará la estension que ha de ocupar la sombra en el suelo, contándola desde el pie del obgeto, para ponerla en perspectiva. Se egecutará de este modo: Trasládese á la linea vertical, de qualquier lado que sea, desde el punto de vista la distancia que se sacó por el cálculo antecedente. Mídase la distancia entre el punto de 45° de la linea orizontal y el punto de la linea vertical adonde cae la distancia referida, y se dirá: *El producto del rayo principal por la diferencia de las alturas de los puntos iluminado y luminoso respecto del suelo, es al producto de la distancia recien hallada por la suma de las distancias entre los puntos iluminado y luminoso, y el plano del quadro, como la altura del punto iluminado respecto del suelo es á la distancia del punto de sombra respecto del suelo contada desde el pie de dicho obgeto.*

En

829 En esta proporcion se supone que el punto luminoso está mas alto que el obgeto; pero si estuviera mas bajo, se sacaría por ella la distancia del punto de sombra en el techo, contándola desde el punto en que el plomo del punto iluminado encontraría el techo. Fig.

830 Demostraremos esta proporcion si consideramos que llevando sobre la linea vertical una recta igual á la tangente de la inclinacion de la linea LB, y desde el estremo de esta otra recta al punto de $45°$, el triángulo rectángulo que de aquí resultará, será semejante al triángulo BLD. Tendremos, pues, el rayo principal (que llamaremos r) es á la hypotenusa de dicho primer triángulo (llamarémosla d), como LD ó $FL + FD$ es á BL. Luego $BL = \frac{(LF+FD)\times d}{r}$.

831 Supongamos ahora que sea LN el suelo; LH, la altura del punto luminoso H; BM, la del punto iluminado M; tirando MO paralela á LN, la diferencia de las alturas del punto iluminado y del punto luminoso será HO; tirando HM hasta N, BN será la distancia que hay desde el punto de sombra N al pie B del obgeto iluminado. Pero los triángulos semejantes HOM, MBN dán $MB : BN ::$ HO ó $HL - MB : OM$ ó BL; luego $BL = \frac{(HL-MB)\times BN}{MB}$. Igualando estos dos valores de BL, sacaremos esta proporcion $r(HL - MB) : d \times (LF + FD) :: MB : BN$, que nos tocaba demostrar. 137.

Si suponemos trastornada la figura de suerte que LN represente un cielo raso, y H un punto luminoso mas bajo

que

Fig. 137. que el punto iluminado *M*, sacaremos el mismo punto de sombra *N*, y por consiguiente servirá el mismo cálculo.

832 Es de advertir 1.° que quando un obgeto se halla alumbrado de muchas luces inmediatas puestas respecto de él en distintos parages, se ha de buscar la sombra de cada una en particular como si no hubiera mas que ella. Parte de todas estas sombras se confunde al pie del obgeto, y su union forma una sombra tanto mas obscura quantas mas sombras hay; luego despues cada sombra se vá perdiendo conforme se separa de las demás, se desvía del pie del obgeto iluminado, y conforme tambien á la mayor fuerza con que otra luz alumbra el suelo por donde se estiende dicha sombra. Como se distinguirán con facilidad todos estos efectos, si se observan las sombras de un cuerpo alumbrado por varias bugías distintamente colocadas, no nos detendremos en individualizarlos mas.

833 2.° Quando dos sombras tenues y casi insensibles se llegan á cruzar, todo el espacio en que se interceptan es de una sombra bastante fuerte, y lo sería mucho mas si concurrieran muchas mas sombras.

Resuélvense varias cuestiones acerca de las sombras.

834 Cuestion I. *Determinar la sombra pura de un obgeto con separacion de su penombra.*

138. Despues de puesto en perspectiva el cuerpo luminoso *ED* por todas sus dimensiones, se determinará (814) la sombra central *AG* del vértice de uno de los bordes del

del obgeto. Se buscarán del mismo modo los estremos *F*, *H* Fig.
de las sombras de los bordes superiores é inferiores del 138.
cuerpo luminoso. Asimismo se buscarán los estremos *f*, *g*, *h* del otro lado ó cara del obgeto, se tirará *Ff*, y en esta linea se tomarán dos puntos *I*, *i*, tales que *FI* sea en perspectiva igual con *FG*, y *fi* con *fg*. Tirando las *AI*, *ai*, el trapecio *AaiI* será lo que coge la sombra pura, y *AahH* todo lo que se estiende la penombra.

835 Si el cuerpo luminoso no fuera redondo, como sería la llama de una luz, cuyo ancho fuese á su alto como *p* es á *q*, se debería hacer *FI* á *FG*, y *fi* á *fg* como *p* es á *q*.

836 Cuestion II. *Determinar la sombra de una recta* AB *inclinada al suelo, dada su posicion y su magnitud.*

Se calculará por trigonometría, ó se determinará gráfi- 139.
camente la posicion del punto *D*, que en el suelo corresponde perpendicularmente debajo del punto *B*, respecto del plano vertical y del plano del quadro. Se tirará *BD*, y se buscará (819) su sombra *DE*. Por el punto *A* se tirará *AE*, y esta será la sombra de *AB*. Es claro que si se interpusiera un plano vertical *FG*, la sombra sería *AIK*, por ser *K* el estremo de la sombra del plomo *BD*.

837 Se sacará por trigonometría la posicion del punto *D* de este modo, considerando que como en el triángulo *BAD* rectángulo en *D* son conocidas *AB*, y su inclinacion *BAD*, se podrá calcular *AD*. Tirando la *AN* paralela al plano vertical, y desde el punto *D* la perpendicular

DN,

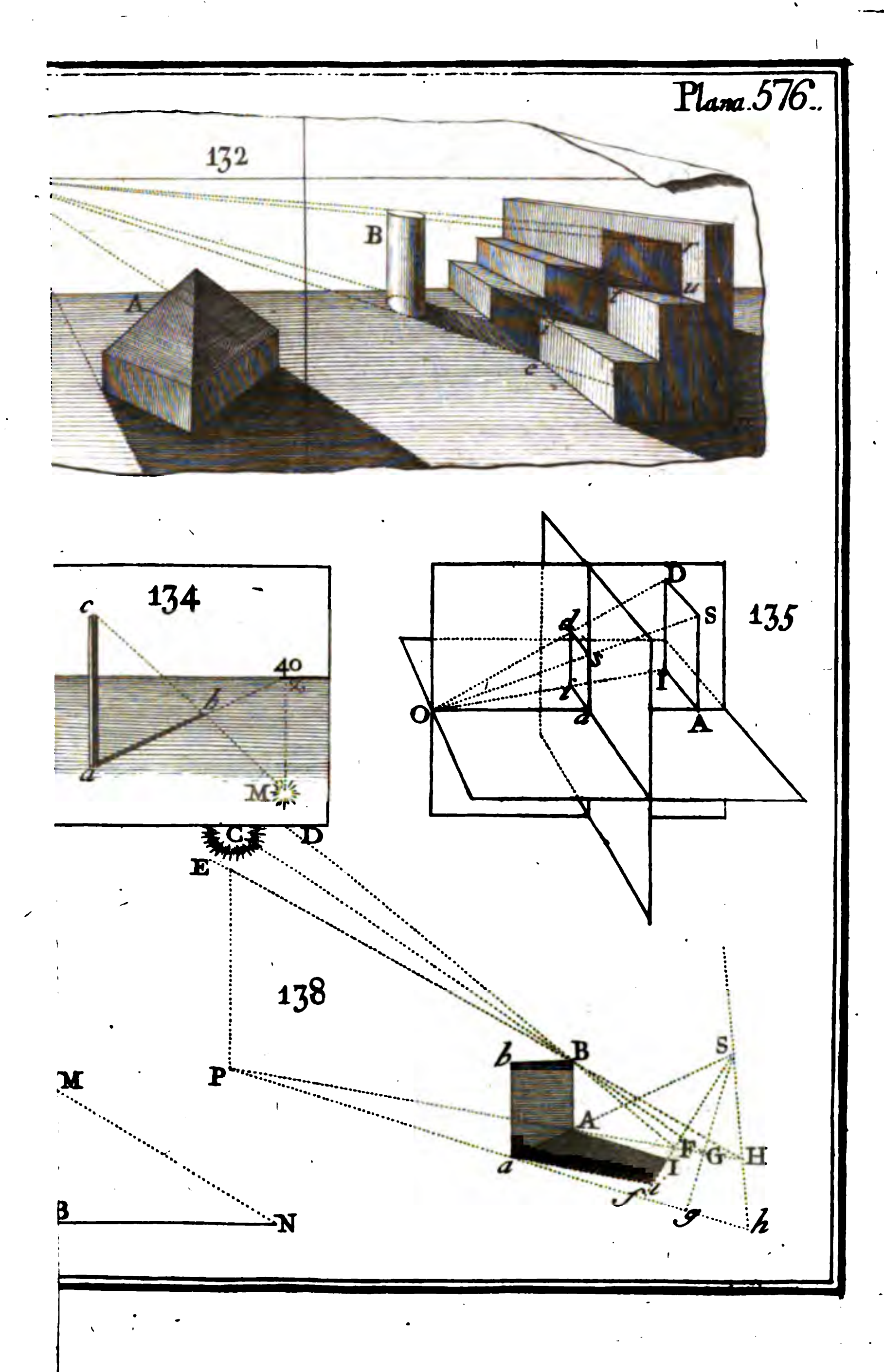
Fig. *DN*, en el triángulo *ADN* se conocerán *AD* por el primer cálculo, y *NAD* por la declinacion dada de la recta *AB* respecto del plano vertical; se podrán, pues, calcular *DN* y *NA* que dán la diferencia de posicion del punto *D* respecto de la del punto *A*.

140. 838 Para hacer gráficamente esta misma operacion, sobre *Ad* que representa una paralela al plano del quadro, se formará el ángulo *dAB* igual á la inclinacion dada de la linea original, haciendo *AB* igual á dicha linea. Se bajará la perpendicular *Bd*; se tirará *AN* perpendicular á *Ad*, que representa una paralela al plano vertical; fórmese sobre ella el ángulo *NAF* igual á la inclinacion dada de la línea original respecto del plano vertical; tómese en *AF* una recta *AD* = *Ad*, tírese *DN* perpendicular á *AN*, y los valores de *DN*, *AN*, que dá la escala, serán las diferencias de posicion del punto *D* respecto de la del punto *A*.

141. 839 Debemos prevenir que si la luz *C* estuviera mas baja que el vértice de la recta inclinada *AB*, por manera
139. que no fuese posible determinar el punto *E* en el suelo, se
141. debería tomar á arbitrio en *AB* un punto *L* mas bajo que la luz *C*, tirar su perpéndiculo *LM*, cuya sombra *MO* se determinaría; desde el punto *A* se tiraría por *O* la recta indefinita *AO* que sería la sombra que se busca, y se estendería al infinito, á no ser que la saliera al encuentro algun plano levantado sobre el suelo.

840 *Resolucion para quando la recta inclinada está yá puesta en perspectiva en el quadro.*

Sea



132
B
A
u
r
c
134
c
40
b
a
M
C
D
E
135
D
S
d
s
I
i
O
a
A
138
b
B
S
M
P
A
F
G
H
a
I
i
f
g
h
B
N

Sea *AB* una recta inclinada puesta yá en perspectiva; se tomarán á arbitrio en dicha linea dos puntos qualesquiera *A*, *D*, desde los quales se bajarán las perpendiculares *AC* y *DE* al terreno; por el pie *P* de la luz *L*, y por los puntos *C*, *E* se tirarán dos rectas indefinitas *PF*, *PG*. Imaginaremos un plano perpendicular al orizonte (bien sea paralelo al plano vertical ó bien al plano del quadro, con tal que no sea demasiado oblicuo respecto de las lineas *PF*, *PG*), cuya interseccion con el terreno sea *FK*; desde los puntos *F* y *G* en donde *PF* y *PG* encuentran á *FK*, se levantarán las perpendiculares indefinitas *FH*, *GI*; por *L* y por *A*, *D* se tirarán las *LAH*, *LDI* que dan en *H*, *I*, en el plano supuesto, los puntos de sombra de los puntos *A*, *D*; se tirará *HI*, y el punto *O* en donde encontrará la interseccion *FK* será uno de los puntos de la direccion de la sombra que se busca en el terreno, cuya direccion será por consiguiente *BOQ*. Fig. 142.

841 Cuestion III. *Determinar qual ha de ser la direccion de la sombra de una linea recta dada inclinada* AB, *quando vá á dar en planos mas altos que la luz.* 143.

Por el pie *P* de la luz *L*, y por el punto *C* en donde remata la perpendicular *BC* al terreno, se tirará una recta *PCM* que encuentre las intersecciones del terreno con los planos perpendiculares de las gradas en los puntos *H*, *I*, *K*, *M*, desde los quales se levantarán las perpendiculares indefinitas *HN*, *IO*, *KQ*, *MR*; por la luz *L* y por *B* se tirará *LR* que dará los puntos de sombra *N*, *O*, *Q*, *R* del vértice *B* en todos los referidos planos. Se determina-

Fig. rá (836) la direccion *Am* de la sombra por el suelo,
143. que corta las intersecciones de los planos de las gradas con el terreno en *b*, *i*, *k*, *m*. Tirando *bN*, *iO*, *kQ*, *mR*, estas serán las direcciones de la sombra inclinada por dichos planos perpendiculares, y por lo mismo será facil trazar la linea de sombra *AbnostuxR*. Delineando despues en los planos perpendiculares de las gradas las sombras de las rectas *ST*, *VX*, *YZ*, se señalará sin dificultad la direccion de la sombra en todos los parages en que es visible.

842 Cuestion IV. *Hallar el punto adonde se han de encaminar las sombras de las lineas verticales, quando dichas sombras se han de propagar en algun plano inclinado.*

144. Se tirará por el pie *P* de la luz *L* (685) una perpendicular á la interseccion del plano inclinado con el terreno; ó en caso de que el plano inclinado *ABC* remate en una recta *BC* mas alta que el piso, por el punto *Q* de la perpendicular *LP* á nivel con *BC*, se la tirará (685) á *BC* la perpendicular *QR*, midiéndola como se dirá luego. Se dirá despues: El radio es á la tangente de la inclinacion del plano respecto del suelo, como *QR* es á *QT*; el punto *T* será el punto accidental de todas las sombras de las lineas verticales que la luz *L* ilumina, porque es el punto donde el plano *ABC* prolongado encuentra el perpendículo *QL* de la luz.

145. 843 Para sacar gráficamente el valor de *QT* se señalará sobre el plano de una figura hecha de intento, el punto *Q* del perpendículo de la luz, que está á nivel del borde

del

del plano inclinado, y una recta *BC* que represente dicho borde, por manera que resulte en el plano una figura exacta de la verdadera situacion del borde y del punto *Q* respecto del plano vertical *FG* y del plano del quadro *GH*. Tírese á *BC* la perpendicular *QR*, y una paralela *QV*, y por *R* la *RS* que forme con *BC* un ángulo *BRS* igual á la inclinacion del plano respecto del terreno, prolongándola hasta que encuentre en *T* la paralela *QV*. Mídase la *QT* en la escala, y póngasela en perspectiva en el quadro. Fig. 145.

844 Por aquí se viene en conocimiento de que una vez determinados los puntos *T*, *t* donde los planos *ABC*, *ACD* cortarían el perpendículo *LT* de la luz *L*, se trazará con facilidad en dichos planos el camino de la sombra *NEFGHIK* de la vertical *MN*; y la figura misma lo está diciendo, 146.

845 *Resolucion para quando sea el Sol.*

Se prolongará el borde *DC* del plano inclinado hasta la linea orizontal en *I*, desde el qual se le tirará al plano inclinado una recta indefinita y arbitraria *IL*, para que haya en dicho plano una recta *KL* paralela al borde inferior *DC*. Se buscará en el suelo (ó si se quiere con mas generalidad, en el plano á nivel en que está *DC*) el punto á plomo *A* de qualquiera de los dos puntos *K* ú *L*. Por *I* y el dicho aplomo se tirará una recta indefinita *IN*, y por el punto *F* del azimut del Sol *S*, y otro punto qualquiera *D* de *DC* se tirará otra recta *FO* que llegue á *IN*. En *O* se levantará la perpendicular *OQ*, hasta que encuentre 147.

Fig. 147. la *IL*. Finalmente, por los puntos *Q*, *D*, se tirará la *QT* que encuentre en *T* la perpendicular *SF* en que se halla el Sol. Dicho punto *T* será el punto de concurso de todas las sombras de las lineas verticales que van á dar en el plano inclinado *EDC*.

Porque es evidente que el triángulo *DQO* rectángulo en *O*, y cuyo ángulo *QDO* es igual á la inclinacion del plano *DCE*, está en un plano vertical *OQSF*, que pasa por el Sol *S* y por su perpendículo *ST*; luego *QD* prolongada dá en *T* el punto donde el plano inclinado *DCE* encuentra *ST*.

ELEMENTOS
DE MÚSICA ESPECULATIVA.

EL asunto de este tratado es manifestar el origen y los fundamentos de la harmonía, es á saber, la relacion que hay entre los diferentes sones de que puede componerse, y el principio de donde estos se derivan. Muchos de los puntos que abraza esta investigacion se prueban y los probaremos con el cálculo; pero deseosos de que aun los Lectores que no tienen conocimiento alguno de la Arismética puedan enterarse de las proposiciones que acerca de esta materia vamos á sentar, daremos separadamente y por via de notas, las pruebas que para muchas de ellas suministra la ciencia de los números.

Conocimientos preliminares.

¿Qué cosa sea Melodía, Postura, Harmonía, Intervalo?

846 Llamamos *Canto* ó *Melodía* una succesion de sones que el oído oye con agrado unos despues de otros.

847 Llamamos *Postura* el agregado de muchos sones que se oyen á un tiempo; y la succesion de muchas posturas que el oído oye con agrado unas despues de otras se llama *Harmonía.* Daremos tambien alguna vez el nombre de harmonía á una sola y misma postura, para espresar el agregado de los sones que la componen, y la impresion

que su union hace en el órgano del oído.

848 En la melodía y la harmonía llamamos *Intervalo* la diferencia que vá de un son á otro mas ó menos agudo. Para hacerse cargo de lo que son los intervalos, y saberlos distinguir unos de otros, tóquense en un teclado ó parte anterior de un clave todas las teclas desde la nota *C sol fa ut*, que llamaremos *ut*, hasta el primer *ut* que está mas arriba, es á saber las siete teclas cuyos nombres son, empezando desde la primera, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *UT*, que componen la escala de *ut* y se reparará que

El son *re* es mas alto ó mas agudo que el son *ut*, el son *mi* mas que el son *re*, el son *fa* mas que el son *mi*, &c. y así prosiguiendo; de manera que el intervalo ó la diferencia que vá del son *ut* al son *re*, es menor que el intervalo ó la diferencia que vá del son *ut* al son *mi*, el intervalo de *ut* á *mi*, menor que el de *ut* á *fa* &c. y que finalmente el intervalo del primer *ut* al segundo *UT* es el mayor de todos; para distinguir estas dos notas *ut*, hemos escrito la segunda con letras mayúsculas.

849 En general, el intervalo entre dos sones es tanto mayor quanto el uno de los dos es mas grave ó alto, y mas agudo ó bajo respecto del otro; pero es de advertir que dos sones pueden ser igualmente agudos ó igualmente graves, bien que de fuerza desigual. Una cuerda de violín herida con el arco siempre dá un son igualmente agudo, apriétese poco ó mucho el arco. Lo mismo se esperimenta en la voz; si se forma un son hinchando poco á poco la

voz,

voz, se repara que va siendo mas fuerte ó corpulento el son, pero siempre se queda igualmente grave ó igualmente agudo.

850 Repararémos tambien en la escala que los intervalos del *ut* al *re*, del *re* al *mi*, del *fa* al *sol*, del *sol* al *la*, del *la* al *si*, son iguales ó casi iguales; y que los intervalos del *mi* al *fa*, y del *si* al *ut* son tambien iguales uno con otro, bien que vienen á ser la mitad no mas de los primeros. Este es un hecho constante del qual daremos mas adelante la razon, y se puede verificar por medio de un esperimento facilísimo.

Si alguno canta la escala *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *UT*, echará de ver desde luego que la mitad de la escala *sol*, *la*, *si*, *ut* es de todo punto parecida á la otra mitad *ut*, *re*, *mi*, *fa*; por manera que si despues de cantar esta escala la volviera á cantar dándole á *ut* el mismo son que tenia *sol* la primera vez, tendría el *re* el mismo son que el *la* tuvo antes, el *mi* el mismo que el *si*, y el *fa* el mismo que el *ut*.

De donde se infiere que hay un mismo intervalo de *ut* á *re*, que de *sol* á *la*; de *re* á *mi*, que de *la* á *si*, y de *mi* á *fa*, que de *si* á *ut*.

Tambien se verificará que de *re* á *mi*, y de *fa* á *sol*, hay el mismo intervalo que de *ut* á *re*. Para comprobarlo, despues de cantar la escala, vuélvase á cantar dándole á *ut*, al repetirla, el mismo son que se le dió á *re* la primera vez, y se echará de ver que esta segunda vez el

re tendrá el mismo son, sensiblemente por lo menos, que el *mi* tuvo la primera; de donde se sigue que el intervalo de *re* á *mi* es, por lo menos sensiblemente, igual al de *ut* á *re*. Por el mismo camino se hallará que el intervalo de *fa* á *sol* es sensiblemente el mismo que el de *ut* á *re*.

Para los que no tuvieren ningun principio de solfeo, será algo trabajoso este esperimento; pero se les hará fácil si acuden á un clave, que les dispensará tener presentes los sones. Tocando en el clave las teclas *sol*, *la*, *si*, *ut*, y entonando al mismo tiempo *ut*, *re*, *mi*, *fa*, de manera que se le dé á *ut* el mismo son que el de la tecla *sol*, se echará de ver que el *re* cantado será el mismo que el *la* del clave.

Con el mismo clave se probará tambien, que si se canta la escala dándole á *ut* el mismo son que á *mi*, el *re* que se seguirá despues del *ut*, será notablemente mas alto que el *fa* que se sigue á *mi*; de lo qual se inferirá que el intervalo de *mi* á *fa* es menor que el de *ut* á *re*; y si desde *fa* se subiese á otro son que forme con *fa* el mismo intervalo que hace *fa* con *mi*, se hallará del mismo modo, que el intervalo de *mi* al nuevo son, será con corta diferencia el mismo que el de *ut* á *re*. Luego el intervalo de *mi* á *fa* viene á ser como la mitad del de *ut* á *re*.

Luego una vez que las dos medias escalas

ut, *re*, *mi*, *fa*,
sol, *la*, *si*, *UT*,

son

son de todo punto semejantes, y los intervalos de *ut* á *re*, de *re* á *mi*, y de *fa* á *sol* son iguales, síguese que cada uno de los intervalos de *sol* á *la*, y de *la* á *si* es tambien igual á cada uno de los tres intervalos de *ut* á *re*, de *re* á *mi*, de *fa* á *sol*, y que los intervalos de *mi* á *fa* y de *si* á *ut* son tambien iguales bien que no son mas que la mitad de los primeros.

851. Esta es la razon porque se llama *Semitono* ó medio tono el intervalo de *mi* á *fa*, ó de *si* á *ut*; y *Tono*, el intervalo de *ut* á *re*, el de *re* á *mi*, el de *fa* á *sol*, el de *sol* á *la*, el de *la* á *si*.

El tono tambien se llama *segunda mayor*, y el semitono, *segunda menor*.

tono	tono	semit.	tono	tono	tono	semit.	
ut	*re*	*mi*	*fa*	*sol*	*la*	*si*	*UT*

852 *Subir ó bajar diatónicamente* es subir ó bajar de un tono á otro por el intervalo de un tono ó semitono, ó en general, de segunda, sea mayor ó menor, como de *re* á *ut*, ó de *ut* á *re*; de *fa* á *mi*, ó de *mi* á *fa*.

Nombres de los diferentes intervalos de la Escala.

853 Cada intervalo tiene su nombre peculiar. Todo intervalo compuesto de un tono y un semitono, qual es *mi sol*, ó *la ut*, ó *re fa*, se llama *Tercera menor*.

Un

Un intervalo que coge dos tonos, como *ut mi*, ó *fa la*, ó *sol si*, se llama *Tercera mayor.*

Un intervalo compuesto de dos tonos y un semitono, como *ut fa*, ó *sol ut*, se llama *Quarta.*

Un intervalo compuesto de tres tonos, como *fa si*, se llama Tritono ó *Quarta superflua.*

Un intervalo compuesto de tres tonos y un semitono, qual es *ut sol*, ó *fa ut*, ó *re la*, ó *mi si* &c., se llama *Quinta.*

Un intervalo compuesto de tres tonos y dos semitonos, como *mi UT*, se llama *Sexta menor.*

Un intervalo compuesto de quatro tonos y un semitono, como *ut la*, se llama *Sexta mayor.*

Un intervalo compuesto de quatro tonos y dos semitonos, como *re UT*, se llama *Séptima.*

Un intervalo compuesto de cinco tonos y un semitono, como *ut si*, se llama *Séptima superflua.*

Finalmente, un intervalo compuesto de cinco tonos y dos semitonos, como *ut UT*, se llama *Octava.*

854 Quando los sones son igualmente agudos ó igualmente graves, aunque sean de distinta fuerza, decimos que son unísonus uno con otro. Suelen llamarse tambien *unísonus* dos sones que están á la octava uno de otro.

855 Quando dos sones forman uno con otro un intervalo qualquiera, se dice que el mas agudo forma dicho intervalo *subiendo* respecto del mas grave, y que el mas grave forma dicho intervalo *bajando* respecto del mas agudo.

do. Así, en la tercera menor *mi sol*, donde *mi* es el son grave, y *sol* el son agudo, *sol* está á la tercera menor de *mi subiendo*, y *mi* está á la tercera menor de *sol bajando.* Igualmente, quando se dice de dos cuerpos sonoros que el uno está á la quinta del otro subiendo, esto quiere decir que el son del uno está una quinta mas alto que el son del otro.

De los intervalos mayores que la Octava.

856 Si despues de entonar la escala *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *UT*, la proseguimos subiendo, formaremos otra escala *UT*, *RE*, *MI* &c.

ut re mi fa sol la si	*UT RE MI FA SOL &c.*
primera escala	segunda escala.

de todo punto parecida á la primera, y cuyos sones estarán una octava mas arriba de los que les corresponden en la primera escala; así, *RE*, segundo son de la segunda escala, estará una octava mas arriba del *re* de la primera escala; *MI* estará una octava mas arriba de *mi*, &c.

857 Como hay nueve sones desde el primer *ut* hasta el segundo *RE*, el intervalo desde el uno de estos dos sones al otro se llama *Novena*, y esta novena se compone de seis tonos y dos semitonos. Por la misma razon el intervalo de *ut* á *FA* se llama *oncena*, el intervalo de *ut* á *SOL*, *docena*, &c.

Se

Se viene á los ojos que la novena es la octava de la segunda; que la oncena es la octava de la quarta; que la docena es la octava de la quinta, &c.

La octava de la octava de un son se llama *doble octava*; la octava de la doble octava se llama *triple octava*, &c.

La doble octava se llama tambien *quincena*, y por la misma razon la doble octava de la tercera se llama *diez y setena*; la doble octava de la quinta, *diez y novena* (*a*) &c.

Qué cosa sea Sustenido y Bemol.

858 Podemos figurarnos cada uno de los cinco tonos que hay en la escala, como dividido en dos semitonos; así podemos ir desde *ut* á *re* pasando por un son intermedio que será un semitono mas alto que *ut*, y un semitono mas bajo que *re*. Un son de la escala se llama *Sustenido*, quando se le sube un semitono, y se señala así ✱; por egemplo, *ut* ✱ significa *ut* sustenido, esto es, *ut* un semitono mas alto que el *ut* de la escala. Un son de la escala medio tono mas bajo se llama *Bemol*, y se señala b; así, *la* b significa *la* bemol, ó un *la* un semitono mas bajo.

De la Consonancia y Disonancia.

859 Una postura ó conjunto de muchos sones que agrada al oido, se llama *Postura consonante*; y los sones que componen esta postura se llaman consonancias unos respecto de otros. Llámanse así, porque una postura es tanto mas

mas perfecta, quanto mas se confunden uno con otro los sones que la componen.

860 La octava de un son es la mas perfecta de las consonancias que le pueden acompañar; despues la quinta, despues la tercera &c. Consta por esperiencia.

861 Una postura compuesta de sones cuya union desagrada al oido, se llama *Postura disonante*, y los sones de que se compone se llaman disonancias unos respecto de otros. La segunda, el tritono, la séptima de un son, son sus disonancias. Por egemplo, una postura compuesta de los dos sones *ut re*, ó *ut si*, ó *fa si* &c. es una postura disonante. La disonancia es desagradable, porque los sones de que se compone no se confunden en el oido, y se oyen como dos sones distintos, bien que dados á un tiempo.

Esperimentos fundamentales.

862 I. Quando se hace sonar un cuerpo sonoro, se oyen, además del son principal y su octava, otros dos sones muy agudos; de los quales el uno es la docena mas arriba del son principal, esto es, la octava de la quinta de este son; y el otro es la diez y setena mayor mas arriba del mismo son, esto es, la doble octava de su tercera mayor.

863 Este esperimento es muy perceptible particularmente quando se hace con los bordones de un violon, cuyo son, por ser muy grave, deja percibir á un oido algo egercitado la docena y décimaséptima de que hemos hablado (*b*).

864 Al son principal le llamamos *Son generador*, y á los otros dos que de él se derivan y le acompañan, los llamamos *sus Harmónicos*, y entre ellos incluimos á la octava.

865 II. Ninguno puede dejar de percibir la semejanza que hay entre un son y su octava subiendo ó bajando. Estos dos sones casi se confunden enteramente en el oido quando los oye á un tiempo. Referiremos dos *hechos* muy sencillos que manifiestan quan facil es tomar uno por otro.

Supongamos que alguno empiece cantando un cantar por un tono muy alto ó muy bajo para su voz, y que por no violentarla tenga que cantarle por un tono mas bajo ó mas alto que el primero; digo que aunque no tenga ninguna práctica, ni conocimiento de la Música, tomará naturalmente el nuevo tono una octava mas abajo ó mas arriba que la primera vez, y que no podrá tomar el nuevo tono á un intervalo distinto de la octava, sin poner forzosamente algun cuidado. Qualquiera tiene en su mano la comprobacion de este hecho con hacer el esperimento.

Todos los dias estamos viendo que si alguno *canta delante* de otro un cantar, y le canta por un tono muy alto ó muy bajo respecto de la voz del que le oye; si este quiere cantar lo mismo, toma naturalmente la octava mas abajo ó mas arriba; y muchos creen al cantar esta octava que cantan el unísonus.

Ori-

Origen de los dos Modos; del canto mas natural, y de la mas perfecta harmonía.

866 Para darnos mejor á entender, llamaremos *ut* el son que dá el cuerpo sonoro; por el primer esperimento consta que este son siempre vá acompañado de su docena, y diez y setena mayores, esto es, de la octava de *sol*, y de la doble octava de *mi*.

867 Luego esta octava de *sol*, y esta doble octava de *mi* dan la postura mas perfecta que pueda acompañar á *ut*, por ser esta postura obra de la naturaleza.

868 Por la misma razon un cantar formado de *ut*, de la octava de *sol*, y de la doble octava de *mi*, entonándolas una despues de otra, tambien sería el cantar mas sencillo y mas natural de todos, si tuviera nuestra voz bastante estension para formar sin violentarse intervalos de tanta distancia; pero como está á nuestro arbitrio substituir, siempre que sea mas acomodado para nuestra voz, á un son su octava, podemos representar sin ninguna violencia el espresado canto.

869 Esta es la razon porqué despues de entonar el son *ut*, entonamos naturalmente la tercera *mi*, y la quinta *sol* en lugar de la doble octava de *mi*, y de la octava de *sol*; con lo que formamos, añadiendo la octava del son principal, este canto *ut*, *mi*, *sol*, *ut*, que es con efecto el mas simple y facil de todos; tambien es verdad que trahe su origen de la misma resonancia del cuerpo sonoro.

Es-

870 Este canto *ut*, *mi*, *sol*, *ut*, en el qual la tercera *ut*, *mi* es mayor, constituye el género ó modo llamado *Modo mayor*; de donde se infiere que el modo mayor es obra inmediata de la naturaleza.

871 En este canto *ut*, *mi*, *sol* de que vamos hablando, los sones *mi* y *sol* son tales que el son principal *ut* (862) los hace sonar ambos, pero el segundo son *mi* no hace sonar *sol* que es su tercera menor.

872 Imaginemos ahora que en lugar del son *mi*, pongamos entre los sones *ut* y *sol* otro son distinto de *ut*, que tenga (del mismo modo que el son *ut*) la propiedad de hacer sonar *sol*; este son que vamos buscando ha de ser tal (862) que su diez y setena mayor sea *sol* ó una de las octavas de *sol*; por consiguiente este son que buscamos debe estar una décimaséptima mas bajo que *sol*, ó lo que es lo mismo una tercera mayor mas bajo que dicho *sol*. Pero una vez que el son *mi* está una tercera menor mas bajo que *sol*, y la tercera mayor tiene un semitono mas (853) que la tercera menor, el son que buscamos será un semitono mas bajo que *mi*, y será por consiguiente *mi* b.

873 Esta nueva disposicion *ut*, *mi* b, *sol*, en la qual ambos sones *ut* y *mi* b hacen sonar *sol*, sin que *ut* haga sonar *mi* b, no es verdaderamente tan perfecta como la primera disposicion *ut*, *mi*, *sol*; porque en esta los dos sones *mi* y *sol* nacen ambos del son principal *ut*, siendo así que en la segunda el son *mi* b no procede del son *ut*; pero esta disposicion *ut*, *mi* b, *sol* tambien la dá la naturaleza (862), bien

bien que menos inmediatamente que la primera; y con efecto consta por esperiencia que deja casi igualmente satisfecho el oido.

874 En este canto *ut*, *mi* b, *sol*, *ut*, es evidente que la tercera de *ut* á *mi* b es menor; y este es el origen del *modo* que llamamos *menor*.

875 Luego las posturas mas perfectas son 1.° toda postura como *ut*, *mi*, *sol*, *ut*, formada de un son, de su tercera mayor, de su quinta y de su octava. 2.° Toda postura como *ut*, *mi* b, *sol*, *ut*, compuesta de un son, de su tercera menor, de su quinta y de su octava. Con efecto, estas dos posturas trahen su origen de la misma naturaleza, pero la primera mas inmediatamente que la otra. La primera se llama *Postura perfecta mayor*, y la segunda *Postura perfecta menor*.

De la succesion de las quintas, y de las leyes con que debe conformarse.

876 Ya que el son *ut* hace sonar el son *sol*, y suena quando suena *fa*, cuyos sones *sol* y *fa* son sus dos docenas, podemos imaginar un canto compuesto de este son *ut*, y de sus dos docenas; ó lo que viene á ser lo propio (865), de sus dos quintas *fa*, *sol*, la una á lo grave, la otra á lo agudo; de donde nacerá el canto ó la succesion de quinta *fa*, *ut*, *sol* que llamaremos *Bajo fundamental de* ut *por quintas*.

Mas adelante veremos como hay bajos fundamentales

por terceras, sacadas de las dos décimas séptimas, de las quales la una suena con el son principal, y la otra le incluye. Pero es menester ir despacio, y nos contentaremos por ahora con considerar los bajos fundamentales por quintas.

877 Por consiguiente del son *ut* podemos pasar, conforme queramos, al son *sol* ó al son *fa.*

878 Por la misma razon podemos proseguir esta sucesion de quintas subiendo y bajando desde *ut*, conforme sigue

mi b, *si* b, *fa*, *ut*, *sol*, *re*, *la* &c;

y en esta serie de quintas podemos pasar de un son qualquiera al que le precede ó sigue inmediatamente.

879 Pero no podemos pasar igualmente de un son á otro que no sea su vecino inmediato, pongo por caso de *ut* á *re*, ó de *re* á *ut*, por la razon muy obvia de que el son *re* no contiene al son *ut*, ni el son *ut* al son *re*, por lo que no tienen estos dos sones uno con otro ningun enlace que consienta el paso del uno al otro.

880 Y como estos sones *ut* y *re*, por el primer esperimento, llevan naturalmente consigo sus posturas perfectas mayores *ut*, *mi*, *sol*, *ut*; *re*, *fa* ✱, *la*, *re*; sacamos de aquí esta regla: *que no se pueden dar diatónicamente en un bajo fundamental una tras de otra dos posturas perfectas, particularmente si son mayores*; quiero decir, que en un bajo fundamental no pueden darse diatónicamente dos sones que lleven postura perfecta, especialmente quando esta postura perfecta es mayor en ambos.

DI-

Digo *especialmente quando son mayores*; porque en la postura perfecta mayor *re*, *fa* *, *la*, *re*, sobre que los sones *ut* y *re* no tienen nada comun, y son disonantes uno con otro (861), se halla tambien *fa* * que forma una disonancia con *ut*. La postura menor *re*, *fa*, *la*, *re* sería mas soportable, porque el *fa* natural que incluye lleva consigo su quinta *ut*, ó la octava de esta quinta; esta es la razon por qué se permite algunas veces la licencia de dar diatónicamente una postura menor despues de otra mayor.

Del Modo en general.

881 Llámase *Modo* en la Música el orden determinado entre los sones, así en harmonía como en melodía, por la succesion de las quintas. Así los tres sones *fa*, *ut*, *sol*, y los harmónicos de cada uno de ellos, esto es sus terceras mayores, y sus quintas, componen todo el modo mayor de *ut*.

882 Luego la serie de quintas ó bajo fundamental *fa*, *ut*, *sól*, en la qual *ut* está en medio, se puede considerar como que representa el modo de *ut*. Tambien se podrá considerar la succesion de quintas ó bajo fundamental *ut*, *sol*, *re*, como que representa el modo de *sol*; igualmente *si* b, *fa*, *ut* representará el modo de *fa*.

Esto manifiesta que el modo de *sol*, ó por mejor decir el bajo fundamental de este modo, tiene dos sones comunes con el bajo fundamental del modo de *ut*. Lo mismo digo del bajo fundamental del modo de *fa*.

883 El modo de *ut*, es á saber, *fa*, *ut*, *sol*, se llama *Modo principal*, respecto de los modos de sus dos quintas, que llamaremos sus dos *adjuntos*.

884 Es, pues, una cosa indiferente para el oido el pasar del modo principal á qualquiera de sus adjuntos, pues cada uno de ellos tiene igualmente dos sones comunes con el modo principal. Sin embargo, merece alguna predileccion el modo de *sol*, porque *sol* suena en *ut*, y por consiguiente *ut* le llama; pero *ut* no hace sonar *fa*, bien que *fa* haga sonar *ut*. Esta es la razon por qué el oido impresionado del modo de *ut*, está algo mas preocupado por el modo de *sol* que por el de *fa*. Por lo mismo no hay cosa mas natural ni mas comun que pasar del modo de *ut* al modo de *sol*.

885 Por este motivo, y para distinguir la una quinta de la otra, llamaremos *Dominante* la quinta *sol* al agudo del generador; y *Subdominante* la quinta *fa* al grave del mismo generador.

886 Como hemos dicho antes (878) que en la succesion de las quintas podemos pasar indistintamente de un son á su inmediato; tambien podemos, y por la misma razon, despues de ir del modo de *ut* al modo de *sol*, pasar del modo de *sol* al modo de *re*, y del modo de *fa* al modo de *si* b; pero se debe tener presente que el oido una vez impresionado del modo principal, desea volver á él. Así, quanto mas los modos donde estamos se apartan del principal, tanto menos debemos detenernos en ellos.

For-

Formacion de la Escala diatónica de los Griegos.

887 Por lo mismo que en la succesion de las quintas *fa*, *ut*, *sol* podemos pasar de un son á su inmediato, síguese que podemos formar este canto ó este bajo fundamental por quintas

sol, *ut*, *sol*, *ut*, *fa*, *ut*, *fa*.

888 Cada uno de los sones que forman este bajo, lleva indispensablemente consigo su tercera mayor, su quinta y su octava; por manera que quando se dá el *sol*, por egemplo, se puede considerar que al mismo tiempo se dá *sol*, *si*, *re*, *sol*; igualmente el son *ut* del bajo fundamental lleva consigo este canto *ut*, *mi*, *sol*, *ut*, y finalmente el son *fa* lleva consigo *fa*, *la*, *ut*, *fa*. Luego este canto ó bajo fundamental

sol, *ut*, *sol*, *ut*, *fa*, *ut*, *fa*

dá el canto diatónico

si, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*,

que es cabalmente la escala diatónica de los Griegos. No sabemos sobre qué principios la formaron; pero es patente que esta escala se origina del bajo *sol*, *ut*, *sol*, *ut*, *fa*, *ut*, *fa*, y que por consiguiente á este bajo le llamamos con razon fundamental, por ser el verdadero canto primitivo, el que guia al oido, y el que suple en el canto diatónico *si*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la* (*c*).

889 Haremos algunas consideraciones que harán mas patente todavía esta verdad.

En el canto *si*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, los sones *re* y *fa* forman uno con otro una tercera menor, que no es rigurosamente cabal como la de *mi* á *sol* (*d*). Sin embargo, esta alteracion en la tercera menor de *re* á *fa*, no desagrada al oido, porque este *re*, y este *fa* que no forman uno con otro una tercera menor cabal, forman cada uno en particular consonancías perfectamente cabales con los sones del bajo que les corresponden; porque *re* de la escala es la quinta cabal del *sol* que le corresponde en el bajo fundamental, y *fa* de la escala es la octava cabal del *fa* que le corresponde en el mismo bajo.

890 Luego con tal que los sones de la escala formen consonancias perfectamente cabales con los sones que les corresponden en el bajo fundamental, el oido cuida poco de la alteracion que puede haber entre los intervalos que forman unos con otros los sones de la escala. Esta es otra prueba de ser el bajo fundamental la verdadera guia del oido, y el verdadero origen del canto diatónico.

891 Fuera de esto, esta escala diatónica no tiene mas que siete sones, y no llega hasta el *si* de arriba que sería la octava del primero; esta es una estrañeza, cuya razon sacaremos de los principios sentados hasta aquí. Para que el son *si* se siguiera inmediatamente al son *la*, sería preciso que el son *sol*, que es el único del qual pueda originarse *si*, se siguiese en el bajo fundamental inmediatamente despues de *fa*, que es el único del qual se pueda sacar *la*. Pero por lo dicho (879) no se puede verificar en

el

el bajo fundamental la succesion diatónica de *fa* á *sol.* Luego los sones *la* y *si* no pueden estar inmediatamente uno despues de otro en la escala; mas adelante diremos por qué no sucede otro tanto en la escala *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *UT*, que empieza desde *ut*, siendo así que la escala de que vamos hablando empieza desde *si*.

892 Esta es la razon por qué los Griegos, para completar la octava, añadian antes del primer *si* el son *la*, que distinguian y separaban de lo demás de la escala, y que por este motivo llamaban *Proslambanómeno*, esto es, cuerda ó son añadido á la escala, y puesto antes de *si* para completarla.

893 La escala diatónica *si*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, se compone de dos *Tetracordos*, esto es, de dos escalas diatónicas de quatro sones cada una, *si*, *ut*, *re*, *mi*; y *mi*, *fa*, *sol*, *la*; estos dos tetracordos son perfectamente semejantes, porque del *mi* al *fa* hay el mismo intervalo que del *si* al *ut*; del *fa* al *sol*, el mismo que del *ut* al *re*; del *sol* al *la*, el mismo que del *re* al *mi* (*e*). Esta es la razon por qué los Griegos distinguian uno de otro estos dos tetracordos, y los juntaban por medio del son *mi*, que es comun á ambos, por lo que se les ha dado el nombre de *Tetracordos conjuntos*.

894 A mas de esto, los intervalos de dos sones qualesquiera, tomándolos en cada tetracordo separadamente, son perfectamente cabales; así en el primer tetracordo los intervalos *ut*, *mi*, y *si*, *re* son terceras, la una mayor, la

otra menor, perfectamente cabales; y eslo tambien la quarta *si*, *mi* (*f*); lo mismo se verifica en el tetracordo *mi*, *fa*, *sol*, *la*, pues este tetracordo es de todo punto semejante al primero.

895 Pero no se verifica lo mismo quando se comparan dos sones que están cada uno en un tetracordo distinto; porque yá hemos visto como el son *re* del primer tetracordo forma con el son *fa* del segundo una tercera menor que no es cabal. Tambien se hallará que la quinta de *re* á *la* no es perfectamente cabal; porque la tercera mayor de *fa* á *la* es cabal, y la tercera menor de *re* á *fa* no lo es; y para formar una quinta cabal, se necesita una tercera mayor, y una tercera menor, ambas perfectamente cabales.

896 Síguese de aquí que todo es perfecto en cada tetracordo considerado separadamente; pero que hay alteracion de un tetracordo á otro. Esta es una razon de mas para distinguir dos tetracordos en la escala.

897 Manifestaremos mas adelante por cálculo, que en el tetracordo *si*, *ut*, *re*, *mi*, el intervalo ó tono de *re* á *mi* es algo menor que el intervalo ó tono del *ut* al *re* (*g*); asimismo en el segundo tetracordo *mi*, *fa*, *sol*, *la*, que, conforme hemos probado, es de todo punto semejante al primero, el tono de *sol* á *la* es algo menor que el tono del *fa* al *sol*; por este motivo se admiten dos especies de tonos, es á saber el tono mayor como de *ut* á *re*, de *fa* á *sol* &c. y el tono menor como de *re* á *mi*, de *sol* á *la* &c.

Formacion de la escala diatónica vulgar ó de los Modernos.

898 Acabamos de manifestar como la escala diatónicamente de los Griegos, *si*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la* se origina de un bajo fundamental que no tiene mas que los tres sones *fa*, *ut*, *sol*; pero para formar la escala *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *UT*, es indispensable añadir al bajo fundamental el son *re*, y formar con los quatro sones *fa*, *ut*, *sol*, *re* el bajo fundamental siguiente

ut, *sol*, *ut*, *fa*, *ut*, *sol*, *re*, *sol*, *ut*,

de donde se saca el canto que sigue

ut, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *sol*, *la*, *si*, *UT*.

Con efecto (*b*) *ut* de la escala es harmónico de *ut* que se corresponde en el bajo; *re* que es el segundo son de la escala, es harmónico de *sol*, segundo son del bajo; *mi*, tercer son de la escala, es harmónico de *ut*, tercer son del bajo.

899 Síguese de aquí que la escala diatónica de los Griegos es mas sencilla que la nuestra, á algunos respectos por lo menos; pues la escala de los Griegos (887 y sig.) se compone del modo de *ut* no mas, siendo así que la nuestra se origina del modo de *ut* (*fa*, *ut*, *sol*), y del modo de *sol* (*ut*, *sol*, *re*).

De aquí proviene que esta última escala se compone de dos partes, estando la una *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, en el modo de *ut*, y la otra *sol*, *la*, *si*, *ut*, en el modo de *sol*.

900 Esta es la razon por qué el son *sol* se halla dos veces de seguida en esta escala; la primera como quinta de

ut,

ut, que le corresponde en el bajo fundamental; la segunda como octava de *sol*, que se sigue inmediatamente á *ut* en el mismo bajo. Estos dos *soles* consecutivos son perfectamente unísonus uno con otro, y por este motivo no se pronuncia mas que el uno al cantar la escala *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *UT*; pero no por eso dejamos de hacer una pausa tácita ó espresa, despues del son *fa*. Lo echará de ver qualquiera que cante la escala.

901 Luego podemos considerar la escala diatónica de los modernos como formada de dos tetracordos disjuntos y perfectamente semejantes, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, y *sol*, *la*, *si*, *UT*, el uno en el modo de *ut*, el otro en el modo de *sol*. Mas adelante enseñaremos un artificio con el qual se puede considerar la escala *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *UT*, como originada del modo de *ut* no mas. Esto pide que se haga alguna mudanza en el bajo fundamental que acabamos de proponer, conforme se dirá en su lugar.

902 La introduccion del modo de *sol* en el bajo fundamental, hace que los tres tonos *fa*, *sol*, *la*, *si*, pueden seguirse inmediatamente unos despues de otros en la escala subiendo; cuya circunstancia no se podría verificar (891) en la escala diatónica de los Griegos, por formarse del solo modo de *ut*. De todo esto se deduce

1.° Que se muda de modo siempre que se cantan tres tonos de seguida.

2.° Que si estos tonos de seguida se entonan en la escala *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *UT*, solo podrá practicar-

carse por medio de un reposo tácito ó espreso despues del son *fa*; por manera que los tres tonos *fa*, *sol*, *la*, *si* se consideran como pertenecientes á dos tetracordos.

903 No es, pues, de estrañar la dificultad que esperimentamos quando entonamos tres tonos de seguida subiendo, pues no lo podemos conseguir sin mudar de modo, y si nos quedamos en el mismo modo, el quarto son mas alto que el primer son nunca será sino un semitono mas alto que el que le precediere, conforme se echa de ver en *ut*, *re*, *mi*, *fa*, y en *sol*, *la*, *si*, *ut*, donde de *mi* á *fa*, y de *si* á *ut* no hay mas que un semitono.

904 En la escala *ut*, *re*, *mi*, *fa* tambien es de notar que (889) la tercera menor del *re* al *fa* no es cabal. Lo propio decimos de la tercera menor *la*, *ut*, y de la tercera mayor *fa*, *la*; pero cada uno de estos sones forma no obstante consonancias perfectamente cabales con los sones correspondientes del bajo fundamental.

905 Las terceras *la*, *ut*; *fa*, *la*, que eran cabales en la primera escala, son falsas en esta; porque en la primera escala, *la* era tercera de *fa*, y en esta es quinta de *re*, que le corresponde en el bajo fundamental.

906 Queda, pues, probado que en la escala de los Griegos hay menos sones alterados que en la nuestra; y esto proviene tambien de la introduccion del modo de *sol* en el bajo fundamental. Como en la escala de los Griegos el *la* es tercera de *fa*, resulta una quinta alterada entre *la* y *re*; pero en la nuestra como *la* es quinta de *re*, resultan dos

ter-

terceras alteradas, á saber, *fa*, *la*, y *la*, *ut*, y una quinta alterada *la*, *mi*, conforme se verá dentro de poco. Por consiguiente hay en nuestra escala dos intervalos alterados mas que en la de los Griegos.

907 Tambien se echa de ver que el valor de *la* en la escala diatónica, acerca de cuyo valor ha habido varios pareceres entre los Escritores, pende únicamente del bajo fundamental, y que será distinto conforme el bajo de dicho *la* fuere *fa* ó *re*.

908 Se nos podrá preguntar ¿por qué siendo el bajo fundamental de la escala de los Griegos mas simple que el de la nuestra, y teniendo tambien menos consonancias alteradas, nos parece sin embargo la nuestra mas facil de entonar que la de los Griegos? Esta empieza por un semitono, siendo así que la entonacion natural parece que nos inclina á subir desde luego un tono, conforme se practíca en nuestra escala.

La respuesta es facil. Verdad es que la escala de los Griegos está mejor dispuesta que la nuestra por ser mas sencillo su bajo, pero la nuestra está mejor dispuesta para la facilidad de la entonacion. Nuestra escala empieza por el son fundamental *ut*, y desde este se debe empezar con efecto; de este penden y se derivan todos los demás; y por decirlo así, los encierra todos. Por el contrario, ni la escala de los Griegos, ni el bajo fundamental de dicha escala empiezan por *ut*; desde este *ut* es preciso empezar para dirigir la entonacion, sea al subir, sea al bajar; pero al subir

des-

desde *ut*, la entonacion dá aún en la escala de los Griegos *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*; y es tan cierto que el son fundamental *ut* es aquí el verdadero norte del oido, que si antes de entonar *ut* queremos ir á él pasando por el son de la escala mas inmediato á dicho *ut*, no lo podremos egecutar sino por medio del son *si*, y del semitono *si*, *ut*. Pero para pasar desde el *si* al *ut* por este semitono, es preciso que el oido esté yá preocupado del modo de *ut*; donde no, entonaríamos el tono *si*, *ut* *, y estaríamos en otro modo.

Del Temperamento.

909 La alteracion que acabamos de reparar entre algunos sones de la escala diatónica, nos encamina naturalmente á que tratemos del *Temperamento*. Para dar de este punto una idea cabal, y manifestar la necesidad del temperamento, supondremos un instrumento compuesto de teclas, qual es el clave, que tenga muchas octavas ó escalas, habiendo en cada una doce semitonos.

Primera escala.

UT, *UT* *, *re*, *re* *, *mi*, *mi* *, *fa* *, *SOL*, *sol* *, *LA*, *la* *, *si*, *si* *,
ó *fa* ó *ut*.

Segunda escala.

ut, *ut* *, *RE*, *RE* *, *MI*, *MI* *
ó *FA*

Tomemos en este clave una de las cuerdas que dá el

son

son *UT*, y pongamos la cuerda *SOL* á la quinta perfectamente cabal de *UT*, subiendo; pongamos despues á la quinta cabal de este último *SOL*, el *RE* que está mas arriba, cuyo *RE* será evidentemente de la escala que se sigue despues de aquella por donde hemos empezado; pero es tambien evidente que este *RE* tendrá en la primera escala un *re* que le corresponde, cuyo *re* será preciso poner á la octava cabal mas abajo del *RE* que forma la quinta de *SOL*, por manera que el *re* de la primera escala estará una quarta cabal mas bajo que el *SOL* de la misma escala. Despues pondremos el son *LA* de la primera escala á la quinta cabal de este último *re*; despues el son *MI* de la escala mas arriba á la quinta cabal de este nuevo *LA*, y por consiguiente el *mi* de la primera escala á la quarta cabal mas baja que el mismo *LA*. Hecho esto, hallaremos que el último *mi* templado de este modo, no dará la tercera mayor cabal del son *UT* (*i*); quiero decir que es imposible que *mi* pueda ser á un tiempo la tercera mayor de *UT*, y la quinta cabal de *LA*, ó lo que viene á ser lo propio, la quarta cabal de *LA* bajando.

910 Hay todavía mas. Si despues de puestas succesiva y alternadamente á la quinta y á la quarta cabales una de otra, las cuerdas *UT*, *SOL*, *re*, *LA*, *mi*, proseguimos templando succesivamente por quintas y quartas cabales las cuerdas *mi*, *si*, *fa* ✱, *ut* ✱, *sol* ✱, *re* ✱, *la* ✱, *mi* ✱, *si* ✱; hallaremos que falta mucho para que este *si* ✱ sea la octava cabal del primer *UT*, y que es mas alto que dicha octa-

va (*k*); sin embargo este *si* * no debe discrepar en el clave de la octava mas arriba de *UT*; porque todos los *si* * y los *UT* son una misma cosa, una vez que la octava ó escala se compone en este instrumento de doce semitonos no mas.

911 De aquí se sigue por precision 1.º que es imposible sean cabales á un tiempo todas las octavas y todas las quintas, principalmente en los instrumentos de teclas, en que no hay intervalos menores que el semitono. 2.º que es preciso por lo mismo, quando se ponen cabales las quintas alterar las octavas, pero la semejanza que hay entre un son y su octava, no consiente esta alteracion; resulta de esta semejanza que la octava es el límite de los intervalos, y que todo lo que está mas allá de la escala vulgar, no es mas que la repeticion de todo lo que precede. Por consiguiente si alteráramos la octava, yá no habría término fijo en la melodía y la harmonía. Es, pues, forzoso poner el último *ut* ó *si* * á la octava cabal del primero; de donde se sigue que en la progresion de las quintas, ó lo que es lo propio, en la succesion alternativa de las quintas y las quartas *UT*, *SOL*, *re*, *LA*, *mi*, *si*, *fa* *, *ut* *, *sol* *, *re* *, *la* *, *mi* *, *si* * es indispensable alterar todas las quintas ó algunas por lo menos. Pero como no hay razon ninguna para que alteremos una antes que otra, síguese que las hemos de alterar todas igualmente. Con esto se hallará la alteracion igualmente repartida entre todas las quintas, y será casi imperceptible en cada una; y por lo mismo la quinta que

que despues de la octava es la mas perfecta de todas las consonancias, y que es forzoso alterar, padecerá la menor alteracion posible.

912 Verdad es que las terceras serán algo duras; pero como la tercera es un intervalo menos consonante que la quinta, es preciso sacrificar su exactitud á la de la quinta; porque quanto mas consonante es un intervalo, tanto mas desagrada al oido su alteracion; la mas leve alteracion en la octava se hace insoportable.

913 Esta alteracion de los intervalos en los instrumentos de teclas, y tambien en los instrumentos sin teclas es lo que llamamos *Temperamento.*

914 Resulta, pues, de lo que acabamos de decir que la teórica del temperamento se reduce á esta cuestion:

Dada la serie alternativa de las quintas y quartas UT, SOL, re, LA, mi, si, fa ✱, ut ✱, sol ✱, re ✱, la ✱, mi ✱, si ✱, *en la qual* si ✱ *ó* ut *no es la octava cabal del primer* UT, *alterar todas las quintas de modo que los dos* ut *estén á la octava cabal uno de otro.*

915 Para resolver esta cuestion, se templan primero muy acordes los dos *ut* de modo que el uno sea la octava cabal del otro; despues se ponen lo mas iguales que se puedan todos los semitonos que hay en la escala. Con esto cada una de las quintas estará (*l*) muy poco alterada, y lo estarán todas igualmente.

916 En esto consiste la teórica del temperamento; pero como sería dificultoso en la práctica templar un clave

ve ó un órgano, haciendo, como hemos dicho, iguales todos los semitonos, daremos el siguiente medio para alterar con la mayor igualdad posible todas las quintas.

917 Tómese ácia el medio del teclado la tecla que se quisiere, pongo por caso *UT*; témplese su quinta *SOL* primero muy cabal, despues bágesela imperceptiblemente; témplese despues cabal la quinta de esta quinta baja como hemos dicho, bágese despues imperceptiblemente esta segunda quinta, y prosígase á este tenor de una quinta á otra subiendo; y como el oido no aprecia con toda puntualidad los sones muy agudos, es menester quando las quintas son yá muy agudas templar cabal la octava debajo de la última quinta que se hubiere templado; se proseguirá despues del mismo modo, y se llegará finalmente á una última quinta *mi* ✻, *si* ✻, que de suyo será cabal, quiero decir que será tal que *si* ✻, el mas agudo de los dos sones de que se compone, sea el mismo son *UT*, desde el qual se empezó, ó por lo menos la octava perfectamente cabal de dicho son; se probará, pues, si este *UT* ó su octava forma una quinta cabal con el último son *mi* ✻ ó *fa* que se hubiere templado. Si esto se verificare, será señal segura de estar bien templado el clave; pero si esta última quinta no fuere cabal, será ó muy alta, y esto será señal de que se habrán bajado demasiado las demás quintas, ó algunas por lo menos; ó la quinta no alcanzará, y esto será señal de que no se habrán bajado bastante. Será, pues, preciso volver atrás hasta que la última quinta salga cabal.

Por este método todos los doce sones que componen una de las escalas estarán templados; solo faltará templar cabales sus octavas en las demás escalas, y estará bien afinado el clave.

918 Este temperamento cuyo autor es Rameau, se diferencia mucho del que usan otros, que por lo que toca al órgano y al clave es como sigue.

Empiezan desde el *ut* del medio del teclado, y bajan las quatro primeras quintas *sol*, *re*, *la*, *mi*, hasta que *mi* forme la tercera mayor cabal con *ut*; prosiguiendo despues desde este *mi*, templan las quintas *si*, *fa* *, *ut* *, *sol* *, bien que bajándolas menos que las primeras, de modo que *sol* * forme con corta diferencia una tercera mayor cabal con *mi*. En llegando á *sol* * no se prosigue; vuelven al primer *ut*, templan su quinta *fa* bajando, despues la quinta *si* b &c. y suben un poco todas estas quintas hasta llegar al *la* b, que ha de ser el mismo que el *sol* * templado yá.

Si en este temperamento se encuentran terceras menos alteradas que en el de Rameau, tambien las quintas y muchas terceras son mucho mas falsas; por manera que en un clave templado por el temperamento comun, hay cinco ó seis modos insoportables, y en los quales no se puede egecutar cosa alguna. Por lo contrario, en el temperamento de Rameau todos los modos son igualmente perfectos, y esta es otra prueba en su abono, porque el temperamento se necesita principalmente para pasar de un modo á otro sin ofender el oido; pongo por caso del modo de *ut* al modo de

sol,

sol, del modo de *sol* al modo de *re* &c. Sabemos que esta uniformidad en las modulaciones parece un defecto á muchos profesores; porque están en que con hacer desiguales los semitonos de la escala dán á cada modo un caracter particular; por manera que en su juicio la escala de *ut*,

ut, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *UT*,

no es de todo punto parecida á la escala diatónica del modo de *mi*,

mi, *fa* ✻, *sol* ✻, *la* ✻, *si*, *ut* ✻, *re* ✻, *mi*;

de donde resulta á su parecer que el modo de *ut* y el modo de *mi* son á propósito para espresiones diferentes. Pero lo que dejamos dicho acerca del género diatónico manifiesta que segun la entonacion de la naturaleza, la escala diatónica ha de ser perfectamente una misma en todos los modos, y la opinion contraria es, segun Rameau, una preocupacion de Músico. El caracter de una composicion consiste principalmente en el enlace y mezcla de los modos, en el compas mas ó menos vivo, en el tono mas ó menos grave, mas ó menos agudo del son generador, del modo, y de las cuerdas mas ó menos hermosas, mas ó menos broncas, mas ó menos débiles, mas ó menos fuertes que en él se hallan. Finalmente, la última ventaja de este temperamento consiste en que concuerda ó discrepa poco del que se practica en los instrumentos sin teclas como la viola y el violin, en los quales se prefiere la exactitud de las quintas y de las quartas á la de las terceras y de las sextas, cuyo temperamento parece contrario al que se usa para el clavicordio.

919 A los facultativos toca escoger entre los temperamentos propuestos. Como quiera, sígase el que se quisiere, las alteraciones que ocasionare en la harmonía, serán muy poco ó nada perceptibles para el oído, el qual ocupado incesantemente en concordarse con el bajo fundamental, tolera á poca costa estas alteraciones, ó por mejor decir no las repara, porque suple por sí lo que les falta á los intervalos para que sean cabales.

Dos esperimentos diarios y muy simples confirman lo que acabamos de decir. Óigase una voz que canta acompañada de muchos instrumentos, bien que el temperamento de la voz, y los de dichos instrumentos discrepen unos de otros; sin embargo nadie se ofende de la especie de discordancia que de aquí debería originarse, porque el oído supone cabales intervalos cuya diferencia no aprecia.

Otro esperimento. Si se pulsan las tres teclas del órgano *mi*, *sol*, *si*, no se oye mas que la postura perfecta menor, bien que por la construccion del instrumento, *mi* hace resonar *sol* ✱; *sol* hace resonar *re*, y *si* hace resonar *fa* ✱; por manera que al oído le hieren á un tiempo todos estos sones *re*, *mi*, *fa* ✱, *sol*, *sol* ✱, *si*. ¡Quantas disonancias á un tiempo, y quanto habrían de mortificar el oído, á no ser que le distrae la postura perfecta que le tiene preocupado!

De los Reposos ó Cadencias.

920 En un bajo fundamental que procede por quintas,

tas, hay siempre ó puede haber reposo de un son á otro; pero hay reposos mas ó menos señalados y por lo mismo mas ó menos perfectos unos que otros. Si subimos una quinta, si vamos, por egemplo, de *ut* á *sol*, el generador pasa á la una de sus quintas, y esta quinta ya existía antes en su generador; pero el generador ya no existe en esta quinta; y el oído, para quien este generador es el principio de toda la harmonía y de toda la melodía, desea volver á él. Así, el paso de un son á su quinta subiendo, se llama *Reposo imperfecto* ó *Cadencia imperfecta*; pero el paso de un son á su quinta bajando, como de *sol* á *ut*, se llama *Cadencia perfecta* ó *Reposo absoluto*; entonces el producto vuelve al generador, y se halla en el mismo generador con el qual resuena.

921 Entre los reposos absolutos, los hay, digámoslo así, mas absolutos, esto es, mas perfectos unos que otros. Así, en el bajo fundamental,

ut, *sol*, *ut*, *fa*, *ut*, *sol*, *re*, *sol*, *ut*

que dá, conforme hemos visto, la escala diatónica de los modernos, hay reposo absoluto de *re* á *sol*, igualmente que de *sol* á *ut*; sin embargo este último reposo absoluto es mas perfecto que el precedente, porque el oído preocupado del modo de *ut* que ya oyó tres veces antes, desea volver al mismo generador *ut*, y lo consigue con el reposo absoluto *sol ut*.

922 Una vez que hay reposo de un son á otro en el bajo fundamental, hay tambien reposo de un son á otro

en la escala diatónica que de él se deriva, y este bajo representa; y como el reposo absoluto *sol ut*, que remata en el generador *ut*, es el mas perfecto de todos en el bajo fundamental, el reposo de *si* á *ut*, que le corresponde en la escala, y remata igualmente en el generador, es por la misma razon el mas perfecto de todos en el orden ditónico subiendo.

923 Es, pues, ley de la naturaleza misma, que quando se ha de subir diatónicamente al generador de un modo, se ha de pasar por la tercera mayor de la quinta de dicho generador. Esta tercera mayor que forma con el generador un semitono, se llama por esta razon *Nota sensible*, como que anuncia el generador, y prepara el mas perfecto de todos los reposos.

Del Modo menor, y de su Escala diatónica.

924 Hemos declarado (872...875) como y por qué principios se puede formar la postura menor *ut mi* b *sol ut*, que es la postura característica del género ó modo menor. Lo que allí digimos tomando *ut* por son principal y fundamental, lo hubiéramos podido decir igualmente tomando por son principal ó fundamental otro tono qualquiera de la escala; pero como en la postura menor *ut mi* b *sol ut*, hay un *mi* b que no está en la escala ó diapason ordinario, substituiremos en su lugar, para mayor facilidad, otra postura tambien menor y enteramente semejante, cuyos sones todos están en la escala.

La

925 La escala nos suministra tres posturas de esta especie, es á saber *re fa la re*, *la ut mi la*, *mi sol si mi*; entre estas tres escogeremos *la ut mi la*, porque esta postura sin llevar bemol ni sustenido alguno, tiene dos sones comunes con la postura mayor *ut mi sol ut*, siendo por otra parte el uno de ellos el mismo son *ut*; por manera que esta postura parece que tiene la relacion mas inmediata y la mas sencilla al mismo tiempo con la postura *ut mi sol ut*. Esta preferencia que damos á la postura *la ut mi la* respecto de otra postura menor, no es precisa para lo que vamos á declarar acerca de la escala diatónica del modo menor; hubiéramos podido preferir igualmente otra postura menor qualquiera; solo nos obliga á dar la preferencia á la postura *la ut mi la* un motivo de conveniencia.

926 Reparemos desde luego que en qualquier modo, menor ó mayor, llamamos *Tónica* al son principal que lleva la postura perfecta mayor ó menor; así, *ut* es tónica en el modo de *ut*, *la* en el de *la* &c. Sentado esto,

927 Hemos manifestado como los tres sones *fa*, *ut*, *sol* que componen el modo de *ut* (881), entre los quales el último y el primero, *sol*, *fa*, son las dos quintas de *ut*, la una subiendo, la otra bajando, dan la escala *si*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la* del modo mayor, por medio del bajo fundamental *sol*, *ut*, *sol*, *ut*, *fa*, *ut*, *fa*: Tomemos igualmente los tres sones *re*, *la*, *mi*, que constituyen el modo de *la*, por la misma razon que los sones *fa*, *ut*, *sol* constituyen el modo de *ut*; y compongamos con ellos este bajo

fundamental, de todo puntó semejante al primero, *mi*, *la*, *mi*, *la*, *re*, *la*, *re*; pongamos despues encima de cada uno de estos sones uno de sus sones harmónicos, conforme hicimos antes (887 y sig.) para la primera escala del modo mayor,

Primera escala del modo menor.

Sol x,	*La*,	*Si*,	*Ut*,	*Re*,	*Mi*,	*Fa*
Tercera mayor.			Tercera menor.			Tercera menor.
Mi,	*La*,	*Mi*,	*La*,	*Re*,	*La*,	*Re*

Bajo fundamental.

con la diferencia de que á los sones *re* y *la* del bajo fundamental les daremos la tercera menor para caracterizar el modo menor, y sacaremos la escala diatónica del modo menor.

Sol x, *la*, *si*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*.

928 El *sol* x que corresponde al *mi* del bajo fundamental, forma con este *mi* una tercera mayor, bien que el modo es menor; por la razon que la tercera de la quinta del son fundamental ha de ser mayor (923), una vez que de esta tercera se pasa al son fundamental *la*.

929 Verdad es que con darle á *mi* su tercera menor *sol*, subiríamos tambien al *la* diatónicamente; pero este modo de subir al *la* sería menos perfecto que el de an-

antes; porque (922) el reposo absoluto ó cadencia perfecta *mi*, *la* que se halla en el bajo fundamental, se ha de representar del modo mas perfecto en las dos notas de la escala diatónica que la corresponden, particularmente quando la una de dichas dos notas es la tónica misma *la*, en la qual se hace el reposo. De donde se sigue que la nota precedente debe ser *sol* ✱, antes que *sol*; porque como *sol* ✱ está contenido en *mi* (862) representa mas perfectamente la nota *mi* del bajo, que la nota *sol* que no está contenida en *mi*.

930 Entre la escala

sol ✱, *la*, *si*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*,

y la escala

si, *ut*, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*

que la corresponde en el modo mayor se nota una diferencia, es á saber, que desde el *mi* al *fa* que son los dos últimos sones de la primera escala, no hay mas que un semitono; siendo así que desde el *sol* al *la*, que son los dos últimos sones de la segunda, hay un tono entero. Ademas de esta diferencia se reparan otras muchas.

931 Para darlas á conocer y manifestar su origen, empezaremos formando una nueva escala diatónica del modo menor, parecida á la segunda escala del modo mayor

ut, *re*, *mi*, *fa*, *sol*, *la*, *si*, *ut*.

Esta última escala se ha formado, conforme hicimos patente (898), por medio del bajo fundamental *fa*, *ut*, *sol*, *re* dispuesto de este modo

ut,

ut, *sol*, *ut*, *fa*, *ut*, *sol*, *re*, *sol*, *ut*.

Tomemos tambien el bajo fundamental *re*, *la*, *mi*, *si*, y démosle la siguiente colocacion

la, *mi*, *la*, *re*, *la*, *mi*, *si*, *mi*, *la*;

nos dará esta escala

la, *si*, *ut*, *re*, *mi*, *mi*, *fa* ✱, *sol* ✱, *la*

en la qual *ut* forma una tercera menor con *la* que le corresponde en el bajo fundamental, cuya circunstancia caracteriza el modo menor; y al contrario *sol* ✱ forma una tercera mayor con *mi* del bajo fundamental, porque *sol* ✱ sube al *la* (928 y 929).

932 En la misma escala se vé tambien un *fa* ✱ que no está en la primera,

sol ✱, *la*, *si*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*,

donde el *fa* es natural. Esto nace de que en la primera escala, *fa* es tercera menor del *re* del bajo; y en la segunda, *fa* ✱ es quinta del *si* del bajo.

933 Por consiguiente las dos escalas del modo menor discrepan todavía mas una de otra, en orden á esto que las escalas del modo mayor; porque esta diferencia de un semitono no se halla entre las dos escalas del modo mayor. Solo hemos notado (907) alguna entre el valor de *la* en las dos escalas, pero es mucho menos que un semitono.

934 Esto dá la razon porque el *fa* y el *sol* son sustenidos en el modo menor subiendo; y si el *fa* es natural en la primera escala *sol* ✱, *la*, *si*, *ut*, *re*, *mi*, *fa*,

es

es porque este *fá* no puede subir al *sol* ✱ (891).

935 No sucede otro tanto al bajar; porque la quinta *mi* del generador no ha de llevar la tercera mayor *sól* ✱, sinò en el caso de que esta quinta *mi* bàge al generador *la* para formar un reposo perfecto (923 y 929), y en este caso la tercera mayor *sol* ✱ sube al generador *la*. Pero el bajo fundamental *la mi* puede dar bajando, la escala *la sol* nàtural, còn tal que el *sol* no vuelva á subir al *là*.

936 Es mucho mas dificultoso de esplicar porque el *fa* que sigue al mismo *sol* bajando, es natural y no sustenido; porque el bajo fundamental

la, *mi*, *si*, *mi*, *la*, *re*, *la*, *mi*, *la*

dá bajando

la, *sol*, *fa* ✱, *mi*, *mi*, *re*, *ut*, *si*, *la*.

Es evidente que el *fa* no puede dejar de ser sustenido, pues *fa* ✱ es la quinta de la nota *si* del bajo fundamental. No obstante enseña la esperiencia que el *fa* es natural bajando en la escala diatónica del modo menor de *là*, especialmente quando el *sol* que tiene antes es natural; y no podemos negar que en este punto no satisface el bajo fundamental.

Rameau creyó apear esta dificultad con decir que en la escala diatònica del modo menor bajando *la*, *sol*, *fà*, *mi*, *re*, *ut*, *si*, *la*, se puede considerar *sol* como una nota de paso que solo se añade para que haga buen cantar, y bajar diatónicamente al *fa* natural; esto se echa de ver, añade Rameau, en este bajo fundamental,

la,

la, re, la, re, la, mi, la,

que dá

la, fa, mi, re, ut, si, la,

y se puede mirar, segun dice, como la verdadera escala del modo menor bajando, en la qual se añade *sol* natural entre *la* y *fa* para guardar el orden diatónico.

Parece que no hay otro modo de salir de la dificultad propuesta poco ha; pero quedamos con la duda de que dege satisfecho al lector esta solucion, y de que verá con algun sentimiento que hablando con verdad el bajo fundamental no dá escala diatónica del modo menor bajando, siendo así que el mismo dá tambien la escala diatónica del mismo modo subiendo, y la escala diatónica del modo mayor ya subiendo ya bajando.

937 Quando decimos que el *sol* es natural bajando en la escala diatónica del modo menor de *la*, queremos decir que este *sol* no es indispensablemente sustenido al bajar, conforme lo es al subir; porque dicho *sol* puede muy bien ser sustenido bajando en el modo menor de *la*, y se ven egemplos de esto en muchos autores de Música. Verdad es que quando hallamos el *sol* sustenido al bajar, en el modo menor de *la*, no podemos decir si el modo es menor, hasta encontrar el *fa* natural ó el *ut* natural, que ambos caracterizan el modo menor, es á saber, el *ut* natural subiendo y bajando; y el *fa* natural bajando.

De

De los Modos relativos.

938 Llamamos modos relativos, dos modos de tal naturaleza que se puede pasar del uno al otro. Así, ya hemos visto como el modo mayor de *ut* es relativo del modo mayor de *fa* y del de *sol.* Lo dicho hasta aquí manifiesta quanta relacion hay entre el modo mayor de *ut* y el modo menor de *la.* Porque 1.° las posturas perfectas, la una mayor *ut mi sol ut*, la otra menor *la ut mi la*, que caracterizan cada uno de los dos géneros, tienen dos sones comunes *ut mi.* 2.° La escala diatónica del modo menor de *la* bajando, consta puntualmente de los mismos sones que la escala diatónica del modo mayor de *ut.*

Esta es la razon porque se pasa con tanta facilidad y tan naturalmente del modo mayor de *ut* al modo menor de *la*, ó del modo menor de *la* al modo mayor de *ut*, conforme lo atestigua la esperiencia.

939 En el modo menor de *mi* la postura perfecta menor *mi sol si mi*, que le caracteriza, tambien tiene dos sones comunes, es á saber, *mi sol* con la postura perfecta mayor *ut mi sol ut* que caracteriza el modo mayor de *ut.* Pero el modo menor de *mi* tiene menos afinidad con el modo mayor de *ut*, que no el modo menor de *la*; porque la escala diatónica del modo menor de *mi* al bajar no tiene, como la del modo menor de *la*, todos sus sones comunes con la escala de *ut.* Con efecto, dicha escala es *mi, re, ut, si, la, sol, fa* ✻, *mi*, donde hay un *fa* sustenido que

que no tiene el modo de *ut*. Aunque el modo menor de *mi* sea menos correlativo al modo mayor de *ut* que el de *la*, no por esto se deja de ir algunas veces del uno al otro, y se hallan egemplos en las obras de Música.

Tambien se echa de ver que quando se pasa de un modo á otro por un intervalo de tercera, sea subiendo, sea bajando, como de *ut* á *la*, ó de *la* á *ut*, de *ut* á *mi*, ó de *mi* á *ut*, el modo de mayor se hace menor, y de menor mayor.

940 Hay todavía otro modo menor al qual se puede ir inmediatamente desde el modo mayor de *ut*. Este modo es el modo menor del mismo *ut*, en el qual la postura perfecta menor *ut mi* b *sol ut* tiene dos sones comunes *ut sol*, con la postura perfecta mayor *ut mi sol ut*. Por lo mismo se estila mucho pasar del modo mayor de *ut* al modo menor de *ut*, ó del modo menor de *ut* al modo mayor de *ut*.

De la Disonancia.

941 Dejamos probado (882) que el modo de *ut* (*fa ut sol*) tiene dos sones comunes con el modo de *sol* (*ut sol re*), y dos sones comunes con el modo de *fa* (*si* b *fa ut*); por consiguiente este movimiento de bajo *ut sol* puede corresponder al modo de *ut* y al modo de *sol*, así como el movimiento de bajo *fa ut*, ó *ut fa* puede corresponder al modo de *ut* ó al modo de *fa*. Luego quando un bajo fundamental pasa desde *ut* á *fa* ó á *sol*,

no

no sabemos todavía en qué modo estamos. Importa sin embargo saberlo, y distinguir por algun medio entre el generador y sus quintas.

942 Esto se consigue juntando uno con otro los sones *sol* y *fa* en una misma harmonía, esto es, añadiendo á la harmonía *sol si re* de la quinta *sol*, la otra quinta *fa* de este modo *sol si re fa*; como este *fa* añadido es la séptima de *sol*, disuena con *sol* (861); y este es el motivo de llamarse *Postura disonante* ó *Postura de séptima* la postura *sol si re fa*. Sirve para distinguir la quinta *sol* del generador *ut*, que lleva constantemente y sin mezcla alguna la postura perfecta *ut mi sol ut* que nos dá la naturaleza (875). Esto manifiesta que quando pasamos de *ut* á *sol*, pasamos al mismo tiempo de *ut* á *fa*, porque *fa* está comprendido en la postura de *sol*; y con esto queda enteramente determinado el modo de *ut*, porque no hay mas modo que este al qual pertenezcan á un tiempo los sones *fa* y *sol*.

943 Veamos ahora qué hemos de añadir á la harmonía *fa la ut* de la quinta *fa* debajo del son generador, para que podamos distinguir esta harmonía de la del generador. Parece á primera vista que se la debe añadir la otra quinta *sol*, á fin de que el generador *ut*, pasando á *fa*, pase al mismo tiempo á *sol*; y con esto quede determinado el modo. Pero de introducir el *sol* en la postura *fa la ut* resultarían dos segundas de seguida *fa sol*, *sol la*, esto es, dos disonancias cuya union sería muy desagradable

ble para el oído, y es preciso escusar. Porque si para distinguir el modo alteramos la harmonía de esta quinta *fa* en el bajo fundamental, conviene alterarla lo menos que se pueda.

944 Por este motivo en lugar de *sol*, tomaremos su quinta *re*, que es el son que mas se la arrima; y tendremos para la quinta *fa* la postura *fa la ut re*, que se llama *Postura de sexta grande.*

Aquí conviene reparar la analogía que hay entre la harmonía de la quinta *sol*, y la de la quinta *fa.*

945 La quinta *sol* mas arriba del generador tiene una postura toda formada de terceras subiendo desde *sol*, *sol si re fa*; pero como la quinta *fa* está mas abajo del son generador *ut*, hallaremos bajando desde *ut* á *fa* por terceras *ut*, *la*, *fa re*, los mismos sones que componen la postura *fa la ut re*, que hemos dado á la quinta *fa.*

946 Tambien se echa de ver que la alteracion de la harmonía de dos quintas solo consiste en la tercera menor *re fa*, que se añade al uno y otro lado á la harmonía de estas dos quintas.

Del doble uso de la Disonancia.

947 La semejanza de los sones con sus octavas hace patente que la postura *fa la ut re* es en sustancia la misma que la postura *re fa la ut*, y que esta postura *re fa la ut*, tomándola al revés, no es otra cosa que la postura *ut la fa re* trastornada que hallamos (945) bajan-

jando por terceras desde el generador *ut.*

948 La postura *re fa la ut* es una postura de séptima parecida á la postura *sol si re fa*; con la diferencia, sin que haya otra, de que en esta la tercera *sol si* es mayor; siendo así que en la otra la tercera *re fa* es menor. Si el *fa* fuera sustenido, la postura *re fa* ✱ *la ut* sería una verdadera postura de dominante, parecida á la postura *sol si re fa*; y como la dominante *sol* puede bajar á *ut* en el bajo fundamental, la dominante *re* que lleva la tercera mayor *fa* ✱ tambien podría bajar á *sol.*

949 Ahora bien, aunque se mude el *fa* ✱ en *fa* natural, la nota fundamental *re* de esta postura *re fa la ut* tambien podrá bajar á *sol*; porque la mudanza del *fa* ✱ en *fa* natural, no hará mas que conservar la impresion del modo de *ut*, en lugar de la del modo de *sol*, que el *fa* ✱ hubiera introducido; por lo demas el son *re* siempre guardará su caracter de dominante por medio de la disonancia *ut* que forma su séptima. Así, en esta postura *re fa la ut*, se puede mirar *re* como una dominante imperfecta; digo *imperfecta*, porque lleva la tercera menor *fa*, en lugar de la mayor *fa* ✱; este es el motivo porque de aquí en adelante la llamaremos *Dominante* no mas, para distinguirla de la dominante *sol*, que llamaremos *Dominante tónica.*

950 Así los sones *fa* y *sol* que no pueden estar inmediatamente uno despues de otro en un bajo fundamental (879), quando no llevan mas que las posturas per-

fectas *fa la ut*, *sol si re*, pueden estarlo, si se le añade *re* á la harmonía del primero, y *fa* á la harmonía del segundo, y se trastorna la primera postura, esto es, si se les dá á las dos posturas esta forma *re fa la ut*, *sol si re fa*.

951 Fuera de esto, como la postura *fa la ut re* puede estar inmediatamente despues de la postura perfecta *ut mi sol ut*, síguese por las mismas razones, que despues de la postura *ut mi sol ut* podrá estar la postura *re fa la ut*; esto no implica con lo que digimos (880), es á saber, que los sones *ut* y *re* no pueden estar inmediatamente uno despues de otro en el bajo fundamental; porque allí suponíamos que *ut* y *re* llevasen uno y otro la postura perfecta mayor; siendo así que en el caso actual, *re* lleva la tercera menor *fa* y tambien el son *ut*, que enlaza la postura *re fa la ut* con la que la precede, *ut mi sol ut*, y en la qual se halla *ut*. Fuera de esto, esta postura *re fa la ut* no es otra cosa, hablando con propiedad, que la postura *fa la ut re* trastornada, y disfrazada, digamoslo así.

952 Este modo de presentar la postura de la subdominante con dos formas diferentes, y de usarla con ambas, se llama *doble uso*; y es el origen de una de las mas hermosas variaciones de la harmonía; vamos á manifestar las ventajas que nos proporciona.

Pero como el doble uso es una especie de licencia, no se debe usar sino con mucha circunspeccion: acabamos de ver como la postura *re fa la ut* considerándola como la postura *fa la ut re* trastornada, se puede dar inmediatamente des-

despues de la postura ***ut mi sol ut***; pero esto no es recíproco; y aunque despues de ***fa la ut re*** se pueda dar inmediatamente la postura ***ut mi sol ut***, no por esto hemos de inferir que la postura ***re fa la ut***, considerándola como la postura ***fa la ut re*** trastornada, pueda estar inmediatamente antes de la postura ***ut mi sol ut***, por la razon que diremos á su tiempo.

Reglas del doble uso.

953 Hemos manifestado (898 y sig.) como la escala diatónica ú ordinaria se origina del bajo fundamental ***fa***, ***ut***, ***sol***, ***re***, dando dos veces el son ***sol*** en esta escala; por manera que esta escala se compone primitivamente de dos tetracordos semejantes, el uno en el modo de ***ut***, el otro en el de ***sol***. Por medio del doble uso se puede conservar la impresion del modo de ***ut*** en toda la estension de la escala, y escusar dar dos veces el ***sol***. Para esto basta formar el bajo fundamental siguiente,

ut, ***sol***, ***ut***, ***fa***, ***ut***, ***re***, ***sol***, ***ut***,

en el qual se considera el ***ut*** como que lleva la postura perfecta ***ut mi sol ut***; ***sol***, la postura ***sol si re fa***; ***fa***, la postura ***fa la ut re***; y ***re***, la postura ***re fa la ut***. Lo que decíamos poco ha hace patente que ***ut*** puede en este caso subir á ***re*** en el bajo fundamental, y ***re*** bajar á ***sol***; y que la impresion del modo de ***ut*** la mantiene el ***fa*** natural que forma la tercera menor ***re fa***, en lugar de la mayor que ***re*** debería llevar naturalmente.

954 Este bajo fundamental dará, como es patente, la escala diatónica ordinaria

ut, re, mi, fa, sol, la, si, UT,

que por lo mismo estará toda en el modo de *ut*; y si quisiéramos que el segundo tetracordo estuviese en el modo de *sol*, lo conseguiríamos con substituir el *fa* ✻ al *fa* natural, en la harmonía de *re*.

955 Pero hemos de considerar que este bajo fundamental *ut sol ut fa ut re sol ut*, que ha dado la escala *ut re mi fa sol la si UT* subiendo, no puede, trastornándole y tomándole al reves como sigue, *ut sol re ut fa ut sol ut*, dar la escala diatónica *UT si la sol fa mi re ut* bajando. Con efecto, de la postura *sol si re fa*, no podemos pasar á la postura *re fa la ut*, ni de esta á la postura *ut mi sol ut*. Por lo qual para formar el bajo fundamental de la escala *UT si la sol fa mi re ut* bajando, es preciso, ó que nos contentemos con trastornar el bajo fundamental propuesto antes (898), como sigue *ut sol re sol ut fa ut sol ut*, en el qual el segundo *sol* y el segundo *ut* corresponden á la sola nota *sol* de la escala; ó si no, que formemos este bajo fundamental *ut sol re sol ut sol ut*, en el qual todas las notas llevan la postura perfecta mayor, á excepcion del segundo *sol* que llevará la postura de séptima *sol si re fa*, y corresponde á las dos notas de la escala *sol*, *fa*, que están ambas en la postura *sol si re fa*.

Escójase el que se quisiere de estos dos bajos, es eviden-

dente que ninguno de ellos estará todo entero en el modo de *ut*, estará en el modo de *ut*, y en el de *sol*. De donde se sigue que el doble uso que dá á la escala un bajo fundamental todo en un mismo modo subiendo, no puede hacer lo mismo bajando, y que el bajo fundamental de la escala bajando estará indispensablemente en los dos modos.

956 Síguese de lo dicho (954) que despues del generador *ut* se puede dar subiendo diatónicamente, ó una dominante tónica (*re fa* ✱ *la ut*), ó una simple dominante (*re fa la ut*).

957 En el modo menor de *la*, la dominante tónica *mi* siempre debe llevar la tercera mayor *mi sol* ✱, quando esta dominante *mi* baja al generador *la* (929); y la postura de esta dominante será *mi sol* ✱ *si re*, de todo punto parecida á *sol si re fa*. Por lo que mira á la subdominante *re*, llevará primero la tercera menor *fa*, para señalar el modo menor, y se añadirá *si* mas arriba de su postura *re fa la*, de este modo *re fa la si*, cuya postura es parecida á la postura *fa la ut re*; y como de la postura *fa la ut re* hemos sacado la postura *re fa la ut*, de la postura *re fa la si*, sacaremos tambien una nueva postura de séptima *si re fa la*, que será *el doble uso* en el modo menor.

958 Esta postura *si re fa la* se puede usar para conservar la impresion del modo de *la* en la escala diatónica del modo menor, y para escusar el dar dos veces el son *mi*; pero entonces será menester hacer sustenido el *fa*,

y transformar dicha postura en *si re fa* ✱ *la*, por ser *fa* ✱ la quinta de *si*, segun digimos en otro lugar; esta postura es entonces la postura *re fa* ✱ *la si* trastornada, en la qual la subdominante *re* lleva la tercera mayor; y esto no tiene nada de estraño. Porque en el modo menor de *la*, el segundo tetracordo *mi fa* ✱ *sol* ✱ *la* es cabalmente el mismo que sería en el modo mayor de *la*; es así que en el modo mayor de *la*, la subdominante *re* ha de llevar la tercera mayor *fa* ✱.

959 Todo esto hace patente que en el modo menor cabe un número mucho mayor de variedades que en el modo mayor; esto proviene de que el modo mayor es obra de la naturaleza sola, y el modo menor es obra de la naturaleza y del arte. Pero tambien le ha dado la naturaleza al modo mayor, de la qual se origina inmediatamente, una fuerza y un vigor que no tiene el modo menor.

De las diferentes especies de Posturas de Séptima.

960 Aunque la disonancia añadida á la dominante y á la subdominante es indicada en algun modo por la naturaleza (941 y sig.), es sin embargo obra del arte; pero como introduce variedades hermosas en la harmonía, veamos si aprovechando esta circunstancia podrá el arte adelantar algo mas.

961 Yá tenemos tres especies diferentes de posturas de séptima, es á saber,

1.° La postura *sol si re fa*, que se compone de una

ter-

tercera mayor, y dos terceras menores.

2.° La postura *re fa la ut*, ó *si re fa* ✻ *la*, que se compone de una tercera mayor entre dos menores.

3.° La postura *si re fa la*, que se compone de dos terceras menores y una tercera mayor.

962 Tambien se usan en la harmonía otras dos especies de postura de séptima; la una se compone de una tercera menor entre dos mayores, *ut mi sol si*, ó *fa la ut mi*; la otra se compone toda de terceras menores *sol* ✻ *si re fa.* Estas dos posturas que á primera vista parece que no pueden entrar en la harmonía, si atendemos á las reglas antecedentes, se usan no obstante con felicidad en el bajo fundamental. La razon es esta.

963 Por lo dicho arriba, si quéremos añadir una séptima á la postura *ut mi sol*, para transformar *ut* en dominante, no podemos añadirla mas que *si* b; y en este caso *ut mi sol si* b sería la postura de dominante tónica en el modo de *fa*, así como *sol si re fa* es la postura de dominante tónica en el modo de *ut*; pero si queremos conservar la impresion del modo de *ut* en la harmonía, entonces se ha de mudar el *si* b en *si* natural, y la postura *ut mi sol si* b, se transforma en *ut mi sol si.* Lo propio diremos de la postura *fa la ut mi*, que es la postura *fa la ut mi* b, en la qual se substituye el *mi* natural en lugar del *mi* b, á fin de conservar la impresion del modo de *ut* ó del modo de *fa.*

A mas de esto, en las posturas como *ut mi sol si*,

fa la ut mi, los sones *si* y *mi*, bien que disuenan con *ut* en el primer caso, y con *fa* en el segundo, son no obstante soportables para el oido, porque estos sones *si* y *mi* (862) están comprendidos, el primero en la nota *mi* de la postura *ut mi sol si*, y en la nota *sol* de la misma postura; el segundo en la nota *la* de la postura *fa la ut mi*, y en la nota *ut* de la misma postura. Por consiguiente todo autoriza al profesor para que introduzca las notas *si* y *mi* en las dos posturas espresadas.

964 Pero no es lícito introducir en la harmonía una postura como esta *ut mi* b *sol si*, en la qual *mi* es bemol, porque el *si* no está contenido en el *mi* b de esta postura. Lo propio diremos de otras muchas posturas como *si re fa la* ✻, *si re* ✻ *fa la* &c. Verdad es que el *la* de la última postura está comprendido en el *fa*, pero no en *re* ✻, y este *re* ✻ forma á mas de eso con *fa* y *la* una disonancia duplicada, la qual unida á la disonancia *si fa*, haría ingrata al oido dicha postura. No obstante, se usa algunas veces esta postura.

965 Por lo que mira á la postura de séptima *sol* ✻ *si re fa*, toda formada de terceras menores, la podemos considerar como formada de la union de las dos posturas de la dominante, y de la subdominante en el modo menor. Con efecto, en el modo menor de *la*, por egemplo, las dos posturas propuestas son *mi sol* ✻ *si re*, y *re fa la si*, cuya union dá *mi*, *sol* ✻, *si*, *re*, *fa*, *la*; pero si se dejára así esta postura, sería ingrata al oido por razon de las di-

so-

sonancias multiplicadas *re mi*, *mi fa*, *la sol* ✻, *la si*, *re sol* ✻ (861); por manera que para salvar este inconveniente se suprime desde luego el generador *la* (862) que está como suplido por *re*, y la quinta ó dominante *mi*, cuyo lugar se considera que ocupa la nota sensible *sol* ✻; no queda, pues, mas que la postura *sol* ✻ *si re fa*, toda formada de terceras menores, y en la qual se considera como subdominante la dominante *mi*; de modo que esta postura *sol* ✻ *si re fa* representa la postura de dominante tónica *mi sol* ✻ *si re*, á la qual se ha añadido la postura de subdominante *re fa la si*; pero en la qual siempre se considera como nota principal la dominante *mi*.

966 Luego yá que de la postura *mi sol* ✻ *si re* se vá á la postura perfecta *la ut mi la*, y recíprocamente; tambien se puede pasar de la postura *sol* ✻ *si re fa* á la postura *la ut mi la*, y de esta última postura á la postura *sol* ✻ *si re fa*.

De la Preparacion de las Disonancias.

967 En toda postura de séptima la nota superior, esto es, la séptima mas arriba de la fundamental, se llama *Disonancia*; así *fa* es la disonancia en la postura *sol si re fa*; *ut*, en la postura *re fa la ut* &c.

968 Quando se dá la postura *sol si re fa* despues de la postura *ut mi sol ut*, como se puede y sucede con frecuencia, es evidente que la disonancia *fa* no se halla en la postura antecedente *ut mi sol ut*; y con efecto no de-

debe hallarse, porque esta disonancia no es mas que la subdominante añadida á la harmonía de la dominante para determinar el modo; y la subdominante no se halla en la harmonía del generador.

969 Por la misma razon quando se dá la postura de subdominante *fa la ut re* despues de la postura *ut mi sol ut*, la nota *re* que forma la disonancia con *ut* no se halla en la postura precedente.

No sucede lo propio quando la postura *re fa la ut* se sigue á la postura *ut mi sol ut*; porque *ut* que forma disonancia en la segunda postura, está como consonancia en la antecedente.

970 En general, por ser la disonancia obra del arte, especialmente en las posturas que no son de dominante tónica ó de subdominante; el único remedio que hay para que no desagrade por muy estraña en la postura, consiste en anunciarla, digamoslo así, al oido, introduciéndola en la postura antecedente, y haciéndola servir con esto para enlazar las dos harmonías; de donde se saca la regla siguiente.

971 En toda postura de séptima, que no es postura de dominante tónica, esto es (949), que no se compone de una tercera mayor antes de dos terceras menores, la disonancia que forma dicha postura se debe hallar como consonancia en la postura antecedente.

Esto se llama *preparar la disonancia*.

972 De aquí se sigue que para preparar la disonancia, es indispensable que el bajo fundamental tenga un movi-

vimiento de segunda, como

UT mi sol ut, RE fa la ut;

ó baje de tercera, como

UT mi sol ut, LA ut mi sol;

ó baje de quinta, como

UT mi sol ut, Fa la ut mi;

en ninguno de los demás casos estará preparada la disonancia, y es facil comprobarlo. Si, por egemplo, el bajo fundamental sube de tercera, como *ut mi sol ut*, *mi sol si re*, la disonancia *re* no se halla en la postura *ut mi sol ut*. Lo mismo digo de *ut mi sol ut*, *sol si re fa*, y de *ut mi sol ut*, *si re fa la*, en las quales el bajo fundamental sube de quinta ó baja de segunda.

973 En quanto á lo demás, quando despues de una tónica, esto es, una nota que lleva postura perfecta, se sigue una dominante por un intervalo de quinta ó tercera, se puede mirar este movimiento como un movimiento de la misma tónica á otra tónica, que se ha transformado en dominante con añadirla la disonancia.

Fuera de esto, hemos visto (968 y 969) que la disonancia no necesita de preparacion en las posturas de dominante tónica y de subdominante; de donde se infiere que toda tónica que lleva postura perfecta se puede transformar en dominante tónica (si la postura perfecta fuere mayor), ó en subdominante (sea mayor ó menor la postura perfecta) añadiéndola de repente la disonancia.

Regla para salvar las disonancias.

974 Hemos visto (887 y sig. 898 y sig.) como la escala diatónica, tan natural para la voz, se forma de las harmonías de los sones fundamentales; de donde se deduce que entre las succesiones de los sones harmónicos la mas natural es la diatónica; luego para darla en algun modo á la disonancia quanto cabe el caracter de un son harmónico, es preciso que esta disonancia, en la parte de la música donde se halla, baje ó suba diatónicamente á otra nota, tal que sea una de las consonancias de la postura siguiente.

975 Pero en la postura de dominante tónica, antes debe bajar que subir, y daremos la razon. Sirva de egemplo la postura *sol si re fa* inmediatamente antes de la postura *ut mi sol ut*; la nota que forma la disonancia *fa* ha de bajar al *mi* antes que subir al *sol*, bien que ambos sones *mi* y *sol* se hallen en la postura siguiente *ut mi sol ut*; porque es mas natural y mas conforme al enlace que debe haber en cada parte del canto, que el *sol* esté en la misma parte que yá cantó el *sol*, mientras que la otra decia *fa*, conforme se vé aquí (primera y quarta voz).

Primera parte	*fa*	*mi*,
Segunda	*si*	*ut*,
Tercera	*re*	*ut*,
Quarta	*sol*	*sol*,
Bajo fundamental	*sol*	*ut*.

Por

976 Por lo mismo, en la postura de dominante simple *re fa la ut*, inmediatamente antes de *sol si re fa*, la disonancia *ut* debe bajar á *si* antes que subir á *re*.

977 Finalmente, con las mismas razones probaremos que en la postura de subdominante *fa la ut re*, la disonancia *re* debe subir al *mi* de la postura siguiente *ut mi sol ut*, antes de bajar á *ut*; de donde se sacan las reglas siguientes.

978 1.° En toda postura de dominante, sea tónica sea simple, la nota que forma la séptima, esto es, la disonancia, ha de bajar diatónicamente á una de las notas que forman consonancia en la postura siguiente.

2.° En toda postura de subdominante, la disonancia debe subir diatónicamente á la tercera de la postura siguiente.

979 Una disonancia que sube ó baja diatónicamente, conforme mandan estas dos reglas, se llama *Disonancia salvada*.

Resulta de estas reglas que la postura de séptima *re fa la ut*, aun quando se la considerára como la postura *fa la ut re* trastornàda, no se puede dar inmediatamente antes de la postura *ut mi sol ut*; porque no hay en esta última postura *si* ninguno al qual pueda bajar la disonancia *ut* de la postura *re fa la ut*.

De la Cláusula interrumpida.

980 En un bajo fundamental por quintas siempre hay,

hay, conforme lo hemos notado (920), un reposo mas ó menos perfecto de un son á otro; y por consiguiente tambien hay reposo mas ó menos perfecto de un son á otro en la escala diatónica que se origina del mismo bajo. Podemos probar con un esperimento muy simple que la causa del reposo en la melodía está únicamente en el bajo fundamental espreso ó suplido. Si alguno canta estas tres notas *ut re ut*, trinando el *re*; le parecerá acabado el canto despues del segundo *ut*, de manera que el oido no pedirá nada mas. Lo mismo sucederá si se acompaña el espresado canto con su bajo fundamental natural *ut sol ut*; pero si en lugar de este bajo se le dá estotro *ut sol la*, entonces el canto *ut re ut* yá no parecerá concluido, y el oido deseará que se prosiga. Este esperimento es facil de hacer.

981 Este paso *sol la*, donde la dominante *sol* sube diatónicamente al *la*, en vez de bajar de quinta al generador *ut*, como debería naturalmente, se llama *Cláusula interrumpida* ó *quebrantada*, porque la cláusula perfecta *sol ut* que el oido espera despues de la dominante *sol*, está, digamoslo así, quebrantada, y la ataja el paso desde *sol á la*.

982 Síguese de aqui que si el canto *ut re ut* parece finalizado quando no se le supone bajo alguno, es porque entonces se suple su bajo natural *ut sol ut*; pues el oido desea la continuacion de dicho canto, en precisándole á oir otro bajo.

983 Podemos considerar la cláusula interrumpida co-

como que trahe su origen del doble uso; porque del mismo modo que el doble uso no consiste mas que en un movimiento diatónico del bajo subiendo (947 y sig.). Con efecto, nada estorva el bajar de la postura *sol si re fa* á la postura *ut mi sol la*, haciendo subdominante la tónica *ut*, esto es, pasando de repente del modo de *ut* al modo de *sol*; pero bajar de *sol si re fa* á *ut mi sol la*, es lo mismo que subir de la postura *sol si re fa* á la postura *la ut mi sol*, transformando la postura de subdominante *ut mi sol la*, en postura de dominante imperfecta, segun las leyes del doble uso.

984 En esta especie de cláusula, la disonancia de la primera postura se salva bajando diatónicamente á la quinta de la postura siguiente. Por egemplo, en la cláusula interrumpida *sol si re fa*, *la ut mi sol*, la disonancia *fa* se salva bajando diatónicamente á la quinta *mi*.

985 Hay otra especie de cláusula llamada tambien cláusula interrumpida, donde la dominante baja de tercera á otra dominante, en vez de bajar de quinta á la tónica, como en este movimiento de bajo *sol si re fa*, *mi sol si re*; en la cláusula interrumpida, la disonancia de la primera postura se salva bajando diatónicamente á la octava de la nota fundamental de la postura siguiente, como se vé aquí donde *fa* se salva en la octava de *mi*.

986 La cláusula interrumpida trahe tambien en algun modo, á lo que nos parece, su origen del doble uso; porque supongamos estas dos posturas consecutivas *sol si*

re

re fa , *sol si re mi* , donde *sol* es succesivamente dominante tónica , y subdominante , esto es donde se pasa del modo de *ut* al modo de *re* ; si convertimos la segunda de estas dos posturas en postura de dominante , segun las leyes del doble uso , tendremos la cláusula interrumpida *sol si re fa*, *mi sol si re*.

Del Género Cromático.

987 La succesion ó bajo fundamental por quintas dá el género diatónico ordinario (898 y sig.) ; pero como la tercera mayor es uno de los harmónicos del son fundamental igualmente que la quinta , síguese que podemos formar bajos fundamentales por terceras mayores , así como hemos formado bajos fundamentales por quintas.

988 Luego si formamos este bajo *ut mi sol* ✻ , como los dos primeros sones llevan cada uno sus terceras mayores y sus quintas , es evidente que *ut* dará *sol* , y *mi* dará *sol* ✻ ; pero el semitono que se halla entre este *sol* y el *sol* ✻ es mucho menor que el semitono que se halla en la escala diatónica entre *mi* y *fa* , ó entre *si* y *ut* (*m*) ; esta es la razon porqué el semitono del *mi* al *fa* se llama *mayor* , y el otro se llama semitono *menor* (*n*).

989 Si el bajo fundamental se moviera por terceras menores , de este modo *ut* , *mi* b , cuyo movimiento es lícito , una vez manifestado el origen del modo menor (924 y sig.) , sacaríamos este canto *sol* , *sol* b , que tambien sería un semitono menor (*o*).

Los

990 Los principiantes entonan con mas trabajo el semitono menor que el mayor, y nos parece que podemos dar la razon. El semitono mayor que se halla en la escala diatónica, como *mi fa*, dimana de un bajo fundamental por quintas *ut fa*, esto es, de la succesion mas natural, y por este motivo mas facil para el oido. Al contrario, el semitono menor dimana de la succesion fundamental por terceras, menos natural que la primera, y esta es la razon porque para entonar el semitono menor los principiantes apelan al artificio siguiente. Supongamos, por egemplo, que quieran subir del *sol* al *sol* ✱; suben primero del *sol* al *la*, despues bajan del *la* al *sol* ✱ por el intervalo de un semitono mayor, porque este *sol* ✱ que es un semitono mayor mas bajo que el *la*, se halla un semitono menor mas alto que el *sol.*

991 Todo movimiento del bajo fundamental por terceras, sean menores ó mayores, subiendo ó bajando, dá el semitono menor: hémoslo probado respecto de las terceras subiendo. La série de las terceras menores bajando *ut la*, dá *ut ut* ✱ (*p*), y la serie de las terceras mayores bajando *ut la* b, dá *ut ut* b (*q*).

992 El semitono menor constituye el género que llamamos *Cromático*; y con el género diatónico que se origina de la succesion de las quintas (887 y sig. 898 y sig.), incluye toda la melodía.

Del Género Enharmónico.

993 Los dos estremos *ut sol* ✱ del bajo fundamental por terceras mayores *ut mi sol* ✱, dan este canto *ut si* ✱, y estos dos sones *ut si* ✱ discrepan uno de otro un corto intervalo llamado *quarto de tono enharmónico* (*r*) que es la diferencia que vá del semitono mayor al semitono menor (*s*); este quarto de tono es imperceptible para el oido, y no se puede dar en muchos de nuestros instrumentos. Hay sin embargo un método de egecutarle del modo siguiente, ó por mejor decir de suplir su falta al oido.

994 Hemos declarado (965) cómo se introduce en el modo menor la postura *sol* ✱ *si re fa*, toda compuesta de terceras menores cabales, ó supuestas tales. Como esta postura hace oficios de postura de dominante (965), se puede pasar desde esta postura á la de la tónica ó generatriz *la* (966); pero es de advertir:

1.° Que esta postura *sol* ✱ *si re fa* compuesta de terceras menores, se puede trastornar de tres modos diferentes *si re fa sol* ✱, *re fa sol* ✱ *si*, *fa sol* ✱ *si re*; y que en estos tres diferentes estados siempre se quedará formada de terceras menores, ó por lo menos solo faltará un quarto de tono enharmónico para que la tercera menor entre *fa* y *sol* ✱ sea cabal; porque la tercera menor cabal, como la de *mi* á *sol* en la escala diatónica, se compone de un semitono mayor y de un tono mayor; pero de *fa* á *sol* hay un tono mayor, y de *sol* á *sol* ✱, no hay mas que un semitono me-

menor. Luego falta (993) un quarto de tono enharmónico, para que la tercera menor *fa sol* ✻ sea cabal.

2.° Pero como este quarto de tono es desconocido en muchos instrumentos, é imperceptible para el oido, el oido toma las tres posturas siguientes

si re fa sol ✻
re fa sol ✻ *si*
fa sol ✻ *si re*

que son una misma, por posturas compuestas cada una de terceras menores cabales.

Y como la postura *sol* ✻ *si re fa* pertenece al modo menor de *la*, donde *sol* ✻ es la nota sensible; la postura *si re fa sol* ✻, ó *si re fa la* b, pertenecerá por la misma razon al modo menor de *ut*, donde *si* es la nota sensible. Por lo mismo la postura *re fa sol* ✻ *si*, ó *re fa la* b *ut* b pertenecerá al modo menor de *mi* b; y la postura *fa sol* ✻ *si re*, ó *fa la* b *ut* b *mi* bb, al modo menor de *sol* b.

Luego despues de pasar por el modo de *la* á la postura *sol* ✻ *si re fa*, podremos (966), por medio de esta última postura, y contentándonos con trastornarla, pasar de repente á los modos de menor de *ut*, ó de menor de *mi* b, ó de menor de *sol* b, esto es á modos que no tienen nada, ó casi nada comun con el modo menor de *la*, y le son enteramente estraños.

995 Hemos de confesar sin embargo que un movimiento tan repentino é inesperado no engaña al oido; le choca sin poderle esplicar; y su esplicacion pende del quar-

tò de tono que despreciamos como nulo, porque es imperceptible para el oido, bien que no deja de percibir su dureza; pero la estrañeza se desvanece pronto, y se cambia en admiracion, por verse trasladado de repente, y casi sin sentirlo de un modo á otro que no es de ninguna manera relativo con él, y al qual jamás se hubiera podido pasar inmediatamente por medio de las succesiones fundamentales ordinarias.

Del Género Diatónico enbarmónico.

996 Si formamos un bajo fundamental que suba alternadamente de quinta y tercera, como *fa ut mi si*,

Escala.
Fa Mi Mi Re
Fa Ut Mi Si
Bajo fundamental.

este bajo dará el canto *fa mi mi re* ✻, en el qual los semitonos de *fa* á *mi*, y de *mi* á *re* ✻ son iguales (*t*) y mayores.

Este género de canto, en el qual todos los semitonos son mayores, se llama *Diatónico enbarmónico.* Los semitonos mayores peculiares á este canto le dán el nombre de *diatónico*, porque el semitono mayor pertenece al género diatónico, y el tono un quarto de tono mayor que resulta de los semitonos mayores consecutivos, le dá el nombre de *enbarmónico*, conforme veremos mas adelante (1023).

Del

Del Género Cromático enbarmónico.

997 Si pasamos alternadamente de una tercera menor bajando á una mayor subiendo, como *ut*, *ut*, *la*, *ut* ✱, *ut* ✱, formaremos este canto *mi* b, *mi*, *mi*, *mi*, *mi* ✱, en el qual todos los semitonos son menores (*u*).

Escala.

Mi b *Mi* *Mi* *Mi* *Mi* ✱

Ut *Ut* *La* *Ut* ✱ *Ut* ✱

Bajo fundamental.

Este género se llama *Chromático enbarmónico*; los semitonos menores peculiares á este canto le dán el nombre de *cromático*, porque el semitono menor pertenece al género cromático; y el tono una quarta parte de tono mas debil que resulta de los semitonos menores consecutivos, le dá el nombre de *enbarmónico*.

998 Estos nuevos géneros confirman lo que hemos dicho hasta aquí, es á saber, que todo el efecto de la harmonía y de la melodía reside en el bajo fundamental.

999 El género diatónico es el mas agradable, porque el bajo fundamental que le dá origen, se forma de la serie de las quintas, que entre todas es la mas natural.

1000 Como el cromático se origina de la succesion de las terceras, es el mas natural despues del diatónico.

1001 Finalmente el enharmónico es el menos grato

de todos, porque el bajo fundamental que le dá, no es inmediatamente indicado de la naturaleza. El quarto de tono que constituye este género, y que de suyo es imperceptible para el oido, no produce ni puede producir efecto alguno sino en quanto se suple el bajo fundamental que le dá; de cuyo bajo el movimiento no es nada natural, por componerse de dos sones que no son vecinos uno de otro en la succesion de las terceras (993).

Que la Melodía nace de la Harmonía.

1002 De todo lo dicho hasta aquí han inferido algunos Escritores que la melodía nace de la harmonía; y que en la harmonía tácita ó espresa hemos de buscar los efectos de la melodía.

1003 Para probarlo, apelan al primer esperimento, considerando (862) *que el son principal siempre es el* mas grave, y que los sones agudos que engendra son respecto de él lo que el tiple es en una obra de música respecto de su bajo.

1004 Fuera de esto, hemos probado quando dimos á conocer (980 y sig.) la cláusula interrumpida, que *la* diferencia de los bajos produce efectos del todo diferentes en un canto que por otra parte se queda el mismo.

1005 Para probarlo todavía mas, considerarémos los diferentes bajos que se le pueden dar á este canto muy simple *sol ut*; hallaremos que son muchísimos, y cada uno de estos bajos dará un caracter distinto al canto *sol ut*, bien

que

que este canto se queda siempre el mismo; por manera que se muda todo el ser y los efectos de un canto, solo con mudar su bajo fundamental.

Declaracion Matemática de la teórica de la Música.

1006 (*a*). Supongamos dos cuerdas sonoras de una misma materia, igualmente gruesas y tensas ó tirantes, pero de distinta longitud; consta por esperiencia,

1.° Que si la menor fuere la mitad de la mayor, el son que diere será la octava alta del son que diere la mas larga.

2.° Que si la mas corta fuere el tercio de la mas larga, dará la docena alta del son de la mas larga.

3.° Que si fuere su quinto, dará su diez y setena mas alta.

Consta tambien, y lo confiesan todos los Escritores, que quanto mas corta es una cuerda tanto mayor número de vibraciones (son idas y vueltas) dá en un mismo tiempo, pongo por caso, en una hora, en un minuto, en un segundo &c; por manera que una cuerda que es el tercio de otra, hace tres vibraciones mientras que la otra no hace mas que una; y una cuerda que fuere su quinta parte, haría cinco vibraciones en el mismo tiempo.

Síguese de aquí que el son de una cuerda es tanto mas ó menos agudo, quantas mas ó menos vibraciones hace en un tiempo señalado, pongo por egemplo, en un segundo.

Por consiguiente, si llamamos 1 un son qualquiera, podremos llamar 2 su octava alta, quiero decir que figuraremos la octava con el número de vibraciones que hace la cuerda que la dá, en el tiempo que la otra no hace mas que una vibracion. Llamaremos tambien 3 la docena alta del son 1, y 5 la décima séptima mayor alta &c. Pero prevenimos que nuestro ánimo no es espresar con estas espresiones numéricas los sones en sí; porque los sones en sí no son mas que sensaciones, y sería un desatino decir que una sensacion es dupla, tripla &c. de otra. Así, las espresiones 1, 2, 3, &c. que usamos para representar un son, la octava alta, su docena alta &c. solo significan que si una cuerda hace un número señalado de vibraciones en un segundo, por egemplo, la cuerda que dá su octava alta hará otras tantas mas en el mismo tiempo, la cuerda que dá la docena alta hará 3 veces mas &c. Luego comparar los sones unos con otros no es otra cosa que comparar los números de vibraciones que hacen en un mismo tiempo las cuerdas que dan dichos sones.

1007 (*b*). Síguese de aquí que si la octava alta del son 1 fuere 2, la octava baja del mismo son será $\frac{1}{2}$, esto es, que la cuerda que diere esta octava, hará media vibracion en el tiempo que hace una la cuerda que dá el son 1. Luego para sacar la octava alta de un son, se ha de multiplicar por 2 la cantidad que representa dicho son; y para sacar la octava baja, se debe dividir al contrario por 2 la misma cantidad.

Por

Por esta razon, si á un son qualquiera, *ut* por egemplo, le llamamos.......................... 1
su octava alta será.......................... 2
su doble octava.......................... 4
su triple octava.......................... 8
su octava baja será.......................... $\frac{1}{2}$
su doble octava baja.......................... $\frac{1}{4}$
su triple octava baja.......................... $\frac{1}{8}$
su docena alta será.......................... 3
su docena baja.......................... $\frac{1}{3}$
su diez y setena mayor alta.......................... 5
su diez y setena mayor baja.......................... $\frac{1}{5}$.

Luego no se muda el valor de un son, quando se multíplica ó divide por 2, por 4 &c. el número que espresa dicho son; porque con estas operaciones se toma la octava dupla simple, &c. del son propuesto, y por lo dicho (865) un son se confunde con su octava.

Luego ya que la quinta alta del son 1 es la octava baja de la docena, será, por lo dicho poco há, $\frac{3}{2}$; lo que significa que esta cuerda hace $\frac{3}{2}$ vibraciones, esto es, una vibracion y media, mientras que la cuerda que dá el son 1, no hace mas que una.

Para sacar la espresion de la quarta alta del son 1, se ha de tomar la docena baja del son 1, y la doble octava alta de esta docena. Porque la docena baja de *ut*, por egemplo, es *fa*, cuya doble octava es la quarta alta *fa* de *ut*. Luego una vez que la docena baja de 1 es $\frac{1}{3}$,

se

se sigue que la doble octava alta de esta docena, esto es, la quarta alta del son 1, será $\frac{1}{3}$ multiplicado por 4, ó $\frac{4}{3}$.

Finalmente, por ser la tercera mayor la octava doble baja de la diez y setena, síguese que la tercera mayor alta del son 1 será 5 dividido por 4, esto es $\frac{5}{4}$.

La tercera mayor de un son, por egemplo, la tercera mayor *mi* del son *ut*, y su quinta *sol* forman una con otra una tercera menor *mi sol*; pero *mi* es $\frac{5}{4}$, y *sol* es $\frac{3}{2}$, por lo probado; de donde se sigue que la tercera menor, ó el intervalo de *mi* á *sol* tendrá por espresion la razon entre el quebrado $\frac{5}{4}$ y el quebrado $\frac{3}{2}$.

Para determinar esta razon se tendrá presente lo dicho (L175), y se hallará que $\frac{5}{4} : \frac{3}{2} :: 5 : 6$. Luego si dos sones forman uno con otro una tercera menor, y el primero es 5, el otro será 6; ó lo que viene á ser lo mismo, si el primero fuere 1, el otro será $\frac{6}{5}$.

Luego la tercera menor harmónica que se halla en la resonancia misma del cuerpo sonoro entre los sones *mi* y *sol*, harmónicos del son principal, se puede espresar de este modo $\frac{6}{5}$.

1008 Veamos ahora como se halla la espresion numérica de un son, quando se sabe qué razon debe haber entre él y el otro son, cuya espresion numérica es dada.

Busquemos, por egemplo, la tercera mayor de la quinta $\frac{3}{2}$, esta tercera mayor ha de ser por lo dicho los $\frac{5}{4}$ de la quinta; porque la tercera mayor de un son qualquiera es los $\frac{5}{4}$ del mismo son. Hemos, pues, de hallar un que-

quebrado que sea los $\frac{5}{4}$ de $\frac{3}{2}$, que por lo dicho (1.96) es $\frac{15}{8}$. Por el mismo camino hallaremos que la quinta de la quinta es $\frac{9}{4}$, porque la quinta de la quinta es los $\frac{3}{2}$ de $\frac{3}{2}$.

Hasta aquí solo hemos hablado de las quintas, quartas, terceras mayores, terceras menores subiendo; por las mismas reglas sacaremos las quintas, quartas &c. bajando. Porque supongamos que *ut* sea 1, hemos visto como su quinta, su quarta, su tercera mayor, su tercera menor subiendo son $\frac{3}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{6}{5}$. Para sacar estos mismos intervalos bajando, no hay mas que hacer sino trastornar estos quebrados, y tendremos $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$.

1009 (*c*). En virtud de este modo de apreciar los sones, se nos hará muy facil señalar el valor de cada son respecto del son *ut* que llamaremos 1, en la escala diatónica de los griegos; porque los dos sones *sol* y *fa* del bajo son $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{3}$; de donde se sigue

1.° Que el *ut* de la escala es la octava del *ut* del bajo, esto es 2.

2.° Que *si* es la tercera mayor de *sol*, esto es, $\frac{5}{4}$ de $\frac{3}{2}$ (1008), y por consiguiente $\frac{15}{8}$.

3.° Que *re* es la quinta de *sol*, esto es, los $\frac{3}{2}$ de $\frac{3}{2}$, y por consiguiente $\frac{9}{4}$.

4.° Que *mi* es la tercera mayor de la octava de *ut*, y por lo mismo el duplo de $\frac{5}{4}$, esto es, $\frac{5}{2}$.

5.° Que *fa* es la doble octava del *fa* del bajo, y por consiguiente $\frac{8}{3}$.

Que

6.° Que el *sol* de la escala es la octava del *sol* del bajo, y por consiguiente 3.

7.° Finalmente, que el *la* de la escala es la tercera mayor del *fa* de la escala, esto es, $\frac{5}{4}$ de $\frac{8}{3}$ ó $\frac{10}{3}$.

Podremos, pues, formar la tabla siguiente en la qual cada son tiene encima ó debajo su valor numérico.

Escala	$\frac{15}{8}$	2	$\frac{9}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{8}{3}$	3	$\frac{10}{3}$
diatónica.	*si*,	*ut*,	*re*,	*mi*,	*fa*,	*sol*,	*la*,

Bajo fun-	*sol*,	*ut*,	*sol*,	*ut*,	*fa*,	*ut*,	*fa*,
damental.	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{2}{3}$

Y si para simplificar el cálculo llamamos 1 el son *ut* de la escala, con dividir por 2 cada uno de los dos números que representan la escala diatónica, sacaremos

$\frac{15}{16}$	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$
si,	*ut*,	*re*,	*mi*,	*fa*,	*sol*,	*la*.

1010 (*d*). Para comparar el *re* con el *fa* se debe comparar $\frac{9}{8}$ con $\frac{4}{3}$; la razon entre estos quebrados será (1007) la de 27 á 32; luego la tercera menor del *re* al *fa* no es cabal, porque la razon de 27 á 32 no es la misma que la de 5 á 6, por haber entre estas dos razones la misma razon que entre 27×6 y 32×5, esto es, la de 162 á 160, ó de 81 á 80.

Por-

1011 (*e*). Porque la razon entre *si* y *ut* es la misma que entre $\frac{15}{16}$ y 1, esto es, la de 15 á 16; la de *mi* al *fa* es la de $\frac{5}{4}$ á $\frac{4}{3}$, esto es la de 5 × 3 á 4 × 4 ó de 15 á 16 (1007); luego estas dos razones son iguales. Asimismo, la razon de *ut* á *re* es la de 1 á $\frac{9}{8}$ ó de 8 á 9; la de *fa* á *sol* es la de $\frac{4}{3}$ á $\frac{3}{2}$, esto es (1007) la de 8 á 9. La razon de *mi* á *ut* es la de $\frac{5}{4}$ á 1 ó de 5 á 4; la de *la* á *fa* es la de $\frac{5}{3}$ á $\frac{4}{3}$ ó de 5 á 4; luego &c.

1012 (*f*). Porque la razon de *mi* á *ut* es de $\frac{5}{4}$ á 1 ó de 5 á 4 tercera mayor cabal; la de *re* á *si* es la de $\frac{9}{8}$ á $\frac{15}{16}$, ó de 9 × 16 á 15 × 8, ó de 6 á 5. Del mismo modo sacaremos que la razon de *mi* á *si* es la de $\frac{5}{4}$ á $\frac{15}{16}$, esto es de 5 × 16 á 15 × 4 ó de 4 á 3 que es una quarta cabal.

1013 (*g*). Porque la razon de *re* á *ut* es la de $\frac{9}{8}$ á 1, ó de 9 á 8; la de *mi* á *re* es la de $\frac{5}{4}$ á $\frac{9}{8}$, esto es la de 40 á 36 ó de 10 á 9; pero $\frac{10}{9}$ discrepa menos de la unidad que $\frac{9}{8}$; luego el intervalo de *re* á *mi* es algo menor que el de *ut* á *re*.

Si determinamos la razon de $\frac{10}{9}$ á $\frac{9}{8}$ sacaremos (1007) que es la de 8 × 10 á 9 × 9, esto es de 80 á 81. Así, la razon del tono menor al tono mayor es de 80 á 81; esta diferencia del tono mayor al tono menor es lo que los Griegos llamaron *Comma*. Es imperceptible para el oído.

Esta diferencia de un comma se halla entre la tercera menor cabal y harmónica, y la tercera menor alterada

re

re fa (1010), que hay en la escala; porque hemos visto que esta tercera menor alterada tiene con la tercera menor cabal la razon de 80 á 81.

1014 (*b*). Los valores de los sones en la escala diatónica de los modernos son los mismos que en la de los Griegos, excepto el del *la*; porque como *re* es $\frac{9}{8}$, su quinta será $\frac{27}{16}$; por manera que la escala será

1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{15}{8}$	2
ut,	*re*,	*mi*,	*fa*,	*sol*,	*la*,	*si*,	*UT*,

donde se vé que el *la* de esta escala es distinto del de la escala de los Griegos, y que entre estos dos *las* hay la razon de $\frac{27}{16}$ á $\frac{5}{3}$, esto es de 81 á 80; luego hay entre ellos la diferencia de un comma.

1015 (*i*). El *LA* considerado como quinta de *re* es $\frac{27}{16}$, y la quarta baja de este *LA* es los $\frac{3}{4}$ de $\frac{27}{16}$, esto es $\frac{81}{64}$; luego $\frac{81}{64}$ será el valor de *mi* considerado como quartá cabal de *LA*, bajando; pero *mi*, considerado como tercera mayor del son *UT*, es $\frac{5}{4}$ ó $\frac{80}{64}$; luego estos dos *mis* son uno á otro como 81 á 80; luego es imposible que *mi* sea á un tiempo tercera mayor cabal de *UT*, y *la* quarta baja cabal de *LA*.

1016 (*k*). Si en una octava templamos conforme se dijo (910) alternadamente las quintas y las quartas, la operacion será qual se sigue.

UT, *SOL* quinta, *re* quarta, *LA* quinta, *mi* quarta, *si*

si quinta, *fa* ✱ quarta, *ut* ✱ quinta, *sol* ✱ quarta, *RE* ✱ quinta, *la* ✱ quarta, *MI* ✱ ó *FA* quinta, *si* ✱ quarta. Pero por un cálculo muy facil se sacará que si el primer *UT* es 1, *SOL* será $\frac{3}{2}$, *re* $\frac{9}{8}$, *LA* $\frac{27}{16}$, *mi* $\frac{81}{64}$ &c, y prosiguiendo á este tenor hasta *si* ✱ que hallaremos $\frac{531441}{262144}$. Este quebrado es patentemente mayor que 2, que espresa la octava cabal *ut* de *UT*; y la octava baja cabal de *si* ✱, sería la mitad de este quebrado, esto es, $\frac{531441}{524288}$, que es patentemente mayor que *UT*, figurado en la unidad. El numerador de este último quebrado $\frac{531441}{524288}$ es el número 3 multiplicado 11 veces de seguida por sí mismo, y el denominador es el número 2 multiplicado 18 veces de seguida por sí mismo. Pero es constante que el valor de este quebrado que espresa el valor de *si* ✱, no es igual con la unidad que espresa el valor del son *UT*, bien que en el clave el *si* ✱ y el *UT* se confundan. Este quebrado excede la unidad en $\frac{7153}{524288}$, esto es como en $\frac{1}{73}$, y esta diferencia se llama *Comma de Pitágoras*. Es evidente que este comma es mucho mayor que el otro (1013) que no pasa de $\frac{1}{80}$.

Acabamos de probar que la serie de las quintas dá un *si* ✱ muy distinto del *ut*. La serie de las terceras mayores le dá todavía mas distinto. Porque supongamos que la serie de las terceras sea *ut*, *mi*, *sol* ✱, *si* ✱, tendremos *mi* igual á $\frac{5}{4}$, *sol* ✱ á $\frac{25}{16}$, y *si* ✱ á $\frac{125}{64}$, cuya octava baja es $\frac{125}{128}$, por donde se echá de ver que este último *si* es $\frac{3}{128}$ ó $\frac{1}{42}$, con corta diferencia, menor que la unidad, es-

to

to es que *ut*. Este es otro comma mucho mayor que el antecedente, y que los Griegos llamaron *Apotome mayor*.

Conviene reparar que este *si* ✱ sacado de la succesion de las terceras, es al *si* ✱ sacado de la succesion de las quintas, como $\frac{125}{128}$ es á $\frac{531441}{524288}$, esto es, multiplicando por 524288, como 125 × 4096 es á 531441, ó como 512000 á 531441, esto es, como 26 es á 27 con corta diferencia; de donde se infiere que estos dos *si* ✱ son muy diferentes uno de otro, y bastante para que lo perciba el oído; pues la diferencia de uno á otro pasa de un semitono menor, cuyo valor, segun probaremos dentro de poco (1018), es $\frac{25}{24}$.

Fuera de esto, si despues de hallado el *sol* ✱ $\frac{25}{16}$, templamos por quintas y quartas *sol* ✱, *re* ✱, *la* ✱, *mi* ✱, *si* ✱, conforme lo hemos practicado para la primera serie de las quintas, hallaremos que el *si* ✱ será $\frac{2025}{2048}$; luego su diferencia respecto de la unidad, esto es, respecto de *UT*, es $\frac{23}{2048}$, esto es como $\frac{1}{89}$, comma menor que todos los demas, al qual los Griegos llamaron *Apotome menor*.

Finalmente, si despues de hallado *mi* igual con $\frac{5}{4}$ en la progresion de las terceras, templamos por quintas y quartas *mi*, *si*, *fa* ✱, *ut* ✱ &c. llegaremos á otro *si* ✱ que será $\frac{32805}{32768}$, que no discrepará de la unidad sino $\frac{1}{885}$ con corta diferencia; este es el último comma y el menor de todos; pero es de notar que en este caso las terceras ma-

yo-

yores de *mi* á *sol* x, de *sol* x á *si* x ó *ut* &c. son muy falsas y muy alteradas.

1017 (*l*). Por ser iguales todos los semitonos en el temperamento de Rameau, se sigue que los doce semitonos *ut*, *ut* x, *re*, *re* x, *mi*, *mi* x, &c. formarán una progresion geométrica continua, esto es una succesion en la qual *ut* será á *ut* x como *ut* x á *re* &c.

Estos doce semitonos componen una succesion de trece sones, cuyo primer y último término son *UT* y su octava *ut*. Para sacar, pues, por cálculo el valor de cada son en el temperamento de que se trata, la cuestion se reduce á hallar entre los números 1 y 2 once medios geométricos.

Por lo dicho (I. 223) será facil sacar cada uno de estos números ó por lo menos sus valores aproximados, que son los siguientes

UT	*ut* x	*re*	*re* x	*mi*	*fa*	*fa* x
1	$\sqrt[12]{2}$	$\sqrt[12]{2^2}$	$\sqrt[12]{2^3}$	$\sqrt[12]{2^4}$	$\sqrt[12]{2^5}$	$\sqrt[12]{2^6}$

sol	*sol* x	*la*	*la* x	*si*	*ut*
$\sqrt[12]{2^7}$	$\sqrt[12]{2^8}$	$\sqrt[12]{2^9}$	$\sqrt[12]{2^{10}}$	$\sqrt[12]{2^{11}}$	$\sqrt[12]{2^{12}}$.

Se viene á los ojos que todas las quintas están igualmente alteradas en este temperamento y podemos probar que cada una lo está muy poco; porque hallaremos, por egemplo, que la quinta de *ut* á *sol*, que debería ser $\frac{3}{2}$,

se debe bajar como $\frac{1}{12}$ de $\frac{1}{73}$, esto es $\frac{1}{876}$, que es una cantidad sumamente pequeña.

Verdad es que las terceras mayores estarán algo mas alteradas; porque la tercera mayor de *ut* á *mi*, por egemplo, será como $\frac{1}{100}$ mayor; pero mas vale, segun Rameau, que la alteracion recaiga en la tercera y no en la quinta, que, despues de la octava, es el intervalo mas perfecto, y debe acercarse á ser cabal quanto sea posible.

Por otra parte hemos visto en la serie de las terceras mayores *ut*, *mi*, *sol* ✱, *si* ✱, que este último *si* ✱ discrepa mucho del *ut* (1016); de donde se sigue que para poner este último *si* ✱ unísonus con la octava de *ut*, y alterar al mismo tiempo cada una de las terceras mayores lo menos que se pueda, es preciso alterarlas todas igualmente. Esto es lo que sucede en el temperamento propuesto; y si la tercera es mas alterada que *la quinta*, es por razon de la diferencia que hay entre el grado de perfeccion de estos intervalos, con cuya diferencia se conforma, digamoslo así, el temperamento propuesto. Así, esta diferencia de alteracion mas es una ventaja que un inconveniente.

1018 (*m*). Con efecto, por ser *ut* 1, segun suponemos, *mi* es $\frac{5}{4}$, y *sol* ✱ $\frac{25}{16}$; pero como *sol* es $\frac{3}{2}$, *sol* ✱ será á *sol* como $\frac{25}{16}$ es á $\frac{3}{2}$, esto es, como 25 × 2 á 3 × 16, ó como 25 á 24, cuyo intervalo es mucho menor que el de 16 á 15, que constituye el semitono de *ut* á *si*, ó de *fa* á *mi* (1011).

1019 (*n*). Repararemos que el semitono menor junto

to

to con el semitono mayor, compone el tono menor; quiero decir, que si se sube, por egemplo de *mi* á *fa* por el intervalo del semitono mayor, y despues de *fa* á *fa* ✱ por el intervalo del semitono menor, el intervalo del *mi* al *fa* ✱ será un tono menor; porque supongamos que *mi* sea 1, *fa* será $\frac{16}{15}$, y *fa* ✱ será $\frac{25}{24}$ de $\frac{16}{15}$, esto es, 25×16 dividido por 24×15, ó $\frac{10}{9}$; luego *mi* es á *fa* ✱ como 1 es á $\frac{10}{9}$, cuyo intervalo constituye el tono menor (1013).

Por lo que mira al tono mayor, no es posible formarle con dos semitonos. Porque 1.° dos semitonos mayores consecutivos darían mas de un tono mayor; con efecto, $\frac{16}{15} \times \frac{16}{15}$ dá $\frac{256}{225}$, cantidad mayor que $\frac{9}{8}$, que constituye (1013) el tono mayor. 2.° Un semitono mayor y un semitono menor darían juntos menos que el tono mayor, pues componen el tono menor. 3.° Con mas razon dos semitonos menores darían todavía menos.

1020 (*o*). Con efecto, siendo *mi* b $\frac{6}{5}$, *sol* b será $\frac{6}{5}$ de $\frac{6}{5}$, esto es (1008) $\frac{36}{25}$, y *sol* será $\frac{3}{2}$; pero la razon de $\frac{3}{2}$ á $\frac{36}{25}$ (1007) es la de 3×25 á 2×36, esto es la de 25 á 24.

1021 (*p*). Como *la* es $\frac{5}{6}$, *ut* ✱ será $\frac{5}{4}$ de $\frac{5}{6}$, esto es $\frac{25}{24}$, y *ut* es 1; luego la razon de *ut* á *ut* ✱ es la de 1 á $\frac{25}{24}$ ó de 24 á 25.

1022 (*q*). Por ser *la* b la tercera mayor baja de *ut*, será $\frac{4}{5}$ (1008); luego *ut* b es $\frac{6}{5}$ de $\frac{4}{5}$, esto es $\frac{24}{25}$; luego la razon de *ut* á *ut* b es de 25 á 24.

1023 (*r*). Como *sol* ✱ es $\frac{25}{16}$, y *si* ✱ es $\frac{5}{4}$ de $\frac{25}{16}$, ten-

dremos *si* ✻ igual (1008) á $\frac{125}{64}$, y su octava baja será $\frac{125}{128}$, cuyo intervalo viene á ser $\frac{3}{128}$ ó $\frac{1}{43}$ menor que la unidad; falta, pues, este quebrado para que el *si* ✻ de que se trata sea lo mismo que *ut*.

A este intervalo se le dá el nombre de *quarto de tono* y con razon; porque en la Música se pueden distinguir quatro especies de quartos de tono.

1.° El quarto del tono mayor; y como el tono mayor es $\frac{9}{8}$, y su diferencia á la unidad es $\frac{1}{8}$, la diferencia de este quarto de tono á la unidad será con corta diferencia el quarto de $\frac{1}{8}$, esto es $\frac{1}{32}$.

2.° El quarto del tono menor; y como el tono menor que es $\frac{10}{9}$, discrepa $\frac{1}{9}$ de la unidad, el quarto del tono menor discrepará de la unidad $\frac{1}{36}$.

3.° La mitad del semitono mayor; y como este semitono discrepa de la unidad $\frac{1}{15}$, su mitad discrepará de la unidad como $\frac{1}{30}$.

4.° Finalmente, la mitad del semitono menor, el qual discrepa de la unidad $\frac{1}{24}$, luego su mitad será $\frac{1}{48}$.

Luego ya que el intervalo que forma el quarto de tono enharmónico no discrepa de la unidad sino $\frac{1}{43}$, se puede llamar con razon *quarto de tono*, porque discrepa menos de la unidad que el mayor de los quartos de tono, y mas que el menor.

Añadiremos que pues el quarto de tono enharmónico es la diferencia del semitono mayor al semitono menor, y el tono menor se forma (1019) de un semitono mayor

yor y de un semitono menor, síguese que dos semitonos mayores de seguida componen un tono mayor de lo que corresponde un quarto de tono enharmónico, y que dos semitonos menores de seguida componen un tono menor de lo que corresponde el mismo quarto de tono.

1024 (*s*). Esto quiere decir que si subimos del *mi* al *fa*, por egemplo, haciendo un semitono mayor, y volviendo despues al *mi*, subimos por el intervalo de un semitono menor á otro son que no está en la escala, al qual llamaremos *fa* +; los dos sones *fa* y *fa* + formarán un quarto de tono enharmónico; porque siendo *mi* 1, *fa* será $\frac{16}{15}$, y *fa* +, $\frac{25}{24}$; luego la razon de *fa* + á *fa* es la de $\frac{25}{24}$ á $\frac{16}{15}$ (1007), esto es, de 25 × 15 á 16 × 24 ó de 25 × 5 á 16 × 8, ó de 125 á 128. Esta razon es la misma que sacamos antes (1023) para espresar el *quarto de tono enharmónico*.

1025 (*t*). Es patente que si hacemos 1 el *fa* del bajo, *fa* de la escala será 2, *ut* del bajo es $\frac{3}{2}$, y *mi* de la escala $\frac{5}{4}$ de $\frac{3}{2}$, esto es, $\frac{15}{8}$; luego la razon de *fa* á *mi* es la de 2 á $\frac{15}{8}$, ó de 1 á $\frac{15}{16}$. Pero como *mi* del bajo tambien es $\frac{5}{4}$ de $\frac{3}{2}$ ó $\frac{15}{8}$, *si* del bajo es $\frac{3}{2}$ de $\frac{15}{8}$, y su tercera mayor *re* ✱, $\frac{5}{4}$ de $\frac{3}{2}$ de $\frac{15}{8}$, ó $\frac{15}{8}$ de $\frac{15}{8}$; esta tercera mayor arrimada quanto sea posible al *mi* de la escala por medio de las octavas será $\frac{15}{16}$ de $\frac{15}{8}$; luego el *mi* de la escala será al *re* ✱ que se le sigue, como $\frac{15}{8}$ es á $\frac{15}{16}$ de $\frac{15}{8}$, esto es, como 1 es á $\frac{15}{16}$; luego los semitonos de *fa* á *mi*, y de *mi* á *re* ✱ son ambos mayores.

(*u*).

1026 (*u*). Es evidente que *mi* b es $\frac{6}{5}$ (1007), y que *mi* es $\frac{5}{4}$; luego estos dos *mi* son entre sí como $\frac{6}{5}$ á $\frac{5}{4}$, ó como 6×4 á 5×5, ó 24 á 25, cuyo intervalo constituye el semitono menor. A mas de esto, el *la* del bajo es $\frac{5}{6}$ y el *ut* ✱ es los $\frac{5}{4}$ de $\frac{5}{6}$ ó $\frac{25}{24}$; luego el *mi* ✱ es los $\frac{5}{4}$ de $\frac{25}{24}$; luego el *mi* de la escala es al *mi* ✱ que se le sigue, como 24 á 25; luego todos los semitonos son menores en esta escala.

FIN
DEL TOMO OCTAVO.

